Представяния на базисни класически суперaлгебри на Ли и обобщени квантови статистики

Н.И. Стоилова

Институт за Ядрени Изследвания и Ядрена Енергетика

София, 04.04.2016

План

1. Въведение
2. Класификация на ОКС, съответстващи на базисните СЛ
   - парастатистики и СЛ B_n и $B(0|n)$
   - дефиниция и метод
   - класификация
   - резултати, заключения и възможни приложения
3. Парастатистически пространства на Фок и представяния на СЛ
   - Парабозонно пространство на Фок и представяния на $\mathfrak{osp}(1|2n)$
   - Парафермионно пространство на Фок и представяния на $\mathfrak{so}(2n+$
   - Парафермиони, парабозони и $\mathfrak{so}(\infty)$ and $\mathfrak{osp}(1|\infty)$
   - Ковариантни тензорни представяния на $\mathfrak{gl}(m|n)$ и ККГ
   - Парастатистическото пространство на Фок и $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$
4. Вигнерови квантови системи
5. Нови крайномерни модели на едномерен осцилатор

Теория на представянията на базисните класически супералгебри на Ли

Базисни класически супералгебри на Ли

- прости алгебри на Ли (АЛ)
- $A(m|n)$, $B(m|n)$, $C(n)$, $D(m|n)$, $G(3)$, $F(4)$, $D(2,l;\alpha)$

Крайномерни неприводими представяния на АЛ

- характери
- размерности на пространствата на представянията

Крайномерни неприводими представяния на супералгебрите на Ли (СЛ) $A(m|n)$, $B(m|n)$, $C(n)$, $D(m|n)$, $G(3)$, $F(4)$, $D(2,l;\alpha)$

- теорията на представянията на СЛ не е просто копие на съответната теория за АЛ
- класификация на крайномерни неприводими представяния на СЛ; нетипични представяния; формула за характерите
- приложения - базис; трансформация на базиса;

безкрайномерни неприводими преставяния на СЛ и техните безкрайномерни аналози

Квантови статистики

- нарастващ интерес в полевите теории, теориите по кондензирана материя
- нови статистики, водещи до обобщения или отклонения от първите принци на квантовата теория, като принципа на Паули, комутативност на пространство-време
- някои обобщения на квантовата статистика - резултат на нови развития в математиката - квантовите групи (деформирани Бозе оператори на раждане и унищожение)
- откриването на дробния квантов ефект на Hall - аниони (частици с дробна статистика) (2Д)
- Haldane - обобщена версия на принципа на Pauli; (дробна) изключваща статистика

Квантова статистика и суперaлгебри на Ли

Цели на дисертацията

- Връзка: квантова статистика - супералгебри на Ли
- Приложение на теорията на представянията на базисните класически СЛ в обобщените статистики и нестандартни квантови системи

Идеи

- парабозонна и парафермионна статистика [H.S. Green, 1953]

$$[[F_j^{\xi}, F_k^{\eta}], F_l^{\epsilon}] = \frac{1}{2}(\epsilon-\eta)^2\delta_{kl}F_j^{\xi} - \frac{1}{2}(\epsilon-\xi)^2\delta_{jl}F_k^{\eta},$$
$$\xi,\eta,\epsilon = \pm \text{ or } \pm 1; \quad j,k,l = 1,\ldots,n.$$

$$[\{B_j^{\xi}, B_k^{\eta}\}, B_l^{\epsilon}] = (\epsilon-\xi)\delta_{jl}B_k^{\eta} + (\epsilon-\eta)\delta_{kl}B_j^{\xi},$$
$$\xi,\eta,\epsilon = \pm \text{ or } \pm 1; \quad j,k,l = 1,\ldots,n;$$

Връзка между парастатистиките и СЛ от клас B

- Алгебрата на Ли $so(2n+1) = B_n$ и парафермионната статистика [S. Kamefuchi & Y. Takahashi, C. Ryan & E.C.G. Sudarshan]:

$$[[F_j^{\xi}, F_k^{\eta}], F_l^{\epsilon}] = \frac{1}{2}(\epsilon-\eta)^2\delta_{kl}F_j^{\xi} - \frac{1}{2}(\epsilon-\xi)^2\delta_{jl}F_k^{\eta},$$
$$\xi,\eta,\epsilon = \pm \text{ or } \pm 1; \quad j,k,l = 1,\ldots,n.$$

- Супералгебрата на Ли $osp(1|2n) = B(0,n)$ и парабозонната статистика [A.Ch. Ganchev & T.D. Palev]:

$$[\{B_j^{\xi}, B_k^{\eta}\}, B_l^{\epsilon}] = (\epsilon-\xi)\delta_{jl}B_k^{\eta} + (\epsilon-\eta)\delta_{kl}B_j^{\xi},$$
$$\xi,\eta,\epsilon = \pm \text{ or } \pm 1; \quad j,k,l = 1,\ldots,n.$$

Заключение

парастатистиките съответстват на представяния на СЛ от клас B (B_n and $B(0,n)$)

Примери на обобщени квантови статистики и класификация

- Въпрос: Съществуват ли интересни алтернативни типове обобщени квантови статистики, съотвестващи на останалите базисни класически СЛ?
- Примери, съответстващи на класическите АЛ и на СЛ $sl(1|n)$.
- $sl(n+1) = A_n$ (T.D. Palev): n двойки ОРУ a_i^ξ:

$$[[a_i^+, a_j^-], a_k^+] = \delta_{jk} a_i^+ + \delta_{ij} a_k^+,$$
$$[[a_i^+, a_j^-], a_k^-] = -\delta_{ik} a_j^- - \delta_{ij} a_k^-,$$
$$[a_i^+, a_j^+] = [a_i^-, a_j^-] = 0,$$

$(i, j, k = 1, \ldots, n)$, генерирайки $sl(n+1)$. Релациите - от една страна са алгебричните релации на една нова статистика, A-статистиката, а от друга страна те са дефиниционни релации за алгебрата A_n. Микро- и макроскопични свойства на A-статистиката.

Обобщени квантови статистики и класификация

- Класификация не беше направена
- Пълна класификация на всички ОКС, съотвестващи на базисните класически супералгебри на Ли
  A_n, B_n, C_n, D_n,
  $A(m|n)$, $B(m|n)$, $C(n)$, $D(m|n)$
  G_2, F_4, E_6, E_7, E_8
  $G(3)$, $F(4)$, $D(2,1;\alpha)$

Дефиниция и метод за класификация

Нека G е базисна класическа СЛ. ОКС, съответстваща на G - определен брой ОРУ $x_i^{\pm}$, които генерират алгебрата и удовлетворяват трилинейни съотношения.

$$G_{+1} = \mathrm{span}\{x_i^+;\ i = 1\ldots, N\}, \qquad G_{-1} = \mathrm{span}\{x_i^-;\ i = 1\ldots, N\}.$$

Трилинейни релации

$$\begin{aligned}
&[\![[\![x_i^+, x_j^+]\!], x_k^+]\!] = 0,\\
&[[x_i^+, x_j^+], x_k^-] = \text{линейна комбинация на } x_l^+,\\
&[\![[\![x_i^+, x_j^-]\!], x_k^+]\!] = \text{линейна комбинация на } x_l^+,\\
&[\![[\![x_i^+, x_j^-]\!] x_k^-]\!] = \text{линейна комбинация на } x_l^-,\\
&[\![[\![x_i^-, x_j^-]\!], x_k^+]\!] = \text{линейна комбинация на } x_l^-,\\
&[\![[\![x_i^-, x_j^-]\!], x_k^-]\!] = 0.
\end{aligned}$$

Дефиниция и метод за класификация

- Нека $G_{\pm 2} = [\![G_{\pm 1}, G_{\pm 1}]\!]$ и $G_0 = [\![G_{+1}, G_{-1}]\!]$
- можем да изискаме $G_{-2} \oplus G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_{+1} \oplus G_{+2}$ (пряка сума на векторни пространства) да е $\mathbb{Z}$-градуировка на подалгебра на G
- Но! G трябва да се генерира от $2N$ на брой елемента, удоблетворяващи трилинейни релации
- Следователно $G = G_{-2} \oplus G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_{+1} \oplus G_{+2}$

Допълнителни предположения

- ОРУ - спрегнати
- нека ω - анти-линейна анти-инволюция за G: $\omega(x_i^+) = x_i^-$
- и нека $x_i^\pm$ са корневи вектори на G.

Дефиниция на ОКС

Нека G е базисна класическа СЛ, с анти-линейна анти-инволюция ω. Множество от $2N$ корневи вектора $x_i^{\pm}$ $(i = 1, \ldots, N)$, се нарича множество от оператори на раждане и унищожение (ОРУ) на G ако:

- $\omega(x_i^{\pm}) = x_i^{\mp}$,
- $G = G_{-2} \oplus G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_{+1} \oplus G_{+2}$ е $\mathbb{Z}$-градуировка на G, с $G_{\pm 1} = \mathrm{span}\{x_i^{\pm},\ i = 1 \ldots, N\}$ и $G_{j+k} = [\![G_j, G_k]\!]$.

Алгебричните релации $\mathcal{R}$, които удовлетворяват операторите $x_i^{\pm}$ са релациите на обобщената квантова статистика, съответсваща на G.

