Квантова теория на полето и елементарните частици
Николай М. Николов

В син цвят е поставен допълния текс спрямо предходната версия.

Лекция 1, 22.10.2020

Основен подход към КТП ще бъде операторния подход
Операторния (или също алгебричен) подход към квантовата физика е базиран на завършващия труд на Дирак: "Основи на квантовата механика"
Там той описва физичните наблюдаеми, като "q-числа" (квантови числа), които могат да се умножават некомутативно, $a \bullet b \neq b \bullet a$, но асоциативно

$$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$$

На съвременен език: наблюдаемите пораждат "асоциативна алгебра"

1. Алгебри

Алгебра е векторно пространство V снабдено с една (понякога и повече) бинарна операция

$$\bullet : V \times V \to V$$

което е билинейна (дистрибутивна):

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \bullet (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2)$$
$$= \alpha_1\beta_1(a_1 \bullet b_1) + \alpha_1\beta_2(a_1 \bullet b_2) + \alpha_2\beta_1(a_2 \bullet b_1) +$$
$$+ \alpha_2\beta_2(a_2 \bullet b_2)$$

където $a_1, a_2, b_1, b_2 \in V$, а $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ са числа.

Числовото поле $\mathbb{K}$ над което е векторното пространство V може да бъде $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ – реални алгебри
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ – комплексни алгебри

Други няма да срещаме в този курс.

Допълнително, операцията изпълнява тъждества, които отделят типове алгебри

1) Асоциативни алгебри

$$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c \qquad (Asoc)$$

2) Комутативни алгебри

$$a \bullet b = + b \bullet a \qquad (\mathrm{Com})$$

3) Антикомутативни алгебри

$$a \bullet b = - b \bullet a \qquad (\mathrm{ACom})$$

4) Възможна е комбинация:
(анти)комутативни, асоциативни алгебри

5) Примери

5а) $\mathcal{A} = \mathbb{K}$ – основното числово поле само по себе си е едномерна асоциативна алгебра над $\mathbb{K}$.

5б) $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ е асоциативната алгебра на $n \times n$ квадратни матрици с коефициенти в поле $\mathbb{K}$. Умножението е матричното умножение, което е некомутативно.

Можем да обобщим този пример до $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A})$, където $\mathcal{A}$ е произволна, вече построена, асоциативна алгебра. В този случай коефициентите на матриците ще бъдат от $\mathcal{A}$ и при матричното умножение коефициентите трябва да се умножават в същия ред.

<u>Упражнение извън курса:</u> що за асоциативна алгебра е $\mathrm{Mat}_n(\mathrm{Mat}_m(\mathbb{K}))$?

5в) Ако $x_1, \dots, x_n$ са формални променливи, то $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ е комутативната и асоциативна алгебра на полиноми на променливите $x_1, \dots, x_n$ с коефициенти в $\mathbb{K}$. Законът за умножение е:

$$(\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x^n + \alpha_{11} x_1^2 + \dots)$$
$$\bullet (\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x^n + \beta_{11} x_1^2 + \dots)$$
$$:= \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0) x_1 + \dots$$

Изразът "формални променливи" означава, че те не е задължително да се остойностяват. Сумите им са също формални и могат да се разглеждат като "запетайки" в нареден лист от числа – коефициентите:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x^n + \alpha_{11} x_1^2 + \dots$$
$$\leftrightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{11}, \dots),$$ при което

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{11}, \dots)$$
$$\bullet (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{11}, \dots)$$
$$= (\alpha_0\beta_0, \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0, \dots, \alpha_0\beta_n + \beta_n\alpha_0,$$
$$\alpha_0\beta_{11} + \alpha_1\beta_1 + \alpha_{11}\beta_0, \dots)$$

В горния пример всеки нареден списък

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{11}, \dots)$$

е краен, но лесно се вижда че закона за умножение има алгебричен смисъл и при безкрайни списъци: всеки коефициент се получава с краен брой алгебрични операции. Така достигаме до понятието за формални степенни редове:

$$\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$$

от променливите $x_1, \dots, x_n$ с коефициенти в $\mathbb{K}$. Получаваме отново комутативна и асоциативна алгебра.

Следващи обобщения: променливите могат да са безкраен брой; коефициентите вместо в $\mathbb{K}$ може да са в произволна асоциативна алгебра $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A}[x_1, \dots, x_n, \dots], \quad \mathcal{A}[[x_1, \dots, x_n, \dots]]$$

Ако $\mathcal{A}$ не е комутативна, то и горните две няма да са, но ще бъдат асоциативни.

5г) Ако Ω е множество, то

$$\mathrm{Func}_{\mathbb{K}}(\Omega) := \mathbb{K}^{\Omega} := \{ f \mid f : \Omega \to \mathbb{K} \}$$

с поточково умножение

$$(f \bullet g)(\omega) := f(\omega) \cdot g(\omega)$$

е комутативна и асоциативна алгебра

Може да обобщим:

$$\mathrm{Func}_{\mathcal{A}}(\Omega) := \mathcal{A}^{\Omega} := \{ f \mid f : \Omega \to \mathcal{A} \}$$

$$(f \bullet g)(\omega) := f(\omega) \bullet g(\omega)$$

където $\mathcal{A}$ е асоциативна алгебра.

Упражнение извън курса: що за асоциативна алгебра е $\mathrm{Func}_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})}(\{1, \dots, m\})$

5е) Нека V е линейно пространство

$$\mathrm{Hom}(V) := \{ A : V \to V \mid A \text{ е линейно} \}$$

е асоциативна, но некомутативна алгебра (освен, ако $\dim V = 1$).

$$(A + B)(v) := A(v) + B(v) \quad \text{(поточково)}$$

$$(A \bullet B)(v) := A(B(v)) \quad \text{(композиция)}$$

5) Алгебри на Ли: в тях операцията се означава като скобка

$$[\ ,\ ] : V \times V \to V$$

антикомутативна е и изпълнява т.нар. тъждество на Якоби (Jacobi identity).

