N. N.
10.12.13
-1-

Квантова теория на полето и елементарните частици

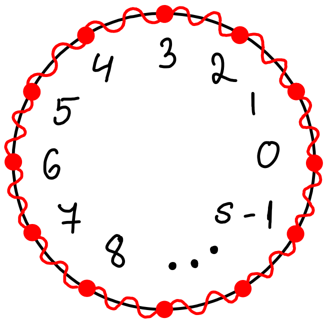
Допълнение към Лекция 6

Трептящ кристален пръстен.
Дискретни модели на квантови полета и непрекъсната граница

Николай М. Николов

I. Модел на трептящ кристален пръстен

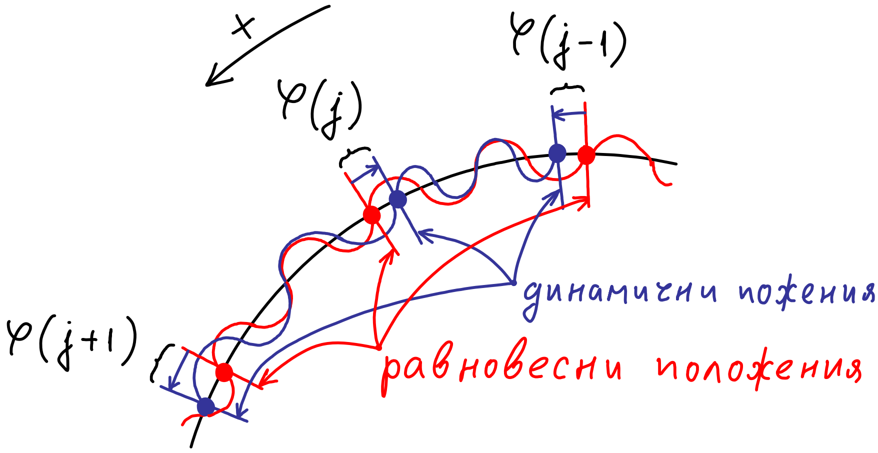
I.1. Класическо описание



s на брой еднакви малки топчета (материални точки) са нанизани на пръстен, върху който могат да се движат без триене. Всеки две съседни топчета са съединени с еднакви идеално еластични пружини. Задачата е да се опише динамиката.

I.1.a. Конфигурационно пространство.

Фиксираме s еквидистантни позиции върху пръстена (окръжността). В тези позиции топчетата не изпитват сили (т.е. са в равновесие), тъй като разтяганията на пружините от двете им страни са еднакви.

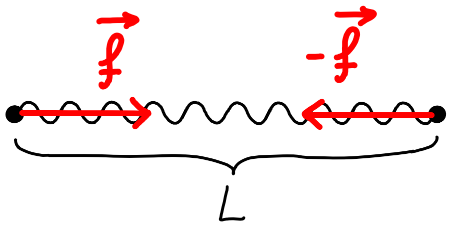


Нека $\varphi(j)$ е дължината на дъгата от окръжността между равновесната позиция на j-тото точке (за $j = 0, \dots, s-1$) и неговата текуща, динамична позиция, отчитана с положителен знак при отклонение обратно на часовниковата стрелка. Закона за движение на системата се задава от функциите:

$$\varphi(j,t), \quad j = 0, \dots, s-1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

I.1.8. Динамика

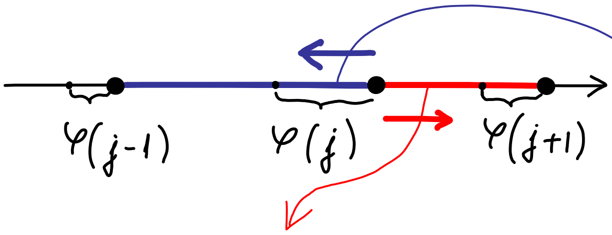
Еластичната сила в случая на идеално еластична пружина по определение е с големина, която е право пропорционална на дължината на пружината, а посоката на силата е противоположна на разтягането.



$$f = \varkappa \cdot L,$$

където коефициента на пропорционалност $\varkappa$ се нарича коефициент на еластичност.

Нека λ е дължината на всяка една от пружините в равновесно положение (т.е., $\lambda = (\text{дължината на окръжността})/s$). Тогава силите, които действат на j-то точице са следните:



$$\underbrace{\varkappa\Big(\underbrace{\lambda-\varphi(j)+\varphi(j+1)}_{\text{дължина на дясната пружина}}\Big)}_{\text{сила от дясно: действа в положителна посока}} - \underbrace{\varkappa\Big(\underbrace{\lambda-\varphi(j-1)+\varphi(j)}_{\text{дължина на лявата пружина}}\Big)}_{\text{сила от ляво: действа в отрицателна посока}}$$

Така, по втория закон на Нютон:

$$m\,\ddot{\varphi}(j) = \varkappa\big(\lambda-\varphi(j)+\varphi(j+1)\big) - \varkappa\big(\lambda-\varphi(j-1)+\varphi(j)\big),$$

където m е масата на всяко едно от точицата и също:

$$\frac{d}{dt}\,\varphi(j,t) =: \dot{\varphi}(j,t) \equiv \dot{\varphi}(j)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \varphi(j,t) =: \ddot{\varphi}(j,t) \equiv \ddot{\varphi}(j)$$

(по някой път в точка **I.1.** ще подразбираме времето t без да го пишем за краткост). И така, уравненията за движение са

$$\left|\begin{array}{l} m\,\ddot{\varphi}(j,t) = -\varkappa\big(2\varphi(j,t)-\varphi(j+1,t)+\varphi(j-1,t)\big), \\ \hfill j = 0,\dots,s-1. \end{array}\right.$$

Основната ни задача е да намерим такава линейна смяна

$$\tilde{\varphi}(k,t) = \sum_{j=0}^{s-1} F_{k,j}\,\varphi(j,t)$$

така, че $\ddot{\tilde{\varphi}}(k,t) = -\omega(k)^2\,\tilde{\varphi}(k,t)\,,\quad k = 0,\dots,s-1.$

Тоест, имаме задача за диагонализация, или по-точно, за привеждане в нормална форма на система от линейни обикновени диференциални уравнения.