Следствия от дефиницията

- G се генерира от G_{-1} и G_{+1}.
- Тъй като $G_{j+k} = [\![G_j, G_k]\!]$:

$$G = \mathrm{span}\{x_i^{\xi},\ [\![x_i^{\xi}, x_j^{\eta}]\!];\quad i,j = 1,\ldots,N,\ \xi,\eta = \pm\}.$$

- $\mathcal{R}$ се състои от квадратични и трилинейни релации .
- $G_0 \subset G$ е подалгебра на G и е линейна обвивка на корневи вектори, т.е. G_0 е **регулярна подалгебра** , съдържаща Картановата подалгебра $\mathfrak{h}$ of G.
- По отношение на присъединеното представяне, останалите **G_i-та са G_0-модули.**
- Като СЛ G дефинирана в термини на генератори и релации, G еднозначно се характеризира с ОРУ $x_i^{\pm}$ и алгебричните релации $\mathcal{R}$.

Техника

- Определи всички регулярни подалгебри G_0 на G. Ако G_0 не съдържа $\mathfrak{h}$, замести G_0 с $G_0 + \mathfrak{h}$ [Dynkin; J. Van der Jeugt]
- За всяка регулярна подалгебра G_0, определи разложението на G на прости G_0-модули g_k $(k = 1, 2, \ldots)$.
- Изследвай дали съществува $\mathbb{Z}$-градуировка на G от вида

$$G = G_{-2} \oplus G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_{+1} \oplus G_{+2},$$

  където всяко G_i е или направо модул g_k или сума от такива модули $g_1 \oplus g_2 \oplus \cdots$, за които $\omega(G_{+i}) = G_{-i}$.
- Ако $G_{\pm 2} \neq 0$ - $\mathbb{Z}$-градуировка с *дължина 5*;
- ако $G_{+2} = 0$ (тогава и $G_{-2} = 0$, но $G_{\pm 1} \neq 0$) - $\mathbb{Z}$-градуировка с *дължина 3*.

Техника

- Първият етап на техниката е известен: за намиране регулярните подалгебри може да се използва метода на (разширените) диаграми на Динкин (E.B. Dynkin, Am. Math. Soc. Transl. **6**, 111 (1957); J. Van der Jeugt, J. Math. Phys. **28**, 292 (1987)).
- За втория етап - прилагаме техника от теория на представянията.
- Третият етап - най-обемната работа: необходимо е да се опитат всички възможни комбинации на G_0-модули g_k, и да се види дали е възможно да се получи градуировка с дължина 3 или 5. Ако $\omega(g_k) = g_k$ - то този модул трябва да е част от G_0. Такъв случай се свежда до друг с по-голяма регулярна подалгебра.
- За да определим ОКС, съответстваща на G е достатъчно да зададем ОРУ или подпространството G_{-1}. Всички квадратични и трилинейни релации $\mathcal{R}$ следват от известните суперкомутационни релации в G.

Алгебрата на Ли $A_n = sl(n+1)$

Нека G е специалната линейна Ли алгебра $sl(n+1)$, която се състои от $(n+1) \times (n+1)$ матрици със следа 0. Картановата подалгебра $\mathfrak{h}$ на G е попространството от диагонални матрици. Корневите вектори на G са

$$e_{jk}, \quad j \neq k = 1, \ldots, n+1,$$

където e_{jk} е матрица с нули навсякъде с изключение на пресичането на ред j и колона k. Съответният корен е

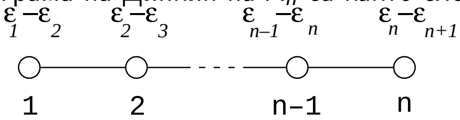
$$\epsilon_j - \epsilon_k,$$

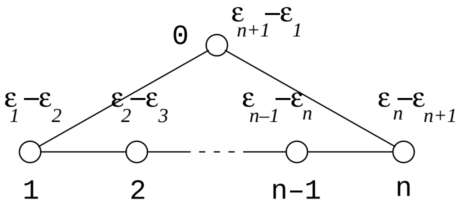
в обичайния базис. Анти-инволюцията е такава, че

$$\omega(e_{jk}) = e_{kj}.$$

Алгебрата на Ли $A_n = sl(n+1)$

Простите корени, диаграмата на Динкин и разширената диаграма на Динкин на A_n са както следва:





За да намерим регулярните подалгебри на $G = A_n$ трябва да задраскваме възли от диаграмата на Динкин на G или от нейната разширена диаграма.

Стъпка 1. Задраскваме възел i от диаграмата на Динкин. Получената диаграма е диаграма на Динкин на $sl(i) \oplus sl(n-i+1)$, така че

$$G_0 = \mathfrak{h} + sl(i) \oplus sl(n-i+1).$$

В този случай има само два G_0 модула и

$$G_{-1} = \mathrm{span}\{e_{kl};\ k = 1,\dots,i,\ l = i+1,\dots,n+1\},$$

$$G_{+1} = \omega(G_{-1}).$$

Следователно $sl(n+1)$ има следната градуировка:

$$sl(n+1) = G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_{+1},$$

а броят на операторите на раждане и унищожение е

$$N = i(n-i+1).$$

Алгебрата на Ли $A_n = sl(n+1)$

За $i = 1$, $N = n$, рангът на A_n. Нека

$$a_j^- = e_{1,j+1}, \qquad a_j^+ = e_{j+1,1}, \; j = 1, \dots, n,$$

тогава за релациите $\mathcal{R}$ имаме $(j, k, l = 1, \dots, n)$:

$$\begin{aligned}
[a_j^+, a_k^+] &= [a_j^-, a_k^-] = 0,\\
[[a_j^+, a_k^-], a_l^+] &= \delta_{jk} a_l^+ + \delta_{kl} a_j^+,\\
[[a_j^+, a_k^-], a_l^-] &= -\delta_{jk} a_l^- - \delta_{jl} a_k^-.
\end{aligned}$$

Това са релациите на т.н. A-статистика.

Алгебрата на Ли $A_n = sl(n+1)$

За $i = 2$, $N = 2(n-1)$, нека

$$a^-_{-j} = e_{1,j+2}, \quad a^-_{+j} = e_{2,j+2}, \qquad j = 1, \dots, n-1,$$
$$a^+_{-j} = e_{j+2,1}, \quad a^+_{+j} = e_{j+2,2}, \qquad j = 1, \dots, n-1.$$

Съответните релации са $(\xi, \eta, \epsilon = \pm;\ j, k, l = 1, \dots, n-1)$:

$$[a^+_{\xi j}, a^+_{\eta k}] = [a^-_{\xi j}, a^-_{\eta k}] = 0,$$
$$[a^+_{\xi j}, a^-_{-\xi k}] = 0, \qquad j \neq k,$$
$$[a^+_{-j}, a^-_{-k}] = [a^+_{+j}, a^-_{+k}], \qquad j \neq k,$$
$$[a^+_{+j}, a^-_{-j}] = [a^+_{+k}, a^-_{-k}],$$
$$[a^+_{-j}, a^-_{+j}] = [a^+_{-k}, a^-_{+k}],$$
$$[[a^+_{\xi j}, a^-_{\eta k}], a^+_{\epsilon l}] = \delta_{\eta\epsilon}\delta_{jk} a^+_{\xi l} + \delta_{\xi\eta}\delta_{kl} a^+_{\epsilon j},$$
$$[[a^+_{\xi j}, a^-_{\eta k}], a^-_{\epsilon l}] = -\delta_{\xi\epsilon}\delta_{jk} a^-_{\eta l} - \delta_{\xi\eta}\delta_{jl} a^-_{\epsilon k}.$$

Тези релации са по-сложни от за $i = 1$. Но те са също дефиниционни релации на АЛ A_n.

Стъпка 2. Задраскваме възел i и j от диаграмата на Динкин. Тогава

$$G_0 = \mathfrak{h} + sl(i) \oplus sl(j-i) \oplus sl(n+1-j).$$

В този случай има три прости G_0-модула. Всички възможни комбинации на тези модули водят до градуировки от вида

$$sl(n+1) = G_{-2} \oplus G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_{+1} \oplus G_{+2}.$$

Три са възможните начини, по които тези G_0-модули могат да се комбинират. За да ги характезираме даваме G_{-1}:

$$\begin{aligned}
G_{-1} &= \mathrm{span}\{e_{kl}, e_{lp};\ k = 1,\dots,i,\ l = i+1,\dots,j, \\
&\quad p = j+1,\dots,n+1\}, \text{with } N = (j-i)(n+1-j+i); \\
G_{-1} &= \mathrm{span}\{e_{kl}, e_{pk};\ k = 1,\dots,i,\ l = i+1,\dots,j, \\
&\quad p = j+1,\dots,n+1\}, \text{with } N = i(n+1-i); \\
G_{-1} &= \mathrm{span}\{e_{kl}, e_{lp};\ k = 1,\dots,i,\ p = i+1,\dots,j, \\
&\quad l = j+1,\dots,n+1\}, \text{with } N = j(n+1-j).
\end{aligned}$$

