Причинна теория на пертурбациите (Causal Perturbation Theory)

Николай М. Николов

Съдържание

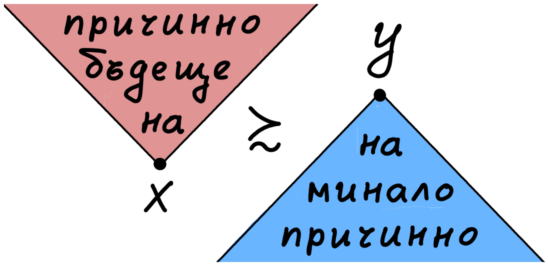
1. Релацията $\gtrsim$, хипер–повърхнини на Коши и причинно разбиване на пространство–времето

По определение, релацията $\gtrsim$ между две събития x и y в пространство–времето на Минковски е

$$\mathrm{x} \gtrsim \mathrm{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{y} \lesssim \mathrm{x} \quad \underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \mathrm{x} \not\preccurlyeq \mathrm{y}\,, \qquad (1.1)$$

където $\mathrm{x} \preccurlyeq \mathrm{y}$ ($\Leftrightarrow \mathrm{y} \succcurlyeq \mathrm{x}$) е релацията събитието x (събитието y) да лежи в причинното[1] минало (бъдеще) на y (на x), а $\mathrm{x} \not\preccurlyeq \mathrm{y}$ е отрицанието на $\mathrm{x} \preccurlyeq \mathrm{y}$. С думи $\mathrm{x} \gtrsim \mathrm{y}$ се изказва като: “x не е в миналото (и настоящето) на y, както е илюстрирано на долната фигура

[1]Обикновено в теория на относителността се говори само за минало или бъдеще. За по-голяма яснота понякога тук ще слагаме прилагателното “причинно” за да подчертаем, че е възможна и липса на причинна връзка между събития, когато понятията едновременност, бъдеще и минало стават относителни спрямо използваната отправна система.



Фигура 1: x не е в причинното минало на y $\Leftrightarrow$ y не е в причинното бъдеще на x

Да си припомним, че по определение две събития x и y са пространствено–подобни (или също, причинно несвързани), $x \sim y$, ако нито $x \succcurlyeq y$ нито $x \preccurlyeq y$ са изпълнени,

$$x \sim y \quad \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad x \not\preccurlyeq y \;\text{ и }\; y \not\preccurlyeq x\,. \tag{1.2}$$

Следователно,

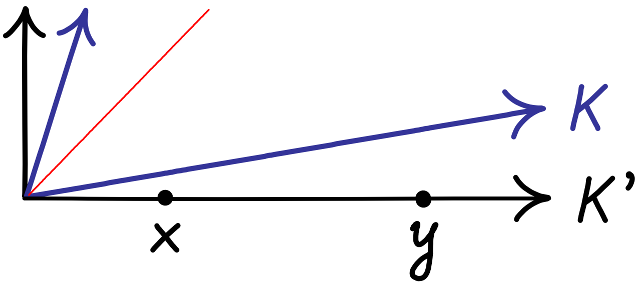
$$x \gtrsim y \quad \Longleftrightarrow \quad x \not\succcurlyeq y \;\text{ или }\; x \sim y\,, \tag{1.3}$$

което и обяснява избора на означението $\gtrsim$. Обръщаме внимание, че както релацията $\gtrsim$ така и $\sim$ не са *транзитивни*: от $x \gtrsim y$ и $y \gtrsim z$ не следва, че $x \gtrsim z$, както и от $x \sim y$ и $y \sim z$ не следва, че $x \sim z$.

Следват няколко основни геометрични твърдения, които ще наричаме “геометрични леми”.

Лема 1. *За две събития* x *и* y *е изпълнена релацията* $\mathrm{x} \gtrsim \mathrm{y}$ *тогава и само тогава, когато съществува инерциална отправна система, в която* $x^0 > y^0$ *(където* x^0 *и* y^0 *са времевите координати на събитията* x *и* y *в намерената инерциална отправна система).*

Доказателство. Нека най-напред $x^0 > y^0$ в някоя инерциална отправна система. Тогава x не може да бъде в (причинното) миналото на y, т.е., имаме $\mathrm{x} \not\preccurlyeq \mathrm{y}$. Обратно, нека $\mathrm{x} \gtrsim \mathrm{y}$. Съгласно (1.3) трябва да разгледаме два случая. Ако $\mathrm{x} \succneqq \mathrm{y}$, то във всяка инерциална отправна система ще е налице $x^0 > y^0$, според самото определение на релацията $\succcurlyeq$. Ако $\mathrm{x} \sim \mathrm{y}$, то $\mathrm{a} := \mathrm{y} - \mathrm{x}$ е пространствено–подобен вектор и следователно може да се избере като образуващ вектор на пространствено–подобна координатна ос на инерциална отправна система K'. Така, в K' събитията x и y са едновременни, а във всяка инерциална система , която се движи спрямо K' по посока на оста a ще се изпълнява $x^0 > y^0$, както е илюстрирано на следната фигура.