I.1.в. Дискретна Фурие трансформация

В нашия модел има транслационна симетрия: ако $\varphi(j,t)$ е решение, то и:

$$\varphi(\,j+r \bmod s\,,\,t\,)$$

е решение на динамичните уравнения, където $j+r \bmod s \in \{0,\dots,s-1\}$ е остатъкът на $j+r$ при делене на s, а r е цяло число. Във всички динамични задачи за диагонализация във физика с подобна транслационна симетрия (дискретна или непрекъсната) имаме една универсална диагонализираща трансформация, която е Фурие-трансформацията (Fourier transformation), чийто дискретен аналог срещаме тук.

Нека $\xi_s := e^{\frac{2\pi i}{s}} = \bar{\xi}_s^{\,-1}$ е примитивен s-ти корен на единицата, $\xi_s^s = 1$, и да въведем $s\times s$ - матрицата:

$$F = \left(F_{j,k}\right)_{j,k=1}^{s}\,,\quad F_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\xi_s^{kj} = \frac{1}{\sqrt{s}}\,e^{2\pi i\,\frac{kj}{s}}.$$

<u>Свойства:</u> $F^{-1} = F^* = \overline{F}$, $F^4 = \hat{1}$, където $\overline{F} = (\overline{F}_{j,k})_{j,k=1}^{s}$ е комплексно спрегнатата матрица, а $F^* = (\overline{F}_{k,j})_{j,k=1}^{s}$ е ермитово спрегнатата матрица.

Изводът – за упражнение – да се използва:

$$\sum_{j=0}^{s-1} \xi_s^{k\cdot j}\, \xi_s^{\ell\cdot j} = \sum_{j=0}^{s-1} \left(\xi_s^{k+\ell}\right)^j = \frac{\xi_s^{(k+\ell)r} - 1}{\xi_s^{k+\ell} - 1} = 0,$$

но ако $k+\ell \neq 0$. Иначе $= s$. $\square$

Матрицата F задава линейна трансформация във векторното пространство на всички s-периодични комплексни редици

$$\{(\varphi(j))_{j\in\mathbb{Z}} \mid \varphi(j+s) = \varphi(j)\ \forall j\} \cong \mathbb{C}^s,$$

$$\varphi(j) \longmapsto (F\varphi)(k) \equiv \tilde{\varphi}(k) := \sum_{j=0}^{s-1} F_{k,j}\, \varphi(j).$$

$$\Longrightarrow \quad \tilde{\varphi}(k+s) = \tilde{\varphi}(k).$$

<u>Свойства.</u> Нека $\varphi(j)$ и $\psi(j)$ са s-периодични редици.

(a) $\varphi(j) \in \mathbb{R}\ \forall j \iff \overline{\tilde{\varphi}(k)} = \tilde{\varphi}(-k)$.

По-общо, ако $\psi(j) := \overline{\varphi(j)}$, то $\tilde{\psi}(j) = \overline{\tilde{\varphi}(-k)}$.

(б) Ако $(\varphi\psi)(j) := \varphi(j)\psi(j)$, то

$$\widetilde{\varphi\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{\ell=0}^{s-1} \widetilde{\varphi}(k-\ell)\,\widetilde{\psi}(\ell).$$

По-общо:

$$\widetilde{(\varphi_1 \cdots \varphi_n)}(k) = s^{-\frac{n}{2}} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n \in \{0,\dots,s-1\} \\ k_1+\dots+k_n = k \bmod s}} \widetilde{\varphi}(k_1) \cdots \widetilde{\varphi}(k_n),$$

където $\varphi(j_1),\dots,\varphi(j_n)$ са s-периодични редици.

(в) Ако $\psi(j) := \varphi(j+1) - \varphi(j)$ („дискретна производна"),

$$\widetilde{\psi}(k) = \left(\xi_s^k - 1\right)\widetilde{\varphi}(k).$$

(г) Ако $\psi(j) := \varphi(j+\ell)$ (транслация), то

$$\widetilde{\psi}(k) = \xi_s^{\ell \cdot k}\,\widetilde{\varphi}(k).$$

(д) Дискретна формула на Планшерел:

$$\sum_{j=0}^{s-1} \overline{\varphi(j)}\,\psi(j) = \sum_{k=0}^{s-1} \overline{\widetilde{\varphi}(k)}\,\widetilde{\psi}(k).$$

Доказателство – непосредствена проверка. $\square$

Обръщаме внимание на свойства (в) и (г), съгласно които операциите на транслация и дискретни производни се диагонализират след извършване на Фурие трансформация.

I.1.г. Нормални честоти и моди на трептене (normal frequeces and modes)

С помощта на Фурие трансформацията

$$\tilde{\varphi}(k,t) = \sum_{j=1}^{s} F_{k,j}\, \varphi(j,t)$$

уравненията за движение

$$\left| \; m\,\ddot{\varphi}(j,t) = -\varkappa\left(2\varphi(j,t) - \varphi(j+1,t) + \varphi(j-1,t)\right), \quad j = 0,\dots,s-1 \right.$$

се диагонализират:

$$\left| \; \ddot{\tilde{\varphi}}(k,t) = -\,\omega(k)^2\, \tilde{\varphi}(k,t), \quad k = 0,\dots,s-1. \right.$$

За честотите $\omega(k)$, които се наричат нормални честоти, получаваме

$$m\,\ddot{\tilde{\varphi}}(k) = s^{-1/2} \sum_{j=0}^{s-1} \xi_s^{jk}\, m\,\ddot{\varphi}(j)$$

$$= s^{-1/2} \sum_{j=0}^{s-1} \xi_s^{jk} (-\varkappa)\left(2\varphi(j) - \varphi(j+1) - \varphi(j-1)\right)$$

$$= -\varkappa\, \underbrace{s^{-1/2} \sum_{j=0}^{s-1} \left(2\xi_s^{jk} - \xi_s^{(j-1)k} - \xi_s^{(j+1)k}\right) \varphi(j)}_{s^{-1/2} \sum_{j=0}^{s-1} \xi_s^{jk} \left(2 - \xi_s^{-k} - \xi_s^{k}\right)}$$