ОРУ, съответстващи на втората и третата градуировка са

Алгебрата на Ли A_n

Разглеждаме $j - i = 1$, тогава броя на ОРУ е $N = n$. Нека:

$$
\begin{aligned}
&a_k^- = e_{k,i+1}, \quad a_k^+ = e_{i+1,k}, \qquad k = 1, \ldots, i; \\
&a_k^- = e_{i+1,k+1}, \; a_k^+ = e_{k+1,i+1}, \; k = i+1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Тогава квадратичните и трилинейни релации са:

$$
\begin{aligned}
&[a_k^+, a_l^+] = [a_k^-, a_l^-] = 0, \; k, l = 1, \ldots, i \text{ or } k, l = i+1, \ldots, n, \\
&[a_k^-, a_l^+] = [a_k^+, a_l^-] = 0, \; k = 1, \ldots, i, \; l = i+1, \ldots, n, \\
&[[a_k^+, a_l^-], a_m^+] = (-1)^{\langle l \rangle + \langle m \rangle} \delta_{kl} a_m^+ + \\
&(-1)^{\langle l \rangle + \langle m \rangle} \delta_{lm} a_k^+, \; k, l = 1, \ldots, i \text{ or } k, l = i+1, \ldots, n, \\
&[[a_k^+, a_l^-], a_m^-] = -(-1)^{\langle l \rangle + \langle m \rangle} \delta_{kl} a_m^- - \\
&(-1)^{\langle l \rangle + \langle m \rangle} \delta_{km} a_l^-, \; k, l = 1, \ldots, i \text{ or } k, l = i+1, \ldots, n, \\
&[[a_k^\xi, a_l^\xi], a_m^{-\xi}] = -\delta_{km} a_l^\xi + \delta_{lm} a_k^\xi, \; k = 1, \ldots, i, \; l = i+1, \ldots, n, \\
&[[a_k^\xi, a_l^\xi], a_m^\xi] = 0, \qquad (\xi = \pm; \; k, l, m = 1, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

За $n = 2m$ and $i = m$ - причинна A-статистика, T.D. Palev, Rep. Math. Phys. **18**, 117 (1980); **18**, 129 (1980)

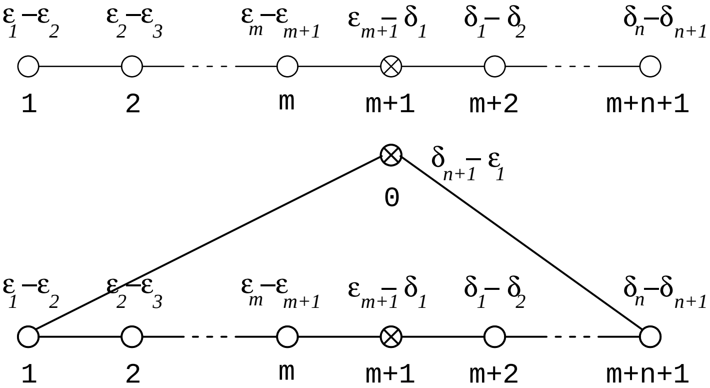
Стъпка 3. Ако задраскаме 3 или повече възли от диаграмата на Динкин, $\mathbb{Z}$-градуировките на $sl(n+1)$ вече не са от вида $sl(n+1) = G_{-2} \oplus G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_{+1} \oplus G_{+2}$, има ненулеви G_i с $|i| > 2$, затова тези случаи не са важни за класификацията.
Стъпка 4. Ако задраскаме възел i от разширената диаграма на Динкин, оставащата диаграма е от тип A_n, т.е. $G_0 = G$, и няма оператори на раждане и унищожение.
Стъпка 5. ....
B_n, C_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8.

Обобщение

алгебра на Ли	диаграма на Динкин на G_0	N	$\mathcal{R}$
A_n	$D - \{i\}$ $(i \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)$	$i(n+1-i)$	$i=1,$ тип 1 A-статистика, комут. оператори $i=2,$ тип 2 A-статистика, комут. оператори
	$D - \{i,j\}$ $(i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ $i < j < n+1-i)$	$(j-i)(n+1-j+i)$	$j-i=1,$ тип 3 A-статистика некомут. оператори (for $n=2m, i=m,$ (Палев) причинна статист
B_n	$D - \{1\}$	$2n-1$	B-статистика, комут. оператори
	$D - \{i\}$ $(2 \leq i \leq n)$	$2i(n-i)+i$	$i=n,$ пара-Ферми статистика, некомут. оператори
C_n	$D - \{i\}$ $(1 \leq i \leq n-1)$	$2i(n-i)$	$i=1$ тип 1 C-статистика некомут. оператори $i=n-1$ тип 2 (Палев) C-статистика, некомут. оператори
	$D - \{n\}$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$-$, тип 3 C-статистика, комут. оператори
D_n	$D - \{1\}$	$2(n-1)$	тип 1 D-статистика, комут. оператори
	$D - \{i\}$ $(2 \leq i \leq n-2)$	$2i(n-i)$	тип 2 D-статистика некомут. оператори
	$D - \{n\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$-$, тип 3 D-статистика, комут. оператори
	$D - \{n-1, n\}$	$2(n-1)$ $\frac{n(n-1)}{2}$	тип 4 (Палев) D-статистика, некомут. оператори $-$, тип 5 D-статистика, некомут. оператори

Супералгебрата на Ли $A(m|n)$

Специална (distinguished) диаграма на Динкин и нейното разширение:



Супералгебрата на Ли $A(m|n)$

Стъпка 1. Задраскваме възел i от диаграмата на Динкин.
Стъпка 2. Задраскваме възли i и j от диаграмата на Динкин.
Стъпка 3. Ако задраскаме 3 или повече възли от диаграмата на Динкин, $\mathbb{Z}$-градуировките вече не са от вида $G_{-2} \oplus G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_{+1} \oplus G_{+2}$, има ненулеви G_i с $|i| > 2$, затова тези случаи не са важни за класификацията.
Стъпка 4. Ако задраскаме възел i от разширената диаграма на Динкин ....
Стъпка 5. ....
Step 8. Повтаряме процедурата с всички неспециални (non-distinguished) диаграми на Динкин и техните разширения:

$$\bullet \!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!- \bullet \!-\!\!-\!\!-\!\!- \cdots \!-\!\!-\!\!-\!\!- \bullet \!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!- \bullet$$

всеки възел може да бъде бяло или сиво кръгче (взависимост от това дали съответният прост корен е четен или нечетен).

Резюме на резултатите за СЛ $A(m|n)$

$G_0 = \mathfrak{h} + \cdots$	ℓ	N
$sl(k\|l) \oplus sl(p\|q)$ $(k+p = m+1,\ l+q = n+1,$ $k+l \neq 0,\ p+q \neq 0)$	3	$(k+l)(p+q)$
$sl(k\|l) \oplus sl(p\|q) \oplus sl(r\|s)$ $(k+p+r = m+1,$ $l+q+s = n+1,$ $k+l \neq 0,\ p+q \neq 0,\ r+s \neq 0)$	5 5 5	$(k+l)(p+q+r+s)$ $(p+q)(k+l+r+s)$ $(r+s)(k+l+p+q)$

Суперaлгебрата на Ли $B(m|n)$

$G_0 = \mathfrak{h} + \cdots$	ℓ	N
$sl(k\|l) \oplus B(m-k\|n-l)$ $(k=0,\ldots,m;\ l=0,\ldots,n;$ $(k,l) \notin \{(0,0),(1,0)\})$	5	(k+l)(2m-2k+2n-2l+1)
$B(m-1\|n)$ $[(k,l)=(1,0)]$	3	2m+2n-1

Супералгебрата на Ли $B(m|n)$

Най-интересният случай е в I с $k=m, l=n$; $G_0 = sl(m|n)$, $N=n+m$; ОРУ:

$$\deg(b_j^{\pm}) = \langle j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad j=1,\dots,n \\ 0 & \text{if} \quad j=n+1,\dots,n+m. \end{cases}$$

Няма квадратични релации, $\mathcal{R}$ се състои само от трилинейни релации:

$$[\![[\![b_j^{\xi}, b_k^{\eta}]\!], b_l^{\epsilon}]\!] = -2\delta_{jl}\delta_{\epsilon,-\xi}\epsilon^{\langle l\rangle}(-1)^{\langle k\rangle\langle l\rangle} b_k^{\eta} + 2\epsilon^{\langle l\rangle}\delta_{kl}\delta_{\epsilon,-\eta} b_j^{\xi},$$
$$\xi,\eta,\epsilon = \pm \text{ or } \pm 1; \quad j,k,l = 1,\dots,n+m.$$

$B_j^{\pm} = b_j^{\pm}, j=1,\dots,n$ (съотв. $F_k^{\pm} = b_{n+k}^{\pm}, k=1,\dots,m$) са парабозони (съотв. парафермиони) (T.D. Palev, J. Math. Phys. **23**, 1100 (1982))

$$[\{B_j^{\xi}, B_k^{\eta}\}, B_l^{\epsilon}] = (\epsilon-\xi)\delta_{jl}B_k^{\eta} + (\epsilon-\eta)\delta_{kl}B_j^{\xi},$$
$$\xi,\eta,\epsilon = \pm \text{ or } \pm 1; \quad j,k,l = 1,\dots,n;$$

$$[[F_j^{\xi}, F_k^{\eta}], F_l^{\epsilon}] = \frac{1}{2}(\epsilon-\eta)^2\delta_{kl}F_j^{\xi} - \frac{1}{2}(\epsilon-\xi)^2\delta_{jl}F_k^{\eta},$$

Супералгебрата на Ли $B(0|n)$

$G_0 = \mathfrak{h} + \cdots$	ℓ	N
$sl(i) \oplus B(0\|n-i)$ $(i = 1, \dots, n)$	5	$i(2n - 2i + 1)$

Нека $i = n$, $N = n$; ОРУ

$$B_j^- = -\sqrt{2}(e_{1,1+n+j} + e_{1+j,1}), \quad j = 1, \dots, n,$$
$$B_j^+ = \sqrt{2}(e_{1,1+j} - e_{1+n+j,1}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Това са всички нечетни генератори на $B(0|n)$ и релациите $\mathcal{R}$ са трилинейните парабозонни релации.