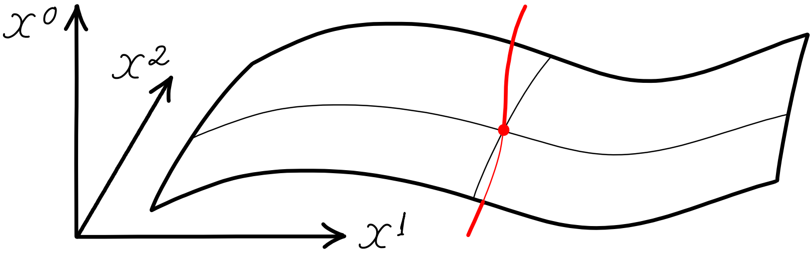


Фигура 2: Относителност на едновременността и нейното използване в доказателството на Лема 1 (червеният лъч е светлинен лъч, спрямо който координатните оси в двете отправни системи сключват равни ъгли).

Лема 1 може да се изкаже и по следния начин: *за всеки две събития* x *и* y *релацията* x $\gtrsim$ y *се изпълнява тогава и само тогава, когато те могат да се разделят от хипер–повърхнина на едновременост.* Нека да си припомним от специалната теория на относителността, че хипер–повърхнините с уравнения $x^0 = const$ задават, в дадена инерциална отправна система, понятието за едновременност относително тази отправна система. От друга страна, изборът на такова понятие за едновременност, дори и като относително понятие, няма физически смисъл и е въпрос на конвенция. Това което има пряк физически смисъл е въпроса, кои са тези пространствено–подобни хипер–повърхнини, които също както и повърхнините $x^0 = const$, мога да служат за задаване на начални условия, определящи напълно динамиката на една полева система. Този въпрос ни води към понятието *хипер–повърхнини на Коши* (Cauchy surfaces). В теорията на хиперболичните частни диференциални уравнения, които именно определят динамиката на полеви системи в специалната теория на относителността над пространството на Минковски,[2] е намерена една чисто геометрична характеризация на хипер–повърхнина на Коши. Това е такава пространствено–подобна хипер–повърхнина Σ, която има допълнителното свойство, че всяка време–подобна крива, която не може да се продължи до по-голяма време–подобна крива,

[2]а дори и по-общо над изкривени Лоренцови многообразия допускащи причинна структура

непременно пресича и то само веднъж Σ.

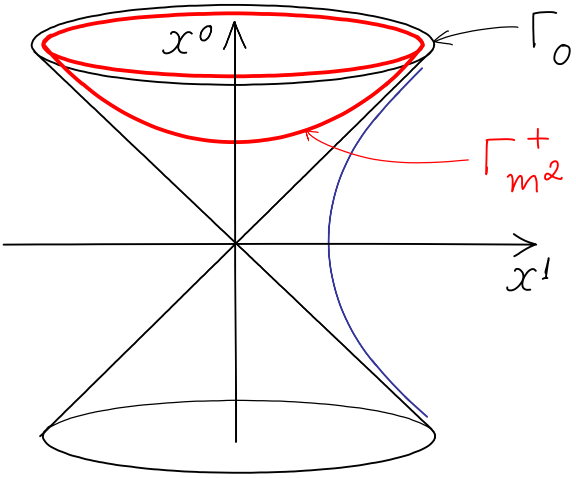


Фигура 3: Хипер–повърхнина на Коши и пресичаща я време–подобна крива

Така, хипер–равнините на едновременност, $x^0 = const$, са хипер–повърхнини на Коши. Непосредствено следствие от определението е, че допълнението $M\backslash\Sigma$ на една хипер–повърхнина на Коши Σ в пространство–времето се разбива на две свързани подмножества,

$$M\backslash\Sigma \,=\, \mathrm{Future}(\Sigma)\ \dot{\cup}\ \mathrm{Past}(\Sigma)$$
$$\mathrm{Future}(\Sigma) \gtrsim \mathrm{Past}(\Sigma)\,, \tag{1.4}$$

където сме разпространили релацията $X \gtrsim Y$ и за две множества от събития X и Y: в този случай ще изискваме за всяко събитие $\mathrm{x} \in X$ и за всяко събитие $\mathrm{y} \in Y$ да е в сила $\mathrm{x} \gtrsim \mathrm{y}$. Друго следствие от определението на хипер–повърхнина на Коши е, че всяка такава хипер–повърхнина е свързана и непродължаема пространствено–подобна хипер–повърхнина. Обратното обаче не е в сила, както е илюстрирано на фигурата по-долу.