(за което можехме да използваме и Свойство (г) по-горе);

$$\Longrightarrow \quad m\ddot{\tilde{\varphi}}(k) = -\varkappa \underbrace{\left(2-\xi_s^{k}-\xi_s^{-k}\right)} \tilde{\varphi}(k)$$

$$2\left(1-\frac{e^{2\pi i \frac{k}{s}}+e^{-2\pi i\frac{k}{s}}}{2}\right) = 2\left(1-\cos\frac{2\pi k}{s}\right)$$

$$= 8\sin^2\frac{\pi k}{s}$$

$$\omega(k) = 2\left|\sin\frac{\pi k}{s}\right|\sqrt{\frac{2\varkappa}{m}} = \omega(-k).$$

Числото $k=0,1,\dots,s-1$ се нарича вълново число. Така, за всяко вълново число k имаме едно реално базисно решение или също, две комплексно спрегнати:

$$\tilde{\varphi}_k(k',t) = A(k)\,\delta_{k,k'}\,e^{i\omega(k)t},$$

$$\tilde{\varphi}_k(k',t)^* = A(k)^*\,\delta_{k,k'}\,e^{-i\omega(k)t} \qquad (k\neq 0 \mod s),$$

$$\tilde{\varphi}_0(k',t) = A(0)\,t + B(0).$$

Тези решения се наричат нормални моди или просто моди (modes) на системата. Модата с вълново число $k\,(\neq 0)$ отговаря на хармонично трептене с кръгова честота $\omega(k)$ и следователно, период на трептене $\dfrac{2\pi}{\omega(k)}$ (нарича се кръгова честота понеже е $= 2\pi\cdot$ самата честота).

Както виждаме, случаят $k=0$ е специален, понеже $\omega(0)=0$. Това отговаря на свободно въртене на пръстена, без трептения.

I.1.д. Енергия и скобки на Поасон

До тук развихме динамиката съгласно Нютоновата механика. В този модел, както и в много други модели, силите са потенциални. Тоест, уравненията за движение имат вида:

$$\ddot{\varphi}(j,t) = \frac{\partial V}{\partial q_j}\left(\varphi(0,t),\ldots,\varphi(s-1,t)\right),$$

където

$$V(q_0,\ldots,q_{s-1}) = \frac{\varkappa}{2}\left((q_0-q_1)^2+\cdots+(q_{s-2}-q_{s-1})^2+(q_{s-1}-q_0)^2\right)$$

и се нарича потенциална енергия. Тогава съответстващите Лагранжиан и Хамилтониан, които пораждат горните уравнения за движение са:

$$L = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{m}{2}\dot{\varphi}(j)^2 - V\left(\varphi(0),\ldots,\varphi(s-1)\right),$$

$$H = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{m}{2}\dot{\varphi}(j)^2 + V\left(\varphi(0),\ldots,\varphi(s-1)\right).$$

Ако направим Фурие трансформация

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{j=0}^{s-1}\xi_s^{kj}\varphi(j), \quad \tilde{\dot{\varphi}}(k) = \frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{j=0}^{s-1}\xi_s^{kj}\dot{\varphi}(j)$$

ще получим, съгласно свойствата от I.1.в:

$$\sum_{j=0}^{s-1}\frac{m}{2}\dot{\varphi}(j)^2 = \sum_{j=0}^{s-1}\frac{m}{2}\left|\dot{\varphi}(j)\right|^2 = \frac{m}{2}\sum_{k=0}^{s-1}\left|\tilde{\dot{\varphi}}(k)\right|^2,$$

$$V\left(\varphi(0),\ldots,\varphi(s-1)\right)=\frac{\varkappa}{2}\sum_{j=0}^{s-1}\Psi(j)^2=\frac{\varkappa}{2}\sum_{j=0}^{s-1}|\Psi(j)|^2$$

$$=\frac{\varkappa}{2}\sum_{k=0}^{s-1}|\tilde{\Psi}(k)|^2=\frac{\varkappa}{2}\sum_{k=0}^{s-1}|\xi_s^k-1|^2\,|\tilde{\varphi}(k)|^2$$

$$=\frac{\varkappa}{2}\sum_{k=0}^{s-1}\left(2-\xi_s^k-\xi_s^{-k}\right)|\tilde{\varphi}(k)|^2=\frac{m}{2}\sum_{k=0}^{s-1}\omega(k)^2\,|\tilde{\varphi}(k)|^2.$$

$$\Longrightarrow\qquad L=\frac{m}{2}\sum_{k=0}^{s-1}\left(|\dot{\tilde{\varphi}}(k)|^2-\omega(k)^2\,|\tilde{\varphi}(k)|^2\right),$$

$$H=\frac{m}{2}\sum_{k=0}^{s-1}\left(|\dot{\tilde{\varphi}}(k)|^2+\omega(k)^2\,|\tilde{\varphi}(k)|^2\right).$$

Енергия (т.е. Хамилтонианът) за решение, което е сума (суперпозиция) на нормални моди с амплитуди $A(k)$, т.е., $\tilde{\varphi}(k,t)=A(k)\,e^{i\omega(k)t}$ е равна на:

$$H=\sum_{k=0}^{s-1}E(k)\,,\qquad E(k)=m\,\omega(k)^2\,|A(k)|^2,$$

т.е., модата на трептене с вълново число k носи енергия $E(k)$.

От вида на Лагранжиана, $L=\sum_{j=0}^{s-1}\frac{m}{2}\dot{\varphi}(j)^2-V$ следва, че канонично спрегнатия импулс на $\varphi(j)$ е $m\dot{\varphi}(j)$ и следователно:

$$\{m\dot{\varphi}(j_1),\varphi(j_2)\}=\delta_{j_1,j_2}\equiv\delta_{j_1-j_2,0}\,,$$

$$\{\varphi(j_1),\varphi(j_2)\}=0=\{\dot{\varphi}(j_1),\dot{\varphi}(j_2)\},$$

където за удобство сме предефинирали

$$\delta_{j_1, j_2} := \begin{cases} 1 & \text{ако } j_1 = j_2 \bmod s, \\ 0 & \text{ако } j_1 \neq j_2 \bmod s; \end{cases} \qquad (\delta - \bmod s)$$

тази конвенция ще следваме навсякъде в точка I.