$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0 \qquad (\text{Jacobi})$$

$$\left(\Longleftrightarrow \quad [a,[b,c]] = [[a,b],c] + [b,[a,c]] \right)$$

Забележка: $ad_a : V \to V : b \mapsto [a,b] =: ad_a b$

То $ad_a [b,c] = [ad_a b, c] + [b, ad_a c] \qquad (\text{Leibniz})$

– казваме, че ad_a е диференциране на операцията, а горното тъждество (Leibniz) се нарича тъждество на Лайбниц.

<u>Твърдение 1</u> Ако $(\mathcal{A}, \bullet)$ е асоциативна алгебра, то

$$[a, b] := a \bullet b - b \bullet a \qquad \text{(комутатор)}$$

е скобка на Ли в $\mathcal{A}$.

<u>Доказателство:</u> Непосредствено се проверява (Jacobi).

6) Алгебри на Поасон (Poisson)

Това са алгебри с две бинарни операции:

- едната е асоциативно и комутативно умножение $\bullet$,
- другата е скобка на Ли $\{ , \}$.

Има и допълнително тъждество: скобката на Ли е диференциране за умножението.

$$\{a, b \bullet c\} = \{a, b\} \bullet c + b \bullet \{a, c\}$$

$$\left(\Rightarrow \{a \bullet b, c\} = \{a, c\} \bullet b + a \bullet \{b, c\} \right)$$

7) Алгебри на Йордан / Jordan

- комутативни, но в общия случай неасоциативни алгебри, такива че

$$(a \bullet b) \bullet (a \bullet a) = a \bullet (b \bullet (a \bullet a)) \qquad \text{(Jordan)}$$

Твърдение 2. Ако $(\mathcal{A}, \bullet)$ е асоциативна алгебра, то

$$a \circ b := \frac{1}{2}(a \bullet b + b \bullet a) \equiv \frac{1}{2}\left((a+b)^2 - a^2 - b^2\right)$$

където $c^2 := c \bullet c$ за $\forall c \in \mathcal{A}$, е произведение на Йордан.

Доказателство: Непосредствено се проверява (Jordan).

Теорема. Нека $(\mathcal{A}, \circ)$ е обща, неасоциативна алгебра такава, че за $\forall a \in \mathcal{A}$ степените

$$a^n := a \circ a^{n-1} = a \circ (a \circ (\cdots \circ (a \circ a)))$$

изпълняват асоциативния закон:

$$a^n \circ (a^m \circ a^l) = (a^n \circ a^m) \circ a^l$$

Тогава $(\mathcal{A}, \circ)$ е алгебра на Йордан.

Доказателство [...]

Забележка. Йордановите алгебри, които могат да се реализират в асоциативни алгебри по Твърдение 2 (като подалгебр) се наричат специални (special Jordan algebras). При известни общи, допълнителни предположения се оказва, че има единствена (с точност до изоморфизъм и проста) алгебра на Йордан, която не е специална. Тя се нарича изключителна алгебра на Йордан (exceptional Jordan algebra) и е 27 мерна, реална алгебра.

2. Подалгебри, фактор-алгебри, идеали, морфизми

а) <u>Означение</u> Нека $W_1, W_2 \subseteq V$ са линейни подпространства и $\bullet$ е бинарна операция в V, полагаме:

$$W_1 \bullet W_2 := \{ w_1 \bullet w_2 \mid w_1 \in W_1 ,\ w_2 \in W_2 \}$$

В частност, $W_1 + W_2 := \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 ,\ w_2 \in W_2 \}$

б) W е подалгебра на $(V, \bullet)$, ако е линейно подпространство такова, че $W \bullet W \subseteq W$. Тогава W е и алгебра спрямо $\bullet$ от същия тип като $(V, \bullet)$.

в) Линейното подпространство $W \subseteq V$ на алгебра $(V, \bullet)$ е:

- ляв идеал на V, ако: $W \bullet V \subseteq W$
- десен идеал на V, ако: $V \bullet W \subseteq W$
- двустранен идеал на V (или просто идеал), ако е и ляв и десен.

г) Припомняме понятието за фактор-линейно пространство

$$V/W := \{ \underbrace{v + W}_{\{v + w \mid w \in W\}} \mid v \in V \}$$

Операции: $\alpha_1(v_1+W)+\alpha_2(v_2+W)$

$$= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \underbrace{\alpha_1 W + \alpha_2 W}_{\subseteq W \text{ - понеже } W \text{ е линейно}}$$

Полагаме $\alpha_1(v_1+W)+\alpha_2(v_2+W) := \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + W$

Това превръща V/W в линейно пространство –

факторпространство / factor space, quotient space

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$$

<u>Твърдение</u> Ако $L \subseteq V$ е пряко допълнение на W в V, т.е.

$$V = L \oplus W$$

то $L \cong V/W : \ell \mapsto \ell + W$ е линеен изоморфизъм.

д) Фактор алгебри

<u>Твърдение</u> Ако $(V,\bullet)$ е алгебра, а W е (двустранен) идеал, тогава фактор-пространството V/W има структура на алгебра спрямо умножението

$$(v_1+W)\bullet(v_2+W) = v_1 \bullet v_2 + W$$

Забележете: $(v_1 + W) \bullet (v_2 + W)$

$$= v_1 \bullet v_2 + \underbrace{v_1 \bullet W + W \bullet v_2 + W \bullet W}_{\subseteq W \text{ - понеже } W \text{ е идеал}}$$