Фигура 4: Не всяка пространствено–подобна хипер–повърхнина (даже и когато е непродължаема) е хипер–повърхнина на Коши. На илюстрацията $\Gamma^+_{m^2}$ е горния пространствено–подобен хиперболоид, задаван с уравнение $\mathrm{x}^2 \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = m^2$, $x^0 > 0$. Той не се пресича никога с време–подобната хипербола, която се задава с уравнението $(x^1)^2 - (x^0)^2 = a^2$, $x^1 > 0$ (това е мировата линия на релативистки равно–ускорен наблюдател с ускорение a).

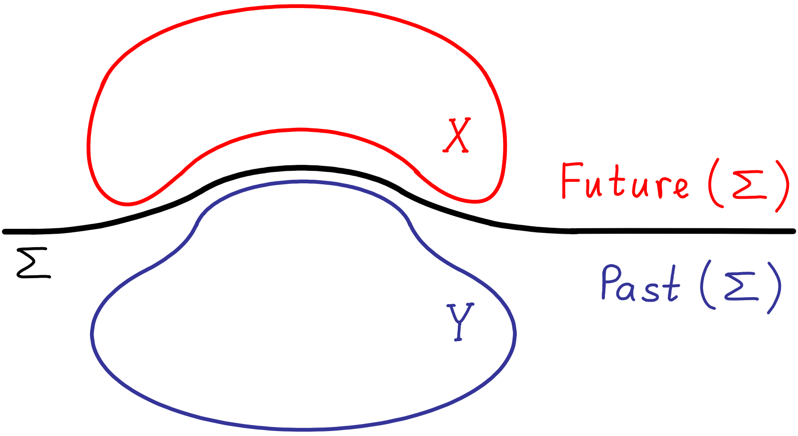
Лема 1 допуска известно обобщение за случая на множества.

Лема 2. *Нека X и Y са* компактни *подмножества*[3] *на пространство–времето. Релацията $X \gtrsim Y$ се изпълнява тогава и само тогава, когато съществува хипер–повърх-*

[3] В $\mathbb{R}^N$: компактно множество = затворено и ограничено множество.

нина на Коши Σ*, такава че*

$$X \subseteq Future(\Sigma) \quad \text{и} \quad Y \subseteq Past(\Sigma)\,. \qquad (1.5)$$



Фигура 5: Илюстрация на Лема 2: както се вижда от фигурата разделящата хипер–повърхнина на Коши Σ не винаги може да се избере като хипер–равнина, която има вида $x^0 = xonst$ в дадена инерциална отправна система.

Доказателството на Лема 2 е поставено в Приложение A.

Лема 3. (Основна геометрична лема) *Нека* $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ *са събития в пространство–времето, такива че поне две от тях са различни. Тогава съществува разбиване на множеството* $\{1, \ldots, n\}$ *на две непразни и непресичащи се подмножества:*

$$\{1, \ldots, n\} \qquad (1.6)$$

$$= \{r_1, \ldots, r_m\} \dot{\cup} \{s_1, \ldots, s_{n-m}\}$$

такива, че

$$\left\{\mathrm{x}_{r_1}, \ldots, \mathrm{x}_{r_m}\right\} \gtrsim \left\{\mathrm{x}_{s_1}, \ldots, \mathrm{x}_{s_{n-m}}\right\}. \qquad (1.7)$$

Доказателство. Нека $\mathrm{x}_r \neq \mathrm{x}_s$ за $r, s \in \{1, \ldots, n\}$. Съществува инерциална отправна система , в която $x_r^0 \neq x_s^0$. Действително, ако в дадена инерциална система се окаже, че x_r и x_s имат еднакви времеви координати, т.е., са едновременни, то ще следва, че $\mathrm{x}_r \sim \mathrm{x}_s$ и следователно $\mathrm{x}_r \gtrsim \mathrm{x}_s$. Съгласно Лема 1 тогава в определена инерциална отправна система ще имаме $x_r^0 > x_s^0$.