Супералгебрата на Ли $D(m|n)$

$G_0 = \mathfrak{h} + \cdots$	ℓ	N
$sl(k\|l) \oplus D(m-k\|n-l)$ $(k = 0, 1, \ldots, m;$ $l = 0, 1, \ldots, n;$ (k,l)$\notin$ {(0,0),(1,0),(m-1,n),(m,n)})	5	2(k+l)(m+n-k-l)
$D(m-1\|n) \qquad [(k,l) = (1,0)]$	3	$2(m+n-1)$
$sl(m\|n) \qquad [(k,l) = [m,n)]$	3	$\frac{(m+n)(m+n+1)}{2} - m$
$sl(m-1\|n) \qquad [(k,l) = (m-1,n)]$	5	$\frac{(m+n)(m+n+1)}{2} - m$
$sl(m-1\|n) \qquad [(k,l) = (m-1,n)]$	5	$2(m+n-1)$

Супералгебрата на Ли $C(n)$

$G_0 = \mathfrak{h} + \cdots$	ℓ	N
$sl(k\|l) \oplus D(1-k\|n-1-l)$ $(k=0,1;\ l=1,\dots,n-2)$	5	$2(k+l)(n-k-l)$
C_{n-1} $[(k,l)=(1,0)]$	3	$2(n-1)$
$sl(1\|n-1)$ $[(k,l)=(1,n-1)]$	3	$n(n+1)/2-1$
$sl(n-1)$ $[(k,l)=(0,n-1)]$	5	$n(n+1)/2-1$
$sl(n-1)$ $[(k,l)=(0,n-1)]$	5	$2(n-1)$

Резултати от класификацията на изключителните алгебри на Ли

LA	G_0	ℓ	dim G_0	dim G_1	dim G_2
G_2	$\mathbb{C} \oplus sl(2)$	5	4	4	1
F_4	$\mathbb{C} \oplus sp(6)$	5	22	14	1
	$\mathbb{C} \oplus so(7)$	5	22	8	7
E_6	$\mathbb{C} \oplus so(10)$	3	46	16	0
	$\mathbb{C} \oplus sl(2) \oplus sl(5)$	5	28	20	5
	$\mathbb{C} \oplus sl(6)$	5	36	20	1
	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus so(8)$	5	30	16	8
E_7	$\mathbb{C} \oplus E_6$	3	79	27	0
	$\mathbb{C} \oplus sl(2) \oplus so(10)$	5	49	32	10
	$\mathbb{C} \oplus so(12)$	5	67	32	1
	$\mathbb{C} \oplus sl(7)$	5	49	35	7
E_8	$\mathbb{C} \oplus E_7$	5	134	56	1
	$\mathbb{C} \oplus so(14)$	5	92	64	14

Резултати от класификацията на изключителните супералгебри на Ли

LSA	G_0	ℓ	dim G_0	dim G_1	dim G_2
$D(2,1;\alpha)$	$\mathbb{C} \oplus sl(2) \oplus sl(2)$	5	7+0	0+4	1+0
	$\mathbb{C} \oplus sl(1\|2)$	3	5+4	2+2	0+0
	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus sl(1\|1)$	5	3+2	2+2	1+1
$G(3)$	$\mathbb{C} \oplus G_2$	5	15+0	0+7	1+0
	$\mathbb{C} \oplus sl(1\|2)$	5	5+4	4+3	2+2
	$sl(3\|1)$	3	9+6	4+4	0+0
	$\mathbb{C} \oplus osp(3\|2)$	5	7+6	4+4	1+0
	$sl(3) \oplus osp(1\|2)$	3	11+2	3+6	0+0
$F(4)$	$\mathbb{C} \oplus so(7)$	5	22+0	0+8	1+0
	$\mathbb{C} \oplus sl(1\|2) \oplus sl(2)$	5	8+4	6+4	2+2
	$\mathbb{C} \oplus osp(2\|4)$	3	12+8	6+4	0+0
	$\mathbb{C} \oplus sl(2) \oplus so(5)$	5	14+0	0+8	5+0
	$\mathbb{C} \oplus D(2,1;-1/3)$	5	10+8	6+4	1+0
	$\mathbb{C} \oplus sl(3\|1)$	5	10+6	4+4	3+1

Резултати, заключения и възможни приложения

- Съвокупност от ОРУ заедно с релациите $\mathcal{R}$, които удовлетворяват еднозначно определят СЛ. Т.е. всеки случай в класификацията също дава дефиниция на съответната СЛ в термини на генератори и релации.
- Подпространството $G_{-1} \oplus G_{+1}$ (т.е. подпространството линейна обвивка на всички ОРУ) е (супер)триплетна система на Ли за универсалната обвиваща алгебра $U(G)$ (N. Jacobson; S. Okubo).
- алгебри, дефинирани с трилинейни релации ((super)ternary algebras) (I. Bars & M. Günaydin)
  "It would be interesting to embark on a complete classification of ternary algebras and superternary algebras and provide a list of all possible constructions of a given Lie (super)algebra from (super)ternary algebras."
  Резултатите представляват пълна, изчерпателна класификация.

Резултати, заключения и възможни приложения

- Резултатите преставляват пълна класификация на ОКС, съответстващи на базисните класически СЛ. Известните случаи (парабозонната, парафермионната и A-(супер)статистиката) са частни случаи в направената класификация. За да говорим за квантова статистика във физически смисъл трябва да са изпълнени допълнителни изисквания за ОРУ, свързани с определени квантови постулати. Тези изисквания са свързани със съществуването на пространство на състоянията (пространство на Фок), в което ОРУ действат по такъв начин, че съответните физически наблюдаеми са ермитови оператори.
  Надяваме се, че някои случаи от получената класификация ще доведат до интересни ОКС от тази гледна точка.
- Възможни приложения на тези резултати са намиране на решения на т.н. условия за съвместимост на Вигнеровите квантови системи.

Парабозонно пространство на Фок за всяко n от ред p

- n двойки парабозони $B_j^{\pm}$ $(j = 1, \ldots, n)$:

$$[\{B_j^{\xi}, B_k^{\eta}\}, B_l^{\epsilon}] = (\epsilon - \xi)\delta_{jl} B_k^{\eta} + (\epsilon - \eta)\delta_{kl} B_j^{\xi}$$

- Пространство на Фок $V(p)$, характеризиращо се с $(B_j^{\pm})^{\dagger} = B_j^{\mp}$ и $B_j^{-}|0\rangle = 0$, и

$$\{B_j^{-}, B_k^{+}\}|0\rangle = p\,\delta_{jk}\,|0\rangle$$

- Нерешени въпроси:
  - структура на това представяне
  - ортогонален базис
  - действия на генераторите
- анзац на Green
  $V(1)^{\otimes p} \to V(p) \oplus \cdots$

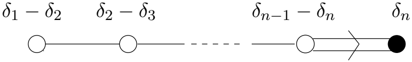
Ортосимплектичната СЛ $\mathfrak{osp}(1|2n)$

Матрична дефиниция: $\mathfrak{osp}(1|2n)$ - $(1+n+n)\times(1+n+n)$ матрици от вида (индексите са от 0 до $2n$):

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a_1 \\ a_1^t & b & c \\ -a^t & d & -b^t \end{pmatrix}$$

- c и d са симетрични $n \times n$ матрици
- четна и нечетна част; ранг n
- Картан $\mathfrak{h}$: $h_j = e_{jj} - e_{n+j,n+j}$

Диаграма на Динкин:



Корени: четни корени $\pm\delta_j \pm \delta_k$, $2n$ нечетни $\pm\delta_k$ с корневи вектори

$$B_k^+ = \sqrt{2}(e_{0,k} - e_{n+k,0}), \quad B_k^- = -\sqrt{2}(e_{0,n+k} + e_{k,0})$$

Теорема ($\mathfrak{osp}(1|2n)$ като СЛ чрез генератори и релации)

СЛ $\mathfrak{osp}(1|2n)$ се генерира от $2n$ нечетни елемента, удовлетворяващи следните (парабозе) релации

$$[\{B_j^\xi, B_k^\eta\}, B_l^\epsilon] = (\epsilon - \xi)\delta_{jl} B_k^\eta + (\epsilon - \eta)\delta_{kl} B_j^\xi$$

$\mathfrak{osp}(1|2n)$ представпния и пБ простанство на Фок

пБ простанство на Фок

- $(B_j^{\pm})^\dagger = B_j^{\mp}$
- $B_j^-|0\rangle = 0$
- $\{B_j^-, B_k^+\}|0\rangle = p\,\delta_{jk}\,|0\rangle \qquad (\ \{B_j^-, B_j^+\} = 2h_j)$

Съответствие

Пространството на Фок съответства на унитарно неприводимо представяне $V(p)$ на $\mathfrak{osp}(1|2n)$ с младшо тегло $(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}, \ldots, \frac{p}{2})$.

