Квантова теория на полето и елементарните частици
Николай М. Николов

Лекция 2, 29.10.2020

0. Допълнение към миналата лекция – алгебри с константи – най-често това е единица

$$1 \bullet v = v = v \bullet 1 \quad \forall a \in V$$

Забележка: а) Може да се говори и за само лява, или само дясна единица.

б) Има алгебри и без единици:
- всички финитни функции върху $\mathbb{R}^N$ $\equiv$ всички функции, които се анулират извън някакво ограничено множество (понеже константната функция 1 не е финитна).
- всички строго горно-триъгълни матрици затварят подалгебра на матричната алгебра без 1.

1. Продължаваме с морфизми на алгебри

Най-общо морфизъм на алгебри V_1, V_2 е линейно изображение, $\alpha : V_1 \longrightarrow V_2$, което запазва операциите

$$\alpha(v_1 \bullet v_2) = \alpha(v_1) \bullet \alpha(v_2)$$

и ако типът на алгебрата включва константи, то и те се запазват

$$\alpha(1_{V_1}) = 1_{V_2}$$

Понякога морфизмите на алгебрични структури ги наричат <u>хомо</u>морфизми

Специални видове морфизми:

- изоморфизми / isomorphism $\Longleftrightarrow$ α е биекция / bijection

  Тогава и α^{-1} е морфизъм $\qquad \alpha : V_1 \xrightarrow{\cong} V_2$

- мономорфизъм / monomorphism $\equiv$ инективен морфизъм injective

$\Longleftrightarrow$ α е инекция / injection $\qquad \alpha : V_1 \rightarrowtail V_2$

- епиморфизъм / epimorphism $\equiv$ сюрективен морфизъм surjective

$\Longleftrightarrow$ α е сюрекция / surjection $\qquad \alpha : V_1 \twoheadrightarrow V_2$

Теореми за моно и епиморфизмите

а) Нека $(V, \bullet)$ е алгебра и $\alpha : W \rightarrowtail V$ е мономорфизъм.
Тогава $\alpha(W) = \{ \alpha(w) \mid w \in W \}$ е подалгебра на V
и $\exists!$ морфизъм $\tilde{\alpha} : W \to \alpha(W)$, за който

диаграмата
$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\tilde{\alpha}"'] & & V \\
\alpha(W) \arrow[urr, hook] & &
\end{tikzcd}$$
е комутативна

При това $\tilde{\alpha}$ е изоморфизъм.

б) Нека $\beta : V \twoheadrightarrow L$ е сюрективен морфизъм и нека
$$W := \ker \beta := \{ v \in V \mid \alpha(v) = 0 \}$$
Тогава W е идеал на V и $\exists!$ морфизъм $\tilde{\beta} : V/_W \to L$

за който диаграмата
$$\begin{tikzcd}
 & L \\
V \arrow[ur, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
 & V/_W \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$
е комутативна.

При това $\tilde{\beta}$ е изоморфизъм.