Без ограничение на общността ще считаме, че $x_r^0 > 0 \geqslant x_s^0$. Тогава полагаме $\{r_1, \ldots, r_m\}$ да бъде множеството от индекси $r' \in \{1, \ldots, n\}$, за които $x_{r'}^0 > 0$, а $\{s_1, \ldots, s_{n-m}\}$ да бъде множеството от индекси $s' \in \{1, \ldots, n\}$, за които $x_{s'}^0 \leqslant 0$. По построение получаваме нетривиално разбиване (1.6). Тъй като $x_{r'}^0 > x_{s'}^0$, за всеки $r' \in \{r_1, \ldots, r_m\}$ и $s' \in \{s_1, \ldots, s_{n-m}\}$, то съгласно

Лема 1 получаваме, че $\mathrm{x}_{r'} \gtrsim \mathrm{x}_{s'}$, т.е., изпълнено е (1.7).

2. Локална S-матрица и нейното развитие в теория на пертурбациите

Да припомним, че в един от основните постулати на релативистката квантова физика съпоставяме на всяка област O на пространство–времето M една асоциативна алгебра[4] $\mathfrak{A}(O)$ на наблюдаемите, които съответстват на измервания (експерименти) в тази област O. По такъв начин, всички координати на пространство–времето започват да играят роля на макроскопични параметри, които индексират наблюдаемите, а не само координатата на времето, както е в картината на Хайзенберг в нерелативистичната квантова физика. Съпоставянето $O \mapsto \mathfrak{A}(O)$ се подчинява на две главни аксиоматични условия:

$$O_1 \subseteq O_2 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A}(O_1) \subseteq \mathfrak{A}(O_2)\,, \qquad (2.1)$$

[4]буквата $\mathfrak{A}$ е готическо A

наречено *изотония* и условието *локалност*,[5]

$$O_1 \sim O_2 \quad \Rightarrow \quad \big[A_1\,,\,A_2\big] = 0\,, \tag{2.2}$$

за всеки $A_1 \in \mathfrak{A}(O_1)$ и $A_2 \in \mathfrak{A}(O_2)$. Математическата структурата, която се получава по този начин носи името *локална мрежа* (local net) от алгебри.

В тази точка ние ще предположим съществуването на специални унитарни елементи, които пораждат локалните алгебри $\mathfrak{A}(O)$. За целта си представяме физически, че локалните въздействия върху системата, с помощта на които правим измервания в една пространство–времева област O, отговарят на някакъв набор от външни полета

$$\underline{g}(\mathrm{x}) = \big(g_1(\mathrm{x}),\ldots,g_N(\mathrm{x})\big)\,. \tag{2.3}$$

За функциите $g_j(\mathrm{x})$ ще предполагаме, че са реално-значни[6] функции, които са равни на нула извън областта O, а в самата област O те отразяват "интензивността" на въздействието. Тези функции се наричат още функ-

[5] напомняме, че $O_1 \sim O_2$ означава, че всяка точка на O_1 е пространствено–подобна на всяка точка на O_2

[6] тоест функции, чийто стойности ("значения") са реални числа

ции на включване на взаимодействието, тъй като посредством тях могат да се добавят нови членове към действието на системата, които съответстват на допълнително взаимодействие. Така, считаме, че на всяка система от функции $\underline{g}(\mathrm{x})$ с *носител*[7] в O, е съпоставен унитарен елемент $S\{\underline{g}\} \in \mathfrak{A}(O)$, т.е.,

$$\operatorname{supp} \underline{g} \subseteq O \quad \Rightarrow \quad S\{\underline{g}\} \in \mathfrak{A}(O)\,, \\ S\{\underline{g}\}\, S\{\underline{g}\}^* = S\{\underline{g}\}^*\, S\{\underline{g}\} = \widehat{1}\,. \tag{2.4}$$

В теория на пертурбациите развиваме S, като функционал на $\underline{g}$, в ред по степените на $\underline{g}$:[8]

$$S\{\underline{g}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \times \int \sum_{j_1,\dots,j_n} T_{j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n) \times g_{j_1}(\mathrm{x}_1)\cdots g_{j_n}(\mathrm{x}_n)\, d^4x_1\cdots d^4x_n\,. \tag{2.5}$$

[7] Напомняме определението на носител на (векторно-значна) функция $\underline{g}(\mathrm{x})$: $\operatorname{supp} \underline{g} := \overline{\{\mathrm{x} \in M \mid \underline{g}(\mathrm{x}) \neq 0\}}$. С други думи, във всяка точка извън носителя си функцията се анулира в цяла околност на точката (и в частност, с всичките си производни).