Изненадващо: структурата и матричните елементи на тези представяния не бяха известни (с изключение на $p = 1$, или $n = 1$).

Цел:

- построяване на $V(p)$ (базис, действие на генераторите)
- разкриване структурата на $V(p)$ (характер, разложение, ...)

Подалгебри на $\mathfrak{osp}(1|2n)$ и индуциран модул

- Верига от подалгебри $\mathfrak{osp}(1|2n) \supset \mathfrak{sp}(2n) \supset \mathfrak{u}(n)$

$$
\begin{array}{llll}
\mathfrak{osp}(1|2n) & B_j^{\pm} & \pm\delta_j & \\
 & \{B_j^{\pm}, B_k^{\pm}\} & \pm(\delta_j + \delta_k) & \leftarrow \mathfrak{sp}(2n) \\
 & \{B_j^{\pm}, B_k^{\mp}\} & \pm(\delta_j - \delta_k) & \leftarrow \mathfrak{sp}(2n) \quad \leftarrow \mathfrak{u}(n)
\end{array}
$$

- $\{B_j^-, B_k^+\}|0\rangle = p\,\delta_{jk}\,|0\rangle$ $\Leftrightarrow$ тривиален 1Д $\mathfrak{u}(n)$ модул с тегло $(\frac{p}{2}, \ldots, \frac{p}{2})$ (напомняме $\{B_j^-, B_j^+\} = 2h_j$)
- $B_j^-|0\rangle = 0$ $\Leftrightarrow$ разширяваме $\mathfrak{u}(n)$ до параболичната подалгебра $\mathcal{P} = \langle \mathfrak{u}(n), B_j^-, \{B_j^-, B_k^-\}\rangle$ и разширяваме $\mathbb{C}|0\rangle$ до тривиален $\mathcal{P}$-модул.
- Индуциран модул: $\overline{V}(p) = \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}}^{\mathfrak{osp}(1|2n)}\,\mathbb{C}|0\rangle$
- базисни вектори: $(B_1^+)^{k_1}\cdots(B_n^+)^{k_n}(\{B_1^+, B_2^+\})^{k_{12}}\cdots(\{B_{n-1}^+, B_n^+\})^{k_{n-1,n}}|0\rangle$

Неприводим модул

$V(p) = \overline{V}(p)/M(p)$ (max. нетривиален подмодул)

Пример с $\mathfrak{osp}(1|4)$: индуциран модул

$\overline{V}(p)$: базисни вектори $(B_1^+)^k(B_2^+)^l(\{B_1^+, B_2^+\})^m|0\rangle \equiv |k, l, m\rangle$

Базисът не е ортогонален, но действията могат да се намерят
$B_1^-|2k, l, m\rangle = 2k|2k-1, l, m\rangle + 2m|2k, l+1, m-1\rangle$
$B_1^-|2k+1, l, m\rangle = (p+2m+2k)|2k, l, m\rangle - 2m|2k+1, l+1, m-1\rangle$

$\langle 0|0\rangle = 1$ и $(B_l^\pm)^\dagger = B_l^\mp$ задава вътр. произведение

- тегло $(\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$: $\langle 0, 0, 0|0, 0, 0\rangle = 1$
- тегло $(\frac{p}{2}+1, \frac{p}{2})$: $\langle 1, 0, 0|1, 0, 0\rangle = p$
- тегло $(\frac{p}{2}+1, \frac{p}{2}+1)$:
  - $\langle 1, 1, 0|1, 1, 0\rangle = p^2$, $\langle 1, 1, 0|0, 0, 1\rangle = 2p$, $\langle 0, 0, 1|0, 0, 1\rangle = 4p$
  - $\det \begin{pmatrix} p^2 & 2p \\ 2p & 4p \end{pmatrix} = 4p^2(p-1)$
  - положително определена само когато $p > 1$

Детерминанта на Shapovalov: дава векторите на $M(p)$ за различни p

Много тежки сметки: намери друг начин за решение!

Пример с $\mathfrak{osp}(1|4)$: нов базис за индуцирания модул

- Вакумът $|0\rangle$ има тегло $(\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$: дава член $x_1^{\frac{p}{2}} x_2^{\frac{p}{2}} = (x_1 x_2)^{p/2}$ в характера $\mathrm{char}\, \overline{V}(p)$
- Базисните вектори $(B_1^+)^k (B_2^+)^l (\{B_1^+, B_2^+\})^m |0\rangle$ дават

$$\mathrm{char}\, \overline{V}(p) = \frac{(x_1 x_2)^{p/2}}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_1 x_2)}$$

Свойство (за произволно n): развитие чрез функции на Schur

$$\frac{1}{\prod_i (1-x_i) \prod_{j<k} (1-x_j x_k)} = \sum_\lambda s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_\lambda s_\lambda(x)$$

- Всички разбивки (partitions) $\lambda \Leftrightarrow$ всички крайномерни представяния на $\mathfrak{u}(n)$ се означават с $\lambda \Leftrightarrow$ известен е базисът на ГЦ
- $|m) = \left| p; \begin{array}{l} m_{12}, m_{22} \\ m_{11} \end{array} \right) \equiv \left| \begin{array}{l} m_{12}, m_{22} \\ m_{11} \end{array} \right)$ с $m_{12} \geq m_{11} \geq m_{22} \geq 0$ цели числа. Тегло $(|m)) = (\frac{p}{2}, \frac{p}{2}) + (m_{11}, m_{12} + m_{22} - m_{11})$.

Пример с $\mathfrak{osp}(1|4)$: подход в новия базис

- Искаме действието на $B_1^{\pm}|m)$, $B_2^{\pm}|m)$ (достатъчно: B_1^+, B_2^+)
- NB: (B_1^+, B_2^+) задават $\mathfrak{u}(2)$ тензор от "ранг (1,0)":

  $B_1^+ \sim \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & \end{array} \right)$, $B_2^+ \sim \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \end{array} \right)$
- $$(m'|B_1^+|m) = \left\langle \begin{array}{cc} m_{12} & m_{22} \\ m_{11} & \end{array} ; \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & \end{array} \middle| \begin{array}{cc} m'_{12} & m'_{22} \\ m'_{11} & \end{array} \right\rangle$$
  $$\times (m'_{12}, m'_{22}||B^+||m_{12}, m_{22})$$

  $= (\mathfrak{u}(2)$ ККГ$) \times$ (редуциран матричен елемент)
- Тъй като

  $(1,0) \otimes (m_{12}, m_{22}) = (m_{12}+1, m_{22}) \oplus (m_{12}, m_{22}+1)$: има ограничения върху (m'_{12}, m'_{22}).
- $F_1(m) = (m_{12}+1, m_{22}||B^+||m_{12}, m_{22})$,

  $F_2(m) = (m_{12}, m_{22}+1||B^+||m_{12}, m_{22})$

Пример с $\mathfrak{osp}(1|4)$: трансформация на новия базис

Следователно можем да запишем (аналогично за B_1^- и B_2^-)

$$B_1^+|m) = \text{ККГ}_1 \cdot F_1(m) \left| \begin{matrix} m_{12}+1, m_{22} \\ m_{11}+1 \end{matrix} \right) + \text{ККГ}_2 \cdot F_2(m) \left| \begin{matrix} m_{12}, m_{22}+1 \\ m_{11}+1 \end{matrix} \right)$$

$$B_2^+|m) = \text{ККГ}_3 \cdot F_1(m) \left| \begin{matrix} m_{12}+1, m_{22} \\ m_{11} \end{matrix} \right) + \text{ККГ}_4 \cdot F_2(m) \left| \begin{matrix} m_{12}, m_{22}+1 \\ m_{11} \end{matrix} \right)$$

От действието на
$\{B_2^-, B_2^+\}|m) = 2h_2|m) = (p + 2(m_{12} + m_{22} - m_{11}))|m)$, следват рекурентни зависимости, даващи решение за F_1^2 и F_2^2

- $F_1(m_{12}, m_{22}) = (-1)^{m_{22}}(m_{12} + 2 + \mathcal{E}_{m_{12}}(p-2))^{1/2}$
  $\times(m_{12} - m_{22} + 1)^{1/2}/(m_{12} - m_{22} + 1 + \mathcal{O}_{m_{12}-m_{22}})^{1/2}$
- $F_2(m_{12}, m_{22}) = (m_{22} + 1 + \mathcal{E}_{m_{22}}(p-2))^{1/2}$
  $\times(m_{12} - m_{22} + 1)^{1/2}/(m_{12} - m_{22} + 1 - \mathcal{O}_{m_{12}-m_{22}})^{1/2}$

където

- $\mathcal{E}_j = 1$ ако j е четно и 0 в противен случай
- $\mathcal{O}_j = 1$ ако j нечетно и 0 в противен случай

Пример с $\mathfrak{osp}(1|4)$: ККГ

ККГ:

$$\text{ККГ}_1 = \left\langle \begin{matrix} m_{12}, m_{22} \\ m_{11} \end{matrix} ; \begin{matrix} 1, 0 \\ 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} m_{12}+1, m_{22} \\ m_{11}+1 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{m_{11}-m_{22}+1}{m_{12}-m_{22}+1}}$$

