N. N.
22.10.13
-1-

Квантова теория на полето и елементарните частици:
Допълнение към Лекция 3

Николай М. Николов

Ляво и дясно действие на група

Този текст е по същество една дискусия върху означения.

Нека припомним, че понятието група аксиоматизира структурата получена от всяка съвкупност G от трансформации (изображения) на едно множество M в себе си, които са

- взаимно-еднозначни и обратими;
- затвореност спрямо композиция: $g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_1 \circ g_2 \in G$;
- съдържа се тъждественото изображение: $1 \equiv id \in G$;
- съдържат се обратните трансформации: $g \in G \Rightarrow g^{-1} \in G$.

Така, понятието за група е в основата на описанието на всяка симетрия във физиката, като в тези случаи се говори за група на симетрия.

Абстрактното понятие за група: това е множество G снабдено с дву-местна операция $g_1 \cdot g_2 \in G$ $(g_1, g_2 \in G)$ наречена произведение (групово произведение) и отбелязан елемент $\hat{1} \in G$ наречен единица на групата, така че следните условия са изпълнени:

- асоциативност: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$: $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$;
- единица: $\forall g \in G$: $g \cdot \hat{1} = \hat{1} \cdot g = g$;
- обратимост: $\forall g \in G \; \exists h \in G$: $g \cdot h = h \cdot g = \hat{1}$

Непосредствено се показва, че елемента h по-горе е единствен и това определя едноместна операция: $g \longmapsto g^{-1} := h$.

N. N.

22.10.13

Когато елементите на една абстрактна група G се реализират като трансформации на едно множество M в себе си, казваме че групата G действа върху множеството M. По-подробно, с това се предполага, че е зададено съответствие

за $\forall g \in G : g \longmapsto \pi_g$, където $\pi_g : M \xrightarrow{\simeq} M$ (биекция)*

така, че:

- $\forall g_1, g_2 \in G : \quad \pi_{g_1 \cdot g_2} = \pi_{g_1} \circ \pi_{g_2}$;
- $\forall g \in G : \quad \pi_{g^{-1}} = (\pi_g)^{-1}$;
- $\pi_{\hat{1}} = \hat{1}$ (където в дясно $\hat{1}$ означава $id : M \xrightarrow{\simeq} M$).

В това понятие виждаме ролята на левия стил при функционалните записи в математиката "$f(x)$": например, при композиция $f_1 \circ f_2$ от дясно стои първото приложено изображение f_2, а отляво е второто приложено изображение. По тази причина понятието за действие на група върху множество, което въведохме по-горе се нарича "ляво действие" (действащата функция стои в ляво).

---

* терминология:

биекция (bijection) = взаимно-еднозначно и обратимо изображение = 1-1 изображение

инекция (injection) = във всяка точка от образа се изобразява не повече от един елемент

сюрекция (surjection) = изображе "върху"

N. N.
22.10.13

Дясно действие на група G върху множество M отново се задава със съответствие:

за $\forall g \in G : g \mapsto \Pi_g$, където $\Pi_g : M \xrightarrow{\simeq} M$ (биекция)*

за което $\Pi_{g^{-1}} = (\Pi_g)^{-1}$ и $\Pi_{\hat{1}} = \hat{1}$, но в този случай редът на произведението се обръща: $\Pi_{g_1 \cdot g_2} = \Pi_{g_2} \circ \Pi_{g_1}$.

Ако сменим обаче означението:

$$\Pi_g(x) =: (x)^g \qquad (x \in M,\ g \in G)$$

то ще имаме:

$$(x)^{g_1 \cdot g_2} \equiv \Pi_{g_1 \cdot g_2}(x) = \Pi_{g_2}\left(\Pi_{g_1}(x)\right) = \left((x)^{g_1}\right)^{g_2},$$

т.е. редът на произведението и действието ще съвпаднат.