[8] Редът (2.5) е фактически функционалното обобщение на реда на Тейлър.

По такъв начин коефициентните операторно-значни функции $T_{j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n)$ в горния ред могат да се получат като вариационни производни на S при $\underline{g} = 0$:[9]

$$\left.\frac{\delta^n S\{\underline{g}\}}{\delta g_{j_1}(\mathrm{x}_1)\cdots\delta g_{j_n}(\mathrm{x}_n)}\right|_{\underline{g}\,=\,0} = i^n T_{j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n)\,. \tag{2.6}$$

Операторно-значните функции[10] $T_{j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n)$ се наричат T*–произведения* или още *хронологични произведения* (time-ordered products). В строг математически смисъл T–произведения се явяват *операторно-значни обобщени функции*, подобно и на квантовите полета в аксиоматичния подход на Уайтман. В следствие на симетрията на вариационната производна (2.6) имаме,

$$T_{j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n) \tag{2.7}$$

[9] аналогично на коефициентите в един ред на Тейлър, които се дават с частните производни на функцията в точката около която се прави развитието

[10] тоест функции, чийто стойности са опоератори (в хилбертовото пространство на състоянията)

$$= T_{j_{\sigma(1)},\ldots,j_{\sigma(n)}}\big(\mathrm{x}_{\sigma(1)},\ldots,\mathrm{x}_{\sigma(n)}\big)$$

за всяка пермутация σ. Удобно е развитието (2.5) да се запише в съкратена форма

$$S\{\underline{g}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} T_{(n)}\{\,\underline{g},\ldots,\underline{g}\,\}\,, \tag{2.8}$$

където

$$\begin{aligned} & T_{(n)}\{\,\underline{g},\ldots,\underline{g}\,\} \\ & := \int \sum_{j_1,\ldots,j_n} T_{j_1,\ldots,j_n}\big(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n\big) \\ & \times\, g_{j_1}(\mathrm{x}_1)\cdots g_{j_n}(\mathrm{x}_n)\; d^4x_1\cdots d^4x_n\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Благодарение на симетрията (2.7) можем да *поляризираме* $T_{(n)}\{\,\underline{g},\,\ldots,\,\underline{g}\,\}$ до n–линеен (операторно-значен) фунционал[11]

$$\begin{aligned} & T_{(n)}\{\,\underline{g}_1,\ldots,\underline{g}_n\,\} \\ & := \int \sum_{j_1,\ldots,j_n} T_{j_1,\ldots,j_n}\big(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n\big) \\ & \times g_{1,j_1}(\mathrm{x}_1)\cdots g_{n,j_n}(\mathrm{x}_n)\, d^4x_1\cdots d^4x_n\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Например,

$$4\,T_{(2)}\{\,\underline{g},\underline{h}\,\} = T_{(2)}\{\,\underline{g}+\underline{h},\underline{g}+\underline{h}\,\}$$

[11]Именно този операторно-значен функционал $T_{(n)}$ и определя математически $T_{j_1,\ldots,j_n}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n)$, като обобщени операторно-значни функции.

$$- T_{(2)}\{\, \underline{g} - \underline{h}, \underline{g} - \underline{h} \,\} \,.$$

Ако положим за краткост $T_{(k)} := T_{(k)}\{\, \underline{g}, \dots, \underline{g} \,\}$ и $T^{*}_{(n-k)} := T_{(n-k)}\{\, \underline{g}, \dots, \underline{g} \,\}^{*}$, то условието за унитарност $S\{\underline{g}\}^{*} S\{\underline{g}\} = \widehat{1}$ от (2.4) ще ни даде следното равенство в n–тия порядък по $\underline{g}$ при $n > 0$:[12]

$$\begin{aligned} & T^{*}_{(n)} + (-1)^{n}\, T_{(n)} \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{k}\, T^{*}_{(n-k)}\, T_{(k)} = 0 \,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

От тук рекурентно може да изразим $T^{*}_{(n)}$ чрез $T_{(2)}, \dots, T_{(n)}$. Може да се покаже, че равенството $S\{\underline{g}\} \;\; S\{\underline{g}\}^{*} = \widehat{1}$ дава същия резултат за $T^{*}_{(n)}$ (това става с явното разрешаване на рекурентните връзки).[13]

3. Причинна факторизация на локалната S-матрица

Причинна факторизация (causal factorization) на локалната S-матрица е аксиоматич-