След Фурие трансформация:

$$\{m\dot{\tilde{\varphi}}(k_1), \tilde{\varphi}(k_2)\} = \delta_{k_1, -k_2} \equiv \delta_{k_1+k_2, 0},$$

$$\{\tilde{\varphi}(k_1), \tilde{\varphi}(k_2)\} = 0 = \{\dot{\tilde{\varphi}}(k_1), \dot{\tilde{\varphi}}(k_2)\},$$

понеже

$$\sum_{j_1=0}^{s-1} \sum_{j_2=0}^{s-1} F_{k_1, j_1} F_{k_2, j_2} \delta_{j_1, j_2} = \delta_{k_1, -k_2}.$$

Да потърсим подходяща смяна на динамичните променливи, която при квантуване да въведе операторите на раждане и унищожаване:

$$a(k) = \alpha(k)\,\tilde{\varphi}(k) + \beta(k)\,\dot{\tilde{\varphi}}(k),$$

$$a(k)^* = \overline{\alpha(k)}\,\tilde{\varphi}(-k) + \overline{\beta(k)}\,\dot{\tilde{\varphi}}(-k),$$

за подходящо избрани комплексни коефициенти $\alpha(k)$ и $\beta(k)$.

Условия:

- $\{a(k_1), a(k_2)^*\} = \delta_{k_1, k_2}$, $\{a(k_1), a(k_2)\} = 0 = \{a(k_1)^*, a(k_2)^*\}$
- $H = \sum_{k=0}^{s-1} \varepsilon(k)\, a(k)^* a(k)$.

$$\Longrightarrow \quad \overline{\alpha(k)}\,\beta(k) - \alpha(k)\,\overline{\beta(k)} = i\,m\,,$$

$$\overline{\alpha(k)}\,\beta(k) + \alpha(-k)\,\overline{\beta(-k)} = 0\,,$$

$$\varepsilon(k)\,|\alpha(k)|^2 = \frac{m}{2}\,\omega(k)^2$$

$$\varepsilon(k)\,|\beta(k)|^2 = \frac{m}{2}$$

Едно решение: $\varepsilon(k) = \omega(k)$, $\alpha(k) = \sqrt{\frac{m\,\omega(k)}{2}}$, $\beta(k) = i\sqrt{\frac{m}{2\,\omega(k)}}$,

$$\Longrightarrow \quad a(k) = \sqrt{\frac{m\,\omega(k)}{2}}\,\tilde{\varphi}(k) + i\sqrt{\frac{m}{2\,\omega(k)}}\;\dot{\tilde{\varphi}}(k)\,,$$

$$a(k)^* = \sqrt{\frac{m\,\omega(k)}{2}}\,\tilde{\varphi}(-k) - i\sqrt{\frac{m}{2\,\omega(k)}}\;\dot{\tilde{\varphi}}(-k)\,,$$

$$H = \sum_{k=0}^{s-1} \omega(k)\;a(k)^*\,a(k)\,.$$

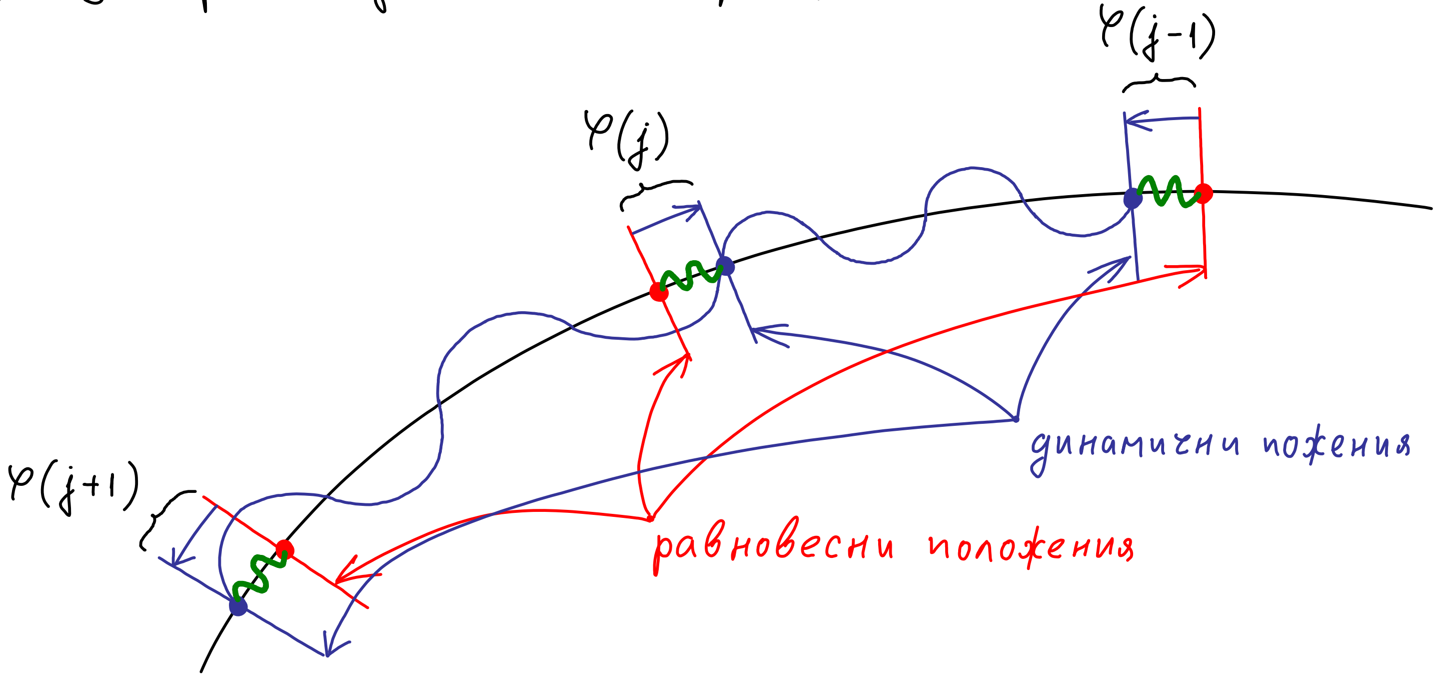
Размерностите:

$[\![a(k)]\!] = [\![a(k)^*]\!]$, $[\![a(k)^*\,a(k)]\!]$ = размерност на действие
$\equiv$ енергия · време.