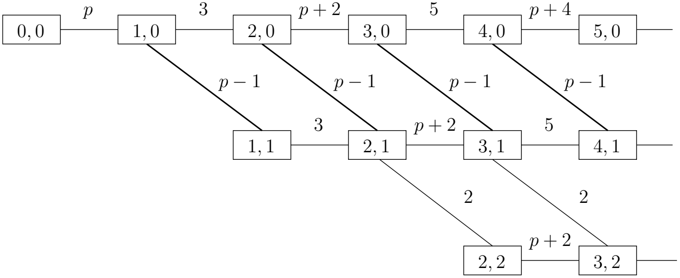
$$\text{ККГ}_2 = \left\langle \begin{matrix} m_{12}, m_{22} \\ m_{11} \end{matrix} ; \begin{matrix} 1, 0 \\ 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} m_{12}, m_{22}+1 \\ m_{11}+1 \end{matrix} \right\rangle = -\sqrt{\frac{m_{12}-m_{11}}{m_{12}-m_{22}+1}}$$

$$\text{ККГ}_3 = \left\langle \begin{matrix} m_{12}, m_{22} \\ m_{11} \end{matrix} ; \begin{matrix} 1, 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} m_{12}+1, m_{22} \\ m_{11} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{m_{12}-m_{11}+1}{m_{12}-m_{22}+1}}$$

$$\text{ККГ}_4 = \left\langle \begin{matrix} m_{12}, m_{22} \\ m_{11} \end{matrix} ; \begin{matrix} 1, 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} m_{12}, m_{22}+1 \\ m_{11} \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{m_{11}-m_{22}}{m_{12}-m_{22}+1}}$$

$\mathfrak{osp}(1|4)$ проблемът е решен

Разглеждаме синитe фактори в редуцираните матрични елементи F_1^2 and F_2^2.



Следствие

$V(p)$ е унитарно неприводимо представяне $\Leftrightarrow$ $p \geq 1$.

- $p > 1$: $V(p) = \overline{V}(p)$ и
  $\mathrm{char}\, V(p) = (x_1 x_2)^{p/2} / ((1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_1 x_2))$
- $p = 1$: $V(p) = \overline{V}(p)/M(p)$, обикновеното пространство на Фок и $\mathrm{char}\, V(1) = (x_1 x_2)^{1/2} / ((1 - x_1)(1 - x_2))$

$\mathfrak{osp}(1|2n)$: нов базис за $\overline{V}(p)$

Използваме развитието чрез функции на Schur: базис на ГЦ за $\overline{V}(p)$, следвайки $\mathfrak{osp}(1|2n) \supset \mathfrak{u}(n)$.

$$|m) \equiv |m)^n \equiv \left| \begin{array}{lllll} m_{1n} & \cdots & \cdots & m_{n-1,n} & m_{nn} \\ m_{1,n-1} & \cdots & \cdots & m_{n-1,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & & \\ m_{11} & & & & \end{array} \right)$$

m_{ij} са неотрицателни цели; условия за междинност

$$m_{i,j+1} \geq m_{ij} \geq m_{i+1,j+1}$$

Теглото на този вектор е:

$$h_k|m) = \left(\frac{p}{2} + \sum_{j=1}^{k} m_{jk} - \sum_{j=1}^{k-1} m_{j,k-1} \right) |m)$$

$\mathfrak{osp}(1|2n)$: действие на $B_j^{\pm}$?

Същата техника за $B_j^{\pm}|m) =?$

$(B_1^+, B_2^+, \ldots, B_n^+)$ е $\mathfrak{u}(n)$ тензор от ранг $(1, 0, \ldots, 0)$

$$B_j^+ \sim \left(\begin{array}{l} 10\cdots 000 \\ 10\cdots 00 \\ \cdots \\ 0\cdots 0 \\ \cdots \\ 0 \end{array} \right)$$

- $j-1$ реда с нули, започвайки от дъното
- останалите редове са $10\cdots 0$
- $\sim$ тегло $+\delta_j$

Тензорното произведение е

$$([m]^n) \otimes (10\cdots 0) = ([m]^n_{+1}) \oplus ([m]^n_{+2}) \oplus \cdots \oplus ([m]^n_{+n})$$

където

- $([m]^n) = (m_{1n}, m_{2n}, \ldots, m_{nn})$
- $([m]^n_{+k}) = (m_{1n}, \ldots, m_{kn} + 1, \ldots, m_{nn})$

$\mathfrak{osp}(1|2n)$: редуцирани матрични елементи

$$(m'|B_j^+|m) = \left(\begin{array}{c} [m]^n_{+k} \\ |m')^{n-1} \end{array} \middle| B_j^+ \middle| \begin{array}{c} [m]^n \\ |m)^{n-1} \end{array} \right)$$

$$= \left\langle \begin{array}{c} [m]^n \\ \\ |m)^{n-1} \end{array} \middle| \begin{array}{l} 10\cdots 00 \\ 10\cdots 0 \\ \cdots \\ 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} [m]^n_{+k} \\ \\ |m')^{n-1} \end{array} \right\rangle \times ([m]^n_{+k}||B^+||[m]^n)$$

$$= (\mathfrak{u}(n) \text{ ККГ}) \times (\text{редуциран матричен елемент})$$

- Тези специални ККГ за $\mathfrak{u}(n)$ са известни и са сравнително прости изрази.
- Неизвестни са: $F_k([m]^n) = F_k(m_{1n}, m_{2n}, \ldots, m_{nn}) = ([m]^n_{+k}||B^+||[m]^n)$

$\mathfrak{osp}(1|2n)$: редуцирани матрични елементи

Техника: използваме действието

$$\{B_n^-, B_n^+\}|m\rangle = 2h_n|m\rangle = (p + 2(\sum_{j=1}^{n} m_{jn} - \sum_{j=1}^{n-1} m_{j,n-1}))|m\rangle$$

Система от рекурентни релации: дава решение за F_k^2 (много трудна за решаване!)

Основен резултат

$$F_k(m_{1n}, m_{2n}, \ldots, m_{nn})^2 = (m_{kn} + n + 1 - k + \mathcal{E}_{m_{kn}}(p-n))$$

$$\times \prod_{j\neq k=1}^{n} \frac{(m_{jn} - m_{kn} - j + k)}{(m_{jn} - m_{kn} - j + k - \mathcal{O}_{m_{jn}+m_{kn}})}$$

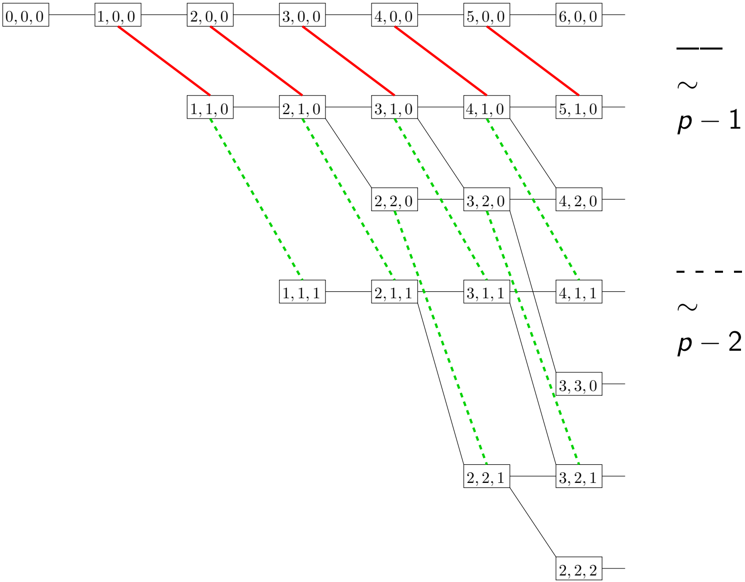
и $F_k([m]^n) = (-1)^{m_{k+1,n}+\ldots+m_{nn}} \sqrt{F([m]^n)^2}$

$\mathfrak{osp}(1|2n)$: действия на $B_j^{\pm}$

Знаем действието на $B_j^{\pm}$ върху базисните вектори $|m)$ на $\overline{V}(p)$. Следствия:

- Смятаме $\{B_j^-, B_k^+\}|m)$. Най-горният ред е инвариантен; получаваме известните матрични елементи на $\mathfrak{u}(n)$ в класическия базис на ГЦ.
- Смятаме $\{B_j^{\pm}, B_k^{\pm}\}|m)$. Те дават матричните елементи на $\mathfrak{sp}(2n)$ (ново).
- Сините фактори дават неприводимите представяния на $\mathfrak{u}(n)$, т.е. ясен е max подмодул $M(p)$, за дадено p. Следователно
$$V(p) = \overline{V}(p)/M(p)$$
е известен.

$\mathfrak{osp}(1|2n)$: структура на $V(p)$



$\mathfrak{osp}(1|2n)$: структура на $V(p)$

Основен резултат: структура на $V(p)$

$V(p)$ е неприводимо представяне $\Leftrightarrow$ $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ или $p > n-1$.