[12] при извода се използва, че $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, като с това се показва, че члена от n–ти порядък по $\underline{g}$ в $S\{\underline{g}\}^{*} S\{\underline{g}\}$ е равен на $\frac{(-i)^n}{n!}$ по израза в лявата страна на (2.11)

[13] това твърдение остава без доказателство в настоящия курс

ното условие:

$$S\{\underline{g}+\underline{h}\} = S\{\underline{g}\}\,S\{\underline{h}\}\,, \qquad (3.1)$$

ако $\mathrm{supp}\,\underline{g} \gtrsim \mathrm{supp}\,\underline{h}$. Физическият смисъл на това условие идва на базата на Лема 2, според която ако $\mathrm{supp}\,\underline{g} \gtrsim \mathrm{supp}\,\underline{h}$, то въздействията определени от функциите $\underline{h}$ и $\underline{g}$ могат да се разделят в пространство–времето с хипер–повърхнина на Коши. Ето защо и квантовата трансформация $S\{\underline{g}+\underline{h}\}$, отговаряща на сумарното въздействие, се факторизира в последователност на въздействия: първо $S\{\underline{h}\}$ и после $S\{\underline{g}\}$.

Ако приложим към двете страни на горното равенство (3.1) вариационната производна

$$\frac{\delta^{n+m}}{\delta g_{j_1}(\mathrm{x}_1)\cdots\delta g_{j_n}(\mathrm{x}_n)\delta h_{k_1}(\mathrm{y}_1)\cdots\delta h_{k_m}(\mathrm{y}_m)}$$

при $\underline{g} = \underline{h} = 0$, то ще получим (съгласно (2.6)) еквивалентен израз на (3.1) в термини на T–произведенията. А именно, това е условието за факторизация:

$$T_{j_1,\ldots,j_n,k_1,\ldots,k_m}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n,\mathrm{y}_1,\ldots,\mathrm{y}_m)$$

$$= T_{j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n) \times T_{k_1,\dots,k_m}(\mathrm{y}_1,\dots,\mathrm{y}_m)\,, \tag{3.2}$$

ако

$$\{\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n\} \gtrsim \{\mathrm{y}_1,\dots,\mathrm{y}_m\}\,. \tag{3.3}$$

В частност, ако

$$\{\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n\} \sim \{\mathrm{y}_1,\dots,\mathrm{y}_m\}\,, \tag{3.4}$$

то $\{\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n\} \gtrsim \{\mathrm{y}_1,\dots,\mathrm{y}_m\}$ и $\{\mathrm{y}_1,\ \dots,\ \mathrm{y}_m\} \gtrsim \{\mathrm{x}_1,\ \dots,\ \mathrm{x}_n\}$; следователно,

$$\begin{aligned} & T_{j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n) \\ & \times T_{k_1,\dots,k_m}(\mathrm{y}_1,\dots,\mathrm{y}_m) \\ & = T_{k_1,\dots,k_m}(\mathrm{y}_1,\dots,\mathrm{y}_m) \\ & \times T_{j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n)\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Когато $n = m = 1$ горното равенство се редуцира до обичайното условие за локалност на полета:

$$T_j(\mathrm{x})\,T_k(\mathrm{y}) - T_k(\mathrm{y})\,T_j(\mathrm{x}) = 0\,, \tag{3.6}$$

ако $\mathrm{x} \sim \mathrm{y}$. Условието (3.5) по аналогия с (3.6) се нарича условие за *полилокалност.*

Обръщаме внимание, че условието за унитарност (2.11) при $n = 1$ ни води до условието

$$T_j(\mathrm{x})^* = T_j(\mathrm{x})\,, \tag{3.7}$$

т.е., $T_j(\mathrm{x})$ са не само локални, но и ермитови полета.

Условието за причинна факторизация (3.2) има едно евристично, нестрого решение:[14]

$$\begin{aligned} & T_{j_1,\ldots,j_n}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n) \\ & = \sum_{\sigma\,\in\,\mathscr{S}_n} \theta(x^0_{\sigma(1)}) \cdots \theta(x^0_{\sigma(n)}) \\ & \times T_{j_{\sigma(1)}}\big(\mathrm{x}_{\sigma(1)}\big) \cdots T_{j_{\sigma(n)}}\big(\mathrm{x}_{\sigma(n)}\big)\,, \end{aligned} \tag{3.8}$$