I.1.e. Стабилизация и нелинейности

Нашият модел е идеализиран в много отношения. Например, при големи амплитуди на трептение (т.е., големи максимални отклонения на координатите $\varphi(j)$) точчетата се счита, че могат да преминават едно през друго, като прозрачни. В реалността това не се случва, понеже ние работим в приближение на малки отклонения от равновесното положение, където е в сила приближението на идеално еластична пружина. При големи амплитуди на трептене отклоненията от закона за идеално еластичната сила води до нелинейност в динамиката, както общо обяснихме в Лекция 4.

Освен това, моделът няма и стабилна равновесна точка, понеже има нулеви честоти, $\omega(0) = 0$. За да се убие тази нестабилност може да се въведат допълнителни сили, които да удържат всяко точче към равновесното му положение. Например, свързваме точчета към равновесните центрове с допълнителни идеално еластични пружинки с един и същи коефициент на еластичност μ (един и същ – за да запазим транслационната симетрия).



Втория закон на Нютон:

$$m\ddot{\varphi}(j) = \varkappa\big(\lambda - \varphi(j) + \varphi(j+1)\big) - \varkappa\big(\lambda - \varphi(j-1) + \varphi(j)\big) - \mu\varphi(j), \text{ т.е.,}$$

$$m\ddot{\varphi}(j,t) = -\varkappa\big(2\varphi(j,t) - \varphi(j+1,t) + \varphi(j-1,t)\big) - \mu\varphi(j,t),$$
$$j = 0,\dots,s-1.$$

След Фурие трансформация $\tilde{\varphi}(k,t) = \sum_{j=0}^{s-1} F_{k,j}\,\varphi(j,t)$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{\tilde{\varphi}}(k,t) = -\omega(k)^2\,\tilde{\varphi}(k,t), \quad k = 0,\dots,s-1,$$

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{8\varkappa}{m}\sin^2\frac{\pi k}{s} + \frac{\mu}{m}} = \omega(-k).$$

Лагранжианът и Хамилтонианът получават адитивни добавки, съответно $-V_\mu$ и $+V_\mu$, където:

$$V_\mu := \sum_{j=0}^{s-1}\frac{\mu}{2}\varphi(j)^2 = \sum_{j=0}^{s-1}\frac{\mu}{2}|\varphi(j)|^2 = \frac{\mu}{2}\sum_{k=0}^{s-1}|\tilde{\varphi}(k)|^2.$$

В крайна сметка, отново $H = \sum_{k=0}^{s-1}\omega(k)\,a(k)^* a(k)$,

$$a(k) = \sqrt{\frac{m\,\omega(k)}{2}}\,\tilde{\varphi}(k) + i\sqrt{\frac{m}{2\omega(k)}}\,\dot{\tilde{\varphi}}(k),$$

$$a(k)^* = \sqrt{\frac{m\,\omega(k)}{2}}\,\tilde{\varphi}(-k) - i\sqrt{\frac{m}{2\omega(k)}}\,\dot{\tilde{\varphi}}(-k),$$

и $\{a(k_1), a(k_2)^*\} = \delta_{k_1,k_2}$, $\{a(k_1), a(k_2)\} = 0 = \{a(k_1)^*, a(k_2)^*\}$, с единствената разлика, че $\omega(k)$ се дава от горната формула, в която участва и μ.

Нека обобщим модела с по-общи сили,
за силата между j-тото и $(j+1)$-то точце:

$$\varkappa\left(\lambda-\varphi(j)+\varphi(j+1)\right) \longmapsto f\left(\lambda-\varphi(j)+\varphi(j+1)\right),$$

за силата между j-тото точце и равновесния му център:

$$\mu\,\varphi(j) \longmapsto f_1(\varphi(j)).$$

Предположили сме, че силите от всеки един от горните два вида са еднотипни и не зависят от j (освен чрез индексите на аргументите си $\varphi(j)$ и т.н.), т.е., запазваме транслационната симетрия по j. Ще предположим и огледална симетрия (т.е., симетрия спрямо отражение), което е равносилно на това, че f и f_1 са нечетни функции:

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{и} \quad f_1(-x) = -f_1(x).$$

Тогава за малки $\varphi(j)$:

$$f\left(\lambda-\varphi(j)+\varphi(j+1)\right) =$$

$$= f(\lambda) + \underbrace{f'(\lambda)}_{-\varkappa}\left(-\varphi(j)+\varphi(j+1)\right) + O\left(-\varphi(j)+\varphi(j+1)\right)^2,$$

$$f_1(\varphi(j)) = \underbrace{f_1'(0)}_{-\mu}\,\varphi(j) + \frac{1}{3!}\underbrace{f_1'''(0)}_{-\gamma}\,\varphi(j)^3 + O\left(\varphi(j)^4\right),$$

където $f'(x) := \dfrac{df}{dx}(x)$, $f_1'''(x) := \dfrac{d^3 f_1}{(dx)^3}(x)$, и сме развили $f(x)$ около λ само до първи порядък, $f_1(x)$ около 0 до първите два ненулеви порядъка.

Физическата мотивация е, че $\lambda \gg |\varphi(j)|$ за $\forall j$ и затова линейната апроксимация на f е достатъчна. Уравненията за движение стават:

$$m\ddot{\varphi}(j) = -\varkappa\big(2\varphi(j) - \varphi(j+1) + \varphi(j-1)\big) - \mu\varphi(j) - \frac{\gamma}{3!}\varphi(j)^3, \qquad j = 0, \dots, s-1.$$

$$H = H_0 + \frac{\gamma}{4!}\sum_{j=0}^{s-1}\varphi(j)^4, \qquad H_0 = \sum_{k=0}^{s-1}\omega(k)\,a(k)^* a(k),$$

където за $\omega(k)$, $a(k)$ и $a(k)^*$ важат формулите от стр. 14.