- Ако $p > n-1$ тогава $V(p) = \overline{V}(p)$ и

$$\operatorname{char} V(p) = \frac{(x_1 \cdots x_n)^{p/2}}{\prod_i (1 - x_i) \prod_{j<k} (1 - x_j x_k)} = (x_1 \cdots x_n)^{p/2} \sum_{\lambda} s_\lambda(x)$$

- Ако $p = 1, 2, \ldots, n-1$ то $V(p) = \overline{V}(p)/M(p)$ и

$$\operatorname{char} V(p) = (x_1 \cdots x_n)^{p/2} \sum_{\lambda,\ \ell(\lambda) \leq p} s_\lambda(x)$$

където $\ell(\lambda)$ *дължината* на разбивката λ

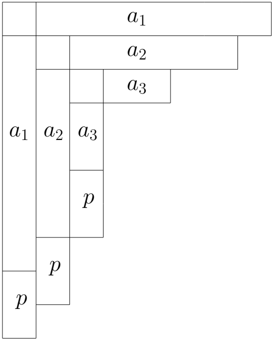
$\mathfrak{osp}(1|2n)$: формула за характерите на $V(p)$

Ако $p = 1, 2, \ldots, n-1$, то [$\mathbf{x} = x_1 \cdots x_n$]

$$\mathrm{char}\, V(p) = \mathbf{x}^{p/2} \sum_{\lambda,\ \ell(\lambda) \leq p} s_\lambda(x) = \mathbf{x}^{p/2} \frac{??}{\prod_i (1-x_i) \prod_{j<k} (1-x_j x_k)}$$

Сметките дават

$$?? = \sum_\eta (-1)^{c_\eta} s_\eta(x)$$



Сумата е по всички разбивки η от вида

$$\eta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ a_1 + p & a_2 + p & \cdots & a_r + p \end{pmatrix}$$

в т.н. означение на Frobenius и $c_\eta = a_1 + a_2 + \cdots + a_r + r$.

Парафермионно пространство на Фок и представяния на $\mathfrak{so}(2n+1)$

- Парафермиони ($F_j^{\pm}$, $j = 1, \ldots, n$):

$$[[F_j^{\xi}, F_k^{\eta}], F_l^{\epsilon}] = \frac{1}{2}(\epsilon - \eta)^2 \delta_{kl} F_j^{\xi} - \frac{1}{2}(\epsilon - \xi)^2 \delta_{jl} F_k^{\eta}$$

- Парафермионно пространство на Фок $W(p)$
$\langle 0|0\rangle = 1, \qquad F_j^{-}|0\rangle = 0, \qquad (F_j^{\pm})^{\dagger} = F_j^{\mp}$ and

$$[F_j^{-}, F_k^{+}]|0\rangle = p\,\delta_{jk}\,|0\rangle, \quad p = 1, 2, \ldots$$

- $p = 1$ - фермионно пространство на Фок $W(1)$

Теорема ($\mathfrak{so}(2n+1)$ като АЛ чрез генератори и релации)

Като АЛ дефинирана чрез генератори и релации, $\mathfrak{so}(2n+1)$ се генерира от $2n$ елемента $F_k^{\pm}$, удовлетворяващи релациите $[[F_j^{\xi}, F_k^{\eta}], F_l^{\epsilon}] = \frac{1}{2}(\epsilon - \eta)^2 \delta_{kl} F_j^{\xi} - \frac{1}{2}(\epsilon - \xi)^2 \delta_{jl} F_k^{\eta}$.

Парафермионно пространство на Фок и представяния на $\mathfrak{so}(2n+1)$

$$[F_j^-, F_j^+] = -2h_j$$

Съответствие (Kamefuchi, Takahashi; Ryan, Sudarshan)

Пространството на Фок съответства на унитарно неприводимо представяне $W(p)$ на $\mathfrak{so}(2n+1)$ с младшо тегло $(-\frac{p}{2}, -\frac{p}{2}, \ldots, -\frac{p}{2})$.

Неочаквано: матричните елементи на тези представяния не бяха известни (освен за $p = 1$).

Цел:

- построяване на $W(p)$ (базис и трансформацията му)
- структура на $W(p)$

Парафермионно пространство на Фок и представяния на $\mathfrak{so}(2n+1)$

- Верига от подалгебри $\mathfrak{so}(2n+1) \supset \mathfrak{so}(2n) \supset \mathfrak{u}(n)$
- Базис на ГЦ за $\overline{W}(p)$, съгласно $\mathfrak{so}(2n+1) \supset \mathfrak{u}(n)$.
- Система от рекурентни релации за G_k; гранични условия; Maple (много трудна задача!)

Основен резултат

$$G_k([m]^n) = \left(- \frac{(\mathcal{E}_n(m_{kn}+n-k)+1)\prod_{j\neq k=1}^{n}(m_{kn}-m_{jn}-k+j)}{\prod_{j\neq \frac{k}{2}=1}^{\lfloor n/2 \rfloor}(m_{kn}-m_{2j,n}-k+2j)(m_{kn}-m_{2j,n}-k+2j+1)} \right)^{1/2}$$ за k четно; и

$$G_k([m]^n) = \left(\frac{(p-m_{kn}+k-1)(\mathcal{O}_n(m_{kn}+n-k)+1)\prod_{j\neq k=1}^{n}(m_{kn}-m_{jn}-k+j)}{\prod_{j\neq \frac{k+1}{2}=1}^{\lceil n/2 \rceil}(m_{kn}-m_{2j-1,n}-k+2j-1)(m_{kn}-m_{2j-1,n}-k+2j)} \right)^{1/2}$$

за k нечетно.

Парафермионно пространство на Фок и представяния на $\mathfrak{so}(2n+1)$

Имаме изрази за действието на $F_j^{\pm}$ върху базисните вектори $|m)$ на $\overline{W}(p)$.
Следствия:

- $[F_j^-, F_k^+]|m)$- остава най-горния ред инвариантен и дава известните матрични елементи на $\mathfrak{u}(n)$ в класическия базис на ГЦ.
- $[F_j^{\pm}, F_k^{\pm}]|m)$ - дава матричните елементи на $\mathfrak{so}(2n)$.
- Сините фактори дават векторите, които принадлежат на максималния подмодул $M(p)$, за всяко p. Следователно

$$W(p) = \overline{W}(p)/M(p)$$

е известно.

$\mathfrak{so}(2n+1)$: структура на $W(p)$

Структура на $W(p)$

Парафермионното пространство на Фок $W(p)$ има базис

$$|m) \equiv |m)^n \equiv \left| \begin{array}{lllll} m_{1n} & \cdots & \cdots & m_{n-1,n} & m_{nn} \\ m_{1,n-1} & \cdots & \cdots & m_{n-1,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & & \\ m_{11} & & & & \end{array} \right),$$

m_{ij} са неотрицателни цели; условия за междинност

$$m_{i,j+1} \geq m_{ij} \geq m_{i+1,j+1},$$

с $m_{1n} \leq p$. С други думи, най-горният ред на $|m)$ е разбивка λ с най-голяма част не надминаваща p, т.е. $\ell(\lambda') \leq p$. Като следствие

$$\mathrm{char}\, W(p) = (x_1 \cdots x_n)^{-p/2} \sum_{\lambda,\ \ell(\lambda') \leq p} s_\lambda(x_1, \ldots, x_n).$$

Парафермиони, парабозони и представяния на $so(\infty)$ and $osp(1|\infty)$

- Реалният интерес е към такива квантови системи (парабозони и парафермиони) с безброй степени на свобода ($n = +\infty$).
- Резултатите обобщихме и построихме представяния от ред p за безброй парафермиони и парабозони. Съответните алгебри са алгебрата на Ли с безкраен ранг $\mathfrak{so}(\infty)$ и супералгебрата на Ли с безкраен ранг $\mathfrak{osp}(1|\infty)$.

Построяването на пространството на Фок беше възможно поради

- въвеждане на стабилни безкрайни таблици на ГЦ
- определяне на неприводимо действие на $\mathfrak{so}(\infty)$ и $\mathfrak{osp}(1|\infty)$ върху тях и свойствата на стабилност на редуцираните матрични елементи в случая на крайно n, когато n клони към безкрайност.

Ковариантни тензорни представяния на $\mathfrak{gl}(m|n)$ и ККГ

- Получаването на матричните елементи за клас СЛ и в частност за клас от неприводими представяния е винаги много трудна задача. Такъв проблем решихме за $\mathfrak{gl}(m|n)$, а именно намерихме действието на генераторите на Шевалие за класа ковариантни тензорни представяния върху подходящ базис на ГЦ.
- Пресметнахме ККГ за $\mathfrak{gl}(m|n)$, съответстващи на тензорното произведение $V([\mu]^r) \otimes V([1,0,\ldots,0])$, където $V([\mu]^r)$ е $\mathfrak{gl}(m|n)$ неприводимо ковариантно тензорно представяне, а $V([1,0,\ldots,0])$ е представянето на $\mathfrak{gl}(m|n)$ със старшо тегло $(1,0,\ldots,0)$.
- Мотивацията за тази математична работа беше предизвикателството да разгледаме комбинирана система от парабозони и парафермиони, т.е. парастатистическото пространство на Фок.