където сумата по всички пермутации σ "подбира" тази наредба в произведението $T_{j_{\sigma(1)}}\big(\mathrm{x}_{\sigma(1)}\big) \cdots T_{j_{\sigma(n)}}\big(\mathrm{x}_{\sigma(n)}\big)$, при която времевите координати на полетата са наредени в намаляващ ред. Действително, съгласно Лема 1 тогава ще имаме $\mathrm{x}_{\sigma(1)} \gtrsim \cdots \gtrsim \mathrm{x}_{\sigma(n)}$ и следователно от (3.2) ще получим

$$\begin{aligned} & T_{j_1,\ldots,j_n}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n) \\ & = T_{j_{\sigma(1)}}\big(\mathrm{x}_{\sigma(1)}\big) \cdots T_{j_{\sigma(n)}}\big(\mathrm{x}_{\sigma(n)}\big)\,. \end{aligned}$$

Това обяснява и произхода на термина $T-$

[14]защо тази формула е нестрога ще дискутираме в точка 5

(наредени) произведения. За ермитово спрегнатите функции $T^*_{j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x}_1,\dots \mathrm{x}_n)$ получаваме факторизация в обратен ред, поради което тези операторни функции се наричат още *анти-хронологични произведения.*

Нека да отбележим, че ако въведем операторите:[15]

$$H_{\underline{g}}(x^0) = \int \sum_{j\,=\,1}^{N} T_j(x^0,\mathbf{x})\, g_j(x^0,\mathbf{x})\, d^3x \tag{3.9}$$

то съгласно реалността на $g_j(\mathrm{x})$ и (3.7) ще получим ермитов оператор, зависещ от времето x^0,

$$H_{\underline{g}}(x^0) \,=\, H_{\underline{g}}(x^0)^*\,.$$

Нещо повече, комбинирайки формули (3.8) и (2.5) можем да запишем локалната S–матрица $S\{\underline{g}\}$

$$S\{\underline{g}\} \,=\, \sum_{n\,=\,0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \times \int T\big(H_{\underline{g}}(x^0_1)\cdots H_{\underline{g}}(x^0_n)\big) \tag{3.10}$$

[15] в долната формула се интегрира само по тримерното пространство

$$\times \, dx_1^0 \cdots dx_n^0 \,,$$

което отговаря на оператора на разсейване, както го получихме в нестационарната теория на разсейване. Така, операторите $H_{\underline{g}}(x^0)$ имат смисъл на хамилтониани на взаимодействие и следователно, те действително отговарят на добавянето на нови членове към действието.

4. Условието за ковариантност на локалната S-матрица

Нека да предположим, че една трансформация на Поанкаре $(\mathrm{a},\Lambda) : \mathrm{x} \mapsto \Lambda\mathrm{x} + \mathrm{a}$, определена от лоренцова матрица Λ и вектор a, действа върху функциите на включване на въздействието $\underline{g}$ (2.3) по определен трансформационен закон, който най-общо има вида:

$$\begin{aligned} \underline{g} \;\mapsto\; \underline{g}' \equiv\; & (\mathrm{a},\Lambda)(\underline{g}) \\ =\; & \pi(\Lambda)\, \underline{g}(\Lambda^{-1}(\mathrm{x}-\mathrm{a}))\,, \end{aligned} \tag{4.1}$$

където $\pi(\Lambda) = \big(\pi(\Lambda)_{j,k}\big)_{j,k\,=\,1}^{N}$ е матрица задаваща действието на Лоренцовата трансформация върху полевите компоненти. Формула (4.1) може също да се запише като

$$\begin{aligned} \underline{g}'(\mathrm{x}') \;&=\; \pi(\Lambda)\,\underline{g}(\mathrm{x})\,, \\ \text{за} \quad \mathrm{x}' \;&=\; \Lambda \mathrm{x} + \mathrm{a}\,, \end{aligned} \tag{4.2}$$

или по компоненти,

$$g'_j(\mathrm{x}') \;=\; \sum_{k\,=\,1}^{N} \pi(\Lambda)_{j,k}\; g_k(\mathrm{x})\,.$$

Направените предположения отразяват най-общо теоретичния опит за трансформационни закони на полета при преход от една инерциална отправна система към друга.

От друга страна, трансформациите на Поанкаре се представят с унитарни трансформации в хилбертовото пространство на състоянията на описваната релативистка квантова система,[16]

$$(\mathrm{a}, \Lambda) \;\mapsto\; U(\mathrm{a}, \Lambda)\,. \tag{4.3}$$

Така, между трансформационния закон (4.1) и действието (4.3) се налага естествена

[16]За простота в тази лекция няма да използваме квантово механичната (спинорна) група на Поанкаре, прехода към която е непосредствен и несъществен за тази лекция.