В частност,

$$\widetilde{\varphi}(k) = \sqrt{\frac{m}{2\omega(k)}}\,\big(a(k) + a(-k)^*\big),$$

което участва в частта с нелинейност в H,

$$\sum_{j=0}^{s-1}\varphi(j)^4 = \sum_{\substack{k_1,\dots,k_4 \in \{0,\dots,s-1\} \\ k_1+\dots+k_4 = 0 \bmod s}} \widetilde{\varphi}(k_1)\cdots\widetilde{\varphi}(k_4).$$

I. 2. Квантов модел

I. 2. a. Квантуване на линейния модел

Да "раздадем шапки" на въведените физични величини $\varphi(j)$, $\tilde{\varphi}(k)$, $a(k)$, $a(k)^*$ и H_0, т.е. да ги превърнем в оператори в Хилбертово пространство:

$$a(k) \longrightarrow \hbar^{-1/2}\,\hat{a}(k)\,, \quad a(k)^* \longrightarrow \hbar^{-1/2}\,\hat{a}(k)^*$$

- така, $\hat{a}(k)$ и $\hat{a}(k)^*$ са безразмерни оператори;

$$[\,\hat{a}(k_1), \hat{a}(k_2)^*\,] = \delta_{k_1,k_2}\,,$$

$$H_0 = \sum_{k=0}^{s-1} \omega(k)\, a(k)^* a(k) \longrightarrow \hat{H}_0 = \sum_{k=0}^{s-1} \hbar\,\omega(k)\,\hat{a}(k)^*\,\hat{a}(k)\,,$$

$$\hat{\tilde{\varphi}}(k) = \sqrt{\frac{m\hbar}{2\,\omega(k)}}\,\left(\hat{a}(k) + \hat{a}(-k)^*\right),$$

$$\hat{\tilde{\varphi}}(k,t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\,\hat{\tilde{\varphi}}(k)\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} \quad \text{(Хайзенбергова еволюция)},$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\,\hat{a}(k)\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} = \hat{a}(k)\,e^{-i\omega(k)t}\,,$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\,\hat{a}(k)^*\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} = \hat{a}(k)^*\,e^{i\omega(k)t}\,,$$

$$\hat{\varphi}(j) = s^{-1/2} \sum_{k=0}^{s-1} \xi_s^{-j\cdot k}\,\hat{\tilde{\varphi}}(k)\,,$$

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{8\varkappa}{m}\sin^2\frac{\pi k}{s} + \frac{\mu}{m}} = \omega(-k)\,.$$

I.2.б. Квантуване на нелинейния модел: постулат за нормално произведение

При преход от операторите $\hat{\varphi}(j)$ и $\dot{\hat{\varphi}}(j)$ към $\hat{a}(k)$ и $\hat{a}(k)^*$ възниква несъответствие между класическите и квантовите изрази. Това е в следствие на нееднозначността в операторната наредба. Постулираме: квантува се Хамилтонианът, записан чрез операторите $\hat{a}(k)$ и $\hat{a}(k)^*$ подредени в нормални произведения. Така,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{I}\ , \quad \text{където } \hat{H}_0 \text{ е съгласно точка I.2.а.,}$$

$$\hat{I} = \frac{\gamma}{4!} \sum_{k_1,\dots,k_4=0}^{s-1} \delta_{k_1+\dots+k_4,0}\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{нормално произведение}}}{N} \left(\prod_{r=1}^{4} \left(\hat{b}(k_r) + \hat{b}(-k_r)^* \right) \right),$$

$$\hat{b}(k) := \sqrt{\frac{m\hbar}{2\omega(k)}}\ \hat{a}(k)\ , \qquad \hat{b}(k)^* := \sqrt{\frac{m\hbar}{2\omega(k)}}\ \hat{a}(k)^*.$$

Можем да запишем $\hat{I} = \frac{\gamma}{4!}\left(\hat{I}_{0,4} + \hat{I}_{1,3} + \hat{I}_{2,2} + \hat{I}_{3,1} + \hat{I}_{4,0}\right)$,

$$\hat{I}_{u,v} := \sum_{\substack{k_1,\dots,k_u=0 \\ k'_1,\dots,k'_v=0}}^{s-1} \delta_{k_{in},k_{out}}\ \hat{b}(k_1)^* \cdots \hat{b}(k_u)^*\, \hat{b}(k'_1) \cdots \hat{b}(k'_v),$$

$$k_{in} := k'_1 + \dots + k'_v\ , \quad k_{out} := k_1 + \dots + k_u\ .$$

$\delta_{k_{in},k_{out}}$ изразява дискретния аналог на закона за запазване на импулса (вълновото число), $k_{in} = k_{out} \mod s$.

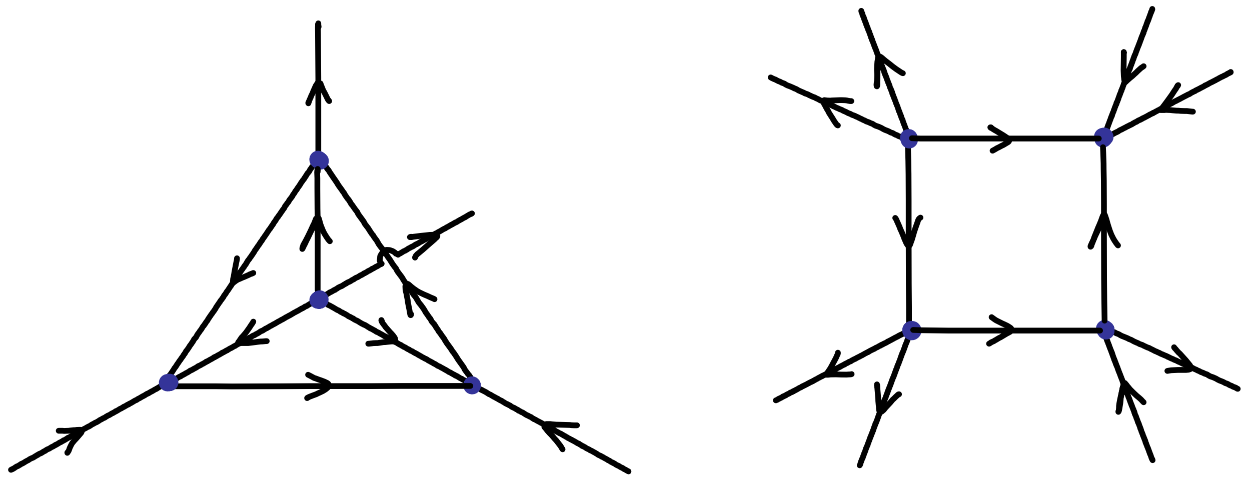
I.2.в. Теория на пертурбациите за $\mathcal{S}$-матрицата

$$\mathcal{S} = \lim_{\substack{t_1 \to \infty \\ t_2 \to -\infty}} \mathcal{S}(t_1, t_2),$$

$$\mathcal{S}(t_1,t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{i^n}{\hbar^n} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \; T\left(\hat{I}(\tau_1) \cdots \hat{I}(\tau_n)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{i^n}{\hbar^n} \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}_n} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \sum_{\xi \in \Xi_\Gamma} G(\Gamma)(\tau_1, \ldots, \tau_n ; \xi) \cdot A(\Gamma)(\tau_1, \ldots, \tau_n ; \xi),$$