Парастатистическото пространство на Фок и безкрайномерни представяния на СЛ $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$

- система от парафермиони $F_j^{\pm}$ и парабозони $B_j^{\pm}$
- комутационни съотношения между параоператорите (Greenberg and Messiah) - четири типа - строго комутиращи, строго антикомутиращи, относително парабозонни и относително парафермионни релации.
- Palev - m парафермиона $F_j^{\pm}$ и n парабозона $B_j^{\pm}$ с относителни парафермионни релации генерират $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$
- **заключение:** парастатистическото пространство на Фок от ред p съответства на безкрайномерно неприводимо представяне на $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ и може да бъде построено прилагайки подобни техники, както за парабозоните и парафермионите: използвайки $\mathfrak{osp}(2m+1|2n) \supset \mathfrak{gl}(m|n)$, конструкцията за индуцирани модули, базис за ковариантните представяния на $\mathfrak{gl}(m|n)$, определени ККГ за $\mathfrak{gl}(m|n)$ и метода на редуцираните матрични елементи.

Парастатистическото пространство на Фок и безкрайномерни представяния на СЛ $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$

Релация от диагоналните действие в лявата страна на $\{c_r^-, c_r^+\}|\mu) = 2h_r|\mu)$, $r = m+n$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\left((1-\theta_{i,r-1})\prod_{j\neq i=1}^{m}\left(\frac{\mu_{ir}-\mu_{jr}-i+j+1}{\mu_{ir}-\mu_{j,r-1}-i+j}\right)\frac{\prod_{s=m+1}^{r-1}(\mu_{ir}+\mu_{s,r-1}+2m-i-s+1)}{\prod_{s=m+1}^{r}(\mu_{ir}+\mu_{sr}+2m-i-s+2)}G_i^2(\mu)\right)\\
&+\sum_{i=1}^{m}\left(\theta_{i,r-1}\prod_{j\neq i=1}^{m}\left(\frac{\mu_{ir}-\mu_{jr}-i+j}{\mu_{ir}-\mu_{j,r-1}-i+j-1}\right)\frac{\prod_{s=m+1}^{r-1}(\mu_{ir}+\mu_{s,r-1}+2m-i-s)}{\prod_{s=m+1}^{r}(\mu_{ir}+\mu_{sr}+2m-i-s+1)}G_i^2(\mu)_{-ir}\right)\\
&+\sum_{q=m+1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\mu_{jr}+\mu_{qr}+2m-j-q+1}{\mu_{j,r-1}+\mu_{q,r}+2m-j-q+2}\right)\frac{\prod_{s=m+1}^{r-1}(\mu_{qr}-\mu_{s,r-1}-q+s+1)}{\prod_{s\neq q=m+1}^{r}(\mu_{qr}-\mu_{sr}-q+s)}G_q^2(\mu)\right)\\
&+\sum_{q=m+1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\mu_{jr}+\mu_{qr}+2m-j-q}{\mu_{j,r-1}+\mu_{q,r}+2m-j-q+1}\right)\frac{\prod_{s=m+1}^{r-1}(\mu_{qr}-\mu_{s,r-1}-q+s)}{\prod_{s\neq q=m+1}^{r}(\mu_{qr}-\mu_{sr}-q+s-1)}G_q^2(\mu)_{-qr}\right)\\
&=p+2\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_{ir}-\sum_{i=1}^{r-1}\mu_{i,r-1}\right).
\end{aligned}
$$

Парастатистическото пространство на Фок и безкрайномерни представяния на СЛ $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$

Теорема

Характерът на неприводимото представяне $\mathfrak{V}(p)$ се дава с

$$\operatorname{char}\mathfrak{V}(p) = \mathbf{x}^{-p/2}\mathbf{y}^{p/2} \sum_{\lambda\in\mathcal{H},\ \lambda_1\leq p} s_\lambda(\mathbf{x}|\mathbf{y}),$$

където, $\mathbf{x}^{-p/2}\mathbf{y}^{p/2}$ е кратко означение за $(x_1)^{-p/2}\cdots(x_m)^{-p/2}(y_1)^{p/2}\cdots(y_n)^{p/2}$, и сумата е по всички разбивки λ, удовлетворяващи $(m|n)$-(hook) условие $(\lambda_{m+1}\leq n)$ и е с ширина по-малка или равна на p $(\lambda_1\leq p)$.

Вигнерови квантови системи

- Вигнерово квантуване (T.D. Palev, **J. Math. Phys. 23** 1778 (1982))
  Вигнерова квантова система (WQS) (A.H. Kamupingene, T.D. Palev and S.P. Tsaneva, **J. Math. Phys. 27**, 2067 (1986))
  Работа на Wigner (E.P. Wigner, **Phys. Rev. 77** 711 (1950)).
- ВКС-и - неканонични обобщени квантови системи; уравненията на Hamilton са еквивалентни на уравненията на Heisenberg (условия за съвместимост)
- Допълнителни свойства, валидни за всяка квантова система, също трябва да са изпълнени.

Вигнерови квантови системи

$$A^{\pm}_{\alpha k} = \sqrt{\frac{(3n-1)m\omega}{4\hbar}}\hat{R}_{\alpha k} \pm i\sqrt{\frac{(3n-1)}{4m\omega\hbar}}\hat{P}_{\alpha k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

$$\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}[\{A^{+}_{\beta j}, A^{-}_{\beta j}\}, A^{\pm}_{\alpha i}] = \mp(3n-1)A^{\pm}_{\alpha i}, \ i, j = 1, 2, 3, \ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n.$$

- $sl(1|3n)$ n-частичен 3-мерен квантов осцилатор като ВКС - крайномерно пространство на състоянията; еквидистантен спектър на енергията; некомутативни координати и импулси;
- $\mathfrak{osp}(3|2)$ ВКО - некомутативни координати и импулси; полуцял ъглов момент;
- линейна верижка от взаимодействащи със съседите хармонични осцилатори, като ВКС - крайномерно пространство на състоянията; еквидистантен спектър на енергията; некомутативни координати и импулси;

Нови крайномерни модели на едномерен осцилатор

- Две деформации на $\mathfrak{su}(2)$ модел на едномерен осцилатор, пространството на състоянията е $2j+1$-мерно.
- И в двата случая спектърът на оператора на координатата е дискретен.
- В случая на $\mathfrak{u}(2)_\alpha$ - е еквидистантен с изключение на скок по средата
- В случая на $\mathfrak{su}(2)_\alpha$ не е еквидистантен, но има прост вид $\pm\sqrt{k(k+2\alpha+1)}$ $(k=0,1,\ldots,j)$
- Вълновите функции на координатите и импулсите се дават в термини на полиноми на Hahn и при големи стойности на j напомнят парабозе вълновите функции; при $\alpha \to -\frac{1}{2}$ се дават в термини на полиноми Krawtchouk за $\mathfrak{su}(2)$ модела, а когато параметъра на деформация $\alpha \to -\frac{1}{2}$ и $j \to \infty$ те са вълнови функции на каноничен осцилатор (изразяват се чрез полиноми на Hermite).

Приноси

- Класификация на всички ОКС, съответстващи на базисните класически супералгебри на Ли.
- Построяване на всички алгебри с трилинейни релации ((super)ternary) за базисните класически супералгебри на Ли.
- Разкриване структурата на n-парабозонното пространство на Фок; въведен е ортогонален базис и е намерена трансформацията на базиса под действие на парабозонните оператори.
- Построен е клас от безкрайномерни неприводими представяния на СЛ $\mathfrak{osp}(1|2n)$; намерена е формула за характерите.
- Направено е пълно описание на унитарните неприводими представяния на $\mathfrak{so}(2n+1)$ със старшо тегло $(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}, \ldots, \frac{p}{2})$, които са пространства на Фок на n парафермиона, с p - ред на статистиката; въведен е базис и е намерена трансформацията на базиса под действие на генераторите

Приноси

- Построен е клас от неприводими представяния на АЛ $\mathfrak{so}(\infty)$ и Фоковските представяния от ред p за безкрайно множество от парафермиони.
- Построен е клас от неприводими представяния на СЛ $\mathfrak{osp}(1|\infty)$ и Фоковските представяния от ред p за безкрайно множество от парабозони.
- Намерено е действието на генераторите на Chevalley за СЛ $\mathfrak{gl}(m|n)$ за класа от ковариантни тензорни представяния, като е въведен подходящ базис на ГЦ. Пресметнати са ККГ, съответстващи на тензорното произведение на $\mathfrak{gl}(m|n)$ неприводимо ковариантно представяне с $\mathfrak{gl}(m|n)$ представяне със старшо тегло $(1, 0, \ldots, 0)$.

Приноси

- Построено е парастатистическото пространство на Фок за m парафермиона и n парабозона с относителни парафермионни релации, което съответства на клас от безкрайномерни неприводими представяния на СЛ $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$. Намерена е елегантна формула за характерите на тези представяния в термини на суперсиметрични функции на Schur.
- Примери на ВКО-и са разгледани, съответстващи на СЛ $\mathfrak{sl}(1|3n)$ and $\mathfrak{osp}(3|2)$ с интересни физически свойства.
- Изследвана е линейна верижка от взаимодействащи хармонични осцилатори като ВКС.
- Построени са два нови модела на крайномерни осцилатора, съответстващи на деформираните алгебри $\mathfrak{u}(2)_\alpha$ и $\mathfrak{su}(2)_\alpha$.
- Построени са всички крайномерни неприводими представяния на СЛ $\mathfrak{gl}(1|n)$ в базис на ГЦ.