Както е добре известно двете понятия, ляво и дясно действие, са еквивалентни, тъй като замяната

$$g \mapsto g^{-1}$$

превръща лявото в дясно и обратното. Това е така защото:

$$(g_1 \cdot g_2)^{-1} = g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}.$$

N. N.
22.10.13

Типичен пример за дясно действие е действието, което се индуцира върху множеството от функции

$$\mathbb{R}^M := \{ f \mid f : M \to \mathbb{R} \}$$

над множество M, върху което група G действа от ляво. Тогава

$$f \longmapsto (f)^g := f \circ \pi_g$$

задава именно дясно действие, което за да се превърне в ляво трябва да се положи

$$f \longmapsto f \circ \pi_{g^{-1}}$$

Ако запишем лявото действие върху M в същия "степенен" стил:

$$\pi_g(x) := {}^g(x) \qquad (x \in M, g \in G).$$

то съгласуваността с действието върху функции изглежда максимално естествено:

$$f^g(x) = f({}^g x) \qquad (x \in M, g \in G)$$

(където сме изпуснали скобите: $f^g \equiv (f)^g$ и ${}^g x \equiv {}^g(x)$).

Още едно алтернативно означение за действие е то да се "възприема като нов тип умножение":

$$f^g =: f \cdot g \quad , \quad \text{а} \quad {}^g x =: g \cdot x$$

така, че горната съгласуваност става:

$$(f \cdot g)(x) = f(g \cdot x)$$

N. N.
22.10.13

Забележете, че при последния, мултипликативен, запис на действието, закона за композицията

$$\pi_{g_1 \cdot g_2}(x) = \pi_{g_1}\left(\pi_{g_2}(x)\right)$$

приема вид на асоциативност:

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot x = \pi_{g_1 \cdot g_2}(x) = \pi_{g_1}\left(\pi_{g_2}(x)\right) = g_1 \cdot (g_2 \cdot x).$$

Това е и причината да се гледа на действието, като на нов тип "произведение": $G \times M \longrightarrow M$.

<u>Забележка</u>. Друга ситуация, с взаимно дуални ляво и дясно действие, възниква в линейната алгебра, когато действието на една линейна трансформация се задава или директно върху векторите като линеен оператор, или върху координатните системи. Тези две алтернативи се наричат съответно, активни и пасивни трансформации.

Дилемата "ляв или десен" избор на действие се проявява особено отчетливо при избора на водещо описание на квантовите трансформации: картината на Шрьодингер или тази на Хайзенберг. Наистина, при избор на ляво действие върху състоянията

$$\phi \longmapsto T\phi$$

в картината на Шрьодингер, то полученото еквивалентно действие върху наблюдаеми в картината на Хайзенберг се оказа:

$$A \longmapsto T^{-1} A T,$$

което е дясно действие, тъй като

$$(\text{действие на } T_1) \circ (\text{действие на } T_2) \text{ върху } A$$
$$= T_1^{-1}(T_2^{-1} A T_2) T_1 = (T_2 T_1)^{-1} A (T_2 T_1)$$
$$= (\text{действие на } T_2 T_1) \text{ върху } A.$$

За горния избор: ляво действие върху състояния и дясно – върху наблюдаеми способства означението

$\langle A \rangle_\omega$ – за средна стойност на A в ω

Тогава

$$\langle A \rangle_{g \cdot \omega} = \langle A \cdot g \rangle_\omega$$

картина на Шрьодингер　　　　картина на Хайзенберг

Напротив, означението $\omega(A)$ за средната стойност се "вписва" добре в противоположния избор:

$$(\omega \cdot g)(A) = \omega(g \cdot A)$$

В крайна сметка предпочитанието между ляво или дясно действие не влияе върху теорията, а носи единствено естетичен характер за означенията. Наличието обаче на взаимно дуални картини налага да се отделя внимание при преход между тях, като се отчитат възможни промени във формулите, които са от типа: $g \to g^{-1}$.