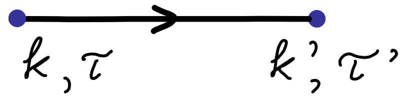
където $\mathcal{T}_n$ е множеството на всички декорирани, ориентирани графи с n на брой 4-валентни върха, например, за $n=4$:



+ надписване.

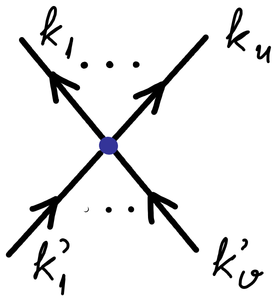
Факта, че имаме само 4-валентни върхове е в следствие на типа на базисните членове $\hat{I}_{u,v}$ участващи в $\hat{I}$ с $u+v=4$.

Правилата на Файнман:



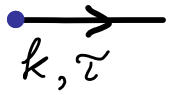
$$\longmapsto \quad G(k,\tau;k',\tau')$$

$$:= \delta_{k,k'} \frac{m\hbar}{2\omega(k)} \left(e^{-i\omega(k)(\tau-\tau')}\,\theta(\tau-\tau') + e^{-i\omega(k)(\tau'-\tau)}\,\theta(\tau'-\tau) \right),$$



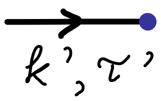
$$\longmapsto \quad g\,\delta_{k_{in},k_{out}}$$

$$\left(k_{in} := k'_1 + \dots + k'_v\,, \quad k_{out} := k_1 + \dots + k_u \right),$$



$$\longmapsto \quad e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0\tau}\,\hat{b}(k)^*\,e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0\tau}$$

$$= \sqrt{\frac{m\hbar}{2\omega(k)}}\;\hat{a}(k)^*\,e^{-i\omega(k)\tau}$$



$$\longmapsto \quad e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0\tau'}\,\hat{b}(k')\,e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0\tau'}$$

$$= \sqrt{\frac{m\hbar}{2\omega(k')}}\;\hat{a}(k')\,e^{i\omega(k')\tau'}$$

I.2.г. Нееднозначност в операторната подредба и пренормировки

Нека се откажем от постулата за нормална подредба и да положим

$$\hat{a}(k) = \rho(k)\,\hat{a}_{ren}(k) + \sigma(k)\,\hat{a}_{ren}(k)^*,$$
$$\hat{a}(k)^* = \overline{\rho(k)}\,\hat{a}_{ren}(k)^* + \overline{\sigma(k)}\,\hat{a}_{ren}(k),$$

за подходящо подбрани комплексни коефициенти $\rho(k)$, $\sigma(k)$ така, че след заместване в

$$\hat{H} := \frac{m}{2}\sum_{j=0}^{s-1}\dot{\hat{\varphi}}(j)^2 + \frac{\varkappa}{2}\sum_{j=0}^{s-1}\left(\hat{\varphi}(j)-\hat{\varphi}(j+1)\right)^2$$
$$+\frac{\mu}{2}\sum_{j=0}^{s-1}\hat{\varphi}(j)^2 + \frac{\gamma}{4!}\sum_{j=0}^{s-1}\hat{\varphi}(j)^4$$

и привеждане в нормална форма спрямо $\hat{a}_{ren}(k)$ и $\hat{a}_{ren}(k)^*$ ние да получим вида на $\hat{H}$ от точка I.2.б., но с нови коефициенти $\omega_{ren}(k)$, γ_{ren}, m_{ren}, $\varkappa_{ren}$ и μ_{ren}.

Ние няма да правим тук този анализ, а само ще отбележим идеята, че нееднозначността в операторната подредба може да се интерпретира, като произвол в избора на параметрите на Хамилтониана. Смяната на параметрите се нарича пренормировка.

II. Непрекъсната граница

Да си припомним, че в модела на трептящ пръстен въведохме един физически параметър, който не сме използвали явно до сега: разстоянието λ между две съседни равновесни положения. Така,

$$\Lambda = s\lambda$$

е дължината на пръстена. Сега ще се поинтересуваме от два гранични процеса:

$$\lambda \to 0 \quad \text{и} \quad \Lambda \to \infty .$$

II.1. Класически случай

Нека $\varphi_{\Lambda,s}(j,t)$ е решение на

$$\begin{aligned} m_s \ddot{\varphi}_{\Lambda,s}(j,t) = -\varkappa_s \big(2\varphi_{\Lambda,s}(j,t) - \varphi_{\Lambda,s}(j+1,t) + \varphi_{\Lambda,s}(j-1,t)\big) \\ - \mu_s \varphi_{\Lambda,s}(j,t) - \frac{\gamma_s}{3!} \varphi_{\Lambda,s}(j,t)^3 , \quad j = 0, \dots, s-1 . \end{aligned}$$

Да положим: $\quad \phi_{\Lambda,s}(x,t) := \varphi_{\Lambda,s}\left(\frac{x}{\lambda}, t\right)$ за $x = j\lambda$

и нека изберем параметрите във вида

$$\varkappa_s := m_s \vartheta^2 \lambda^{-2} , \quad \mu_s = m_s \mu , \quad \gamma_s = m_s \gamma \quad \left(\lambda = \frac{\Lambda}{s}\right).$$

Тогава, ако при фиксирано Λ допуснем, че

$$s \to \infty \quad (\Longleftrightarrow \lambda = \Lambda s^{-1} \to 0)$$

$$\text{и} \quad \phi_{\Lambda,s}(x,t) \longrightarrow \phi_{\Lambda,\infty}(x,t)$$

за гладка функция $\phi_{\Lambda,s}(x,t)$, то тя ще удовлетворява уравнението

$$\left(v^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \mu\right)\phi_{\Lambda,\infty}(x,t) = \frac{\gamma}{3!}\phi_{\Lambda,\infty}(x,t)^3,$$

тъй като

$$\frac{-1}{\lambda^2}\left(2\phi_{\Lambda,s}(x,t) - \phi_{\Lambda,s}(x-\lambda,t) - \phi_{\Lambda,s}(x+\lambda,t)\right) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \frac{\partial^2\phi_{\Lambda,\infty}}{(\partial x)^2}(x,t).$$

s-периодичността преминава в Λ-периодичност:

$$\phi_{\Lambda,\infty}(x,t) = \phi_{\Lambda,\infty}(x+\Lambda,t).$$

Полученото частно диференциално уравнение при $\gamma = 0$ и $\mu = 0$ се нарича уравнение на Даламбер (D'Alembert) или още вълново уравнение, а ако само $\gamma = 0$, то се нарича уравнение на Клайн-Гордън (Klein-Gordon).

При фиксирано, крайно Λ, дискретната трансформация на Фурие преминава в развитие в ред на Фурие:

$$\phi_{\Lambda,\infty}(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}_{\Lambda,\infty}(k,t)\exp\left(i\frac{2\pi}{\Lambda}kx\right).$$

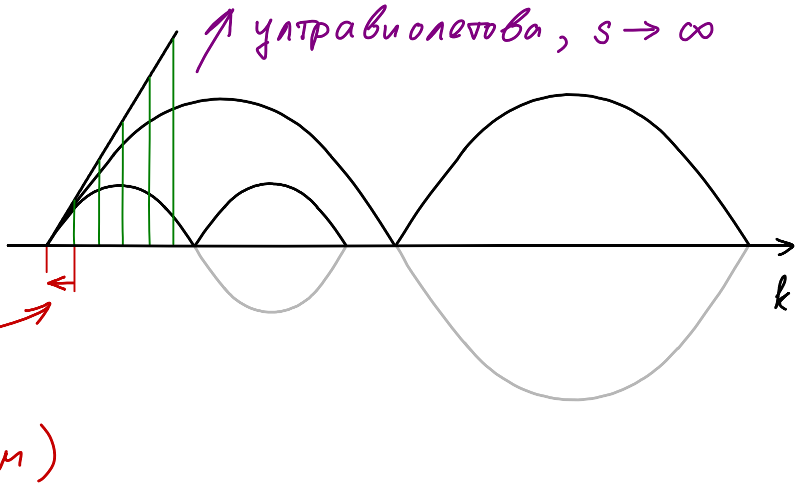
При прехода $s \to \infty$, нормалните честоти (при $\gamma = 0$ – без нелинейности) приемат вида:

$$\omega(k) =: \omega_{\Lambda,s}(k) \longrightarrow \omega_{\Lambda,\infty}(k) = \sqrt{v^2\left(\frac{2\pi k}{\Lambda}\right)^2 + \mu},$$

а при $\mu = 0$, те се линеаризират: $\omega_{\Lambda,\infty}(k) = \frac{2\pi v}{\Lambda}|k|$.

Граничният преход $s \to \infty$ за $\omega(k)$ е изобразен графично по-долу. При тази граница $\max \omega(k) \to \infty$, т.е. честотният диапазон клони към безкрайност и затова тази граница се нарича ултравиолетова (ултравиолет $\Longleftrightarrow$ къси вълни $\Longleftrightarrow$ високи честоти):

$$\omega_{\Lambda,\infty}(k) \sim |k|, \quad k \in \mathbb{Z}$$



При границата $\Lambda \to \infty$, която се нарича още граница на безкраен обем, минималния праг на честотите, $\frac{2\pi v}{\Lambda} \to 0$, затова тази граница носи името на срещуположния край на спектъра: инфрачервена граница.

II.2. Квантов случай

Изследването на условията и полаганията, при които съществува границата $\lambda \to 0$ и $\Lambda \to \infty$ в квантовите дискретни модели е предмет на Конструктивната Теория на Полето (Constructive Field Theory). Това е математически най-завършената част на К.Т.П. За съжаление обаче за модели включващи взаимодействие това е напълно постигнато единствено с едно или две пространствени измерения (без да броим времето).

Конкретно, ако означим с

$$\hat{\varphi}_{\Lambda,s}(j,t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,\hat{\varphi}_{\Lambda,s}(j)\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

пълната Хайзенбергова еволюция и положим

$$\hat{\phi}_{\Lambda,s}(x,t) := Z_{\Lambda,s}\cdot\hat{\varphi}_{\Lambda,s}\left(\frac{x}{\lambda},t\right) \quad \text{за} \quad x = j\lambda$$

за някакви коефициенти $Z_{\Lambda,s}$, то ние искаме да намерим такова полагане за параметрите на модела:

$$\varkappa = \varkappa(\Lambda,s),\quad m = m(\Lambda,s),\quad \mu = \mu(\Lambda,s) \quad \text{и} \quad g = g(\Lambda,s),$$

че да съществува границата на всички вакуумни средни:

$$\lim_{\substack{s\to\infty\\ \Lambda\to\infty}} \langle\Omega|\,\hat{\phi}_{\Lambda,s}(x_1,t_1)\cdots\hat{\phi}_{\Lambda,s}(x_N,t_N)\,\Omega\rangle$$

в определен смисъл на обобщени функции.

В последствие, по тези граници

$$\langle \Omega | \hat{\phi}(x_1, t_1) \cdots \hat{\phi}(x_N, t_N) \Omega \rangle$$

могат да се реконструират квантови полета $\hat{\phi}(x, t)$.

Физически по-просто условие е да съществува границата

$$\lim_{\substack{s \to \infty \\ \Lambda \to \infty}} S_{\Lambda, s}$$

за съответните оператори на разсейване, но това също изисква по-внимателно уточнение, тъй като $S_{\Lambda, s}$ действат в различни, неотъждествени канонично, Хилбертови пространства.