съгласуваност:

$$S\Big\{(\mathrm{a},\Lambda)(\underline{g})\Big\} \\ = U(\mathrm{a},\Lambda)\, S\Big\{\underline{g}\Big\}\, U(\mathrm{a},\Lambda)^{-1}\,, \tag{4.4}$$

което може да се изкаже също така: ако направим последователно квантова Поанкаре трансформация $U(\mathrm{a},\Lambda)$ и приложим локална S-матрица с трансформираната полева функция $(\mathrm{a},\Lambda)(\underline{g})$, то резултата ще бъде същия, ако първо приложим локалната S-матрица $S\Big\{\underline{g}\Big\}$ и после $U(\mathrm{a},\Lambda)$.

Ако приложим равенството (4.4) върху реда (2.5) на теория на пертурбациите ще получим следното еквивалентно условие в термини на T–произведенията:

$$U(\mathrm{a},\Lambda)\, T_{j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n)\, U(\mathrm{a},\Lambda)^{-1} \\ = \sum_{k_1,\dots,k_n} \pi(\Lambda)_{k_1,j_1}\cdots\pi(\Lambda)_{k_n,j_n} \\ \times\, T_{k_1,\dots,k_n}(\Lambda\mathrm{x}_1+\mathrm{a},\dots,\Lambda\mathrm{x}_n+\mathrm{a})\,. \tag{4.5}$$

Формула (4.5) може най-бързо да се изведе, като се приложи вариационната производна

(2.6) към двете страни на (4.4). При директния извод на (4.5), сравняването в n-ти ред по $\underline{g}$ при развитието на двете страни на (4.4) в ред по теория на пертурбациите ни дава

$$\int \sum_{j_1,\dots,j_n} U(\mathrm{a},\Lambda)\, T_{j_1,\dots,j_n}\big(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n\big)$$
$$\times\ U(\mathrm{a},\Lambda)^{-1}$$
$$\times\ g_{j_1}(\mathrm{x}_1)\cdots g_{j_n}(\mathrm{x}_n)\ d^4x_1\cdots d^4x_n$$
$$= \int \sum_{j_1,\dots,j_n} T_{j_1,\dots,j_n}\big(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n\big)$$
$$\times \sum_{k_1,\dots,k_n} \pi(\Lambda)_{j_1,k_1}\ g_{k_1}\big(\Lambda^{-1}(\mathrm{x}_1-\mathrm{a})\big)$$
$$\cdots\ \pi(\Lambda)_{j_n,k_n}\ g_{k_n}\big(\Lambda^{-1}(\mathrm{x}_n-\mathrm{a})\big)$$
$$\times\ d^4x_1\cdots d^4x_n\,.$$

За достигане до равенство (4.5) остава в дясната страна на горното равенство да се сменят променливите $\mathrm{x}_1 \mapsto \Lambda^{-1}(\mathrm{x}_1-\mathrm{a}), \dots,$ $\mathrm{x}_n \mapsto \Lambda^{-1}(\mathrm{x}_n-\mathrm{a})$ и да се размени реда на сумиранията $\sum_{j_1,\dots,j_n}$ и $\sum_{k_1,\dots,k_n}$.[17]

[17] целта е да се достигне до равенство от вида

Напомняме, че условието за ковариантност на езика на локалните мрежи от алгебри се записва като

$$\begin{aligned} A &\in \mathfrak{A}(O) \\ \Rightarrow \quad & U(\mathrm{a},\Lambda)\, A\, U(\mathrm{a},\Lambda)^{-1} \\ & \in \mathfrak{A}\Big((\mathrm{a},\Lambda)(O)\Big)\,, \end{aligned} \tag{4.6}$$

което съгласно (2.4) напълно съответства на (4.4).

За локалните полета $T_j(\mathrm{x})$ условието (4.5) се редуцира до[18]

$$\begin{aligned} & U(\mathrm{a},\Lambda)\, T_j(\mathrm{x})\, U(\mathrm{a},\Lambda)^{-1} \\ & = \sum_{k_1,\dots,k_n} \pi(\Lambda)_{k,j}\, T_k(\Lambda\mathrm{x}+\mathrm{a})\,, \end{aligned} \tag{4.7}$$

което е едно от аксиоматичните предположения в подхода на Уайтман. Така, причинната теория на пертурбациите, която излагаме е пряко обобщение на аксиомите на Уайтман.

5. Индуктивното построение на локал-

$\int \sum_{j_1,\dots,j_n} F_{j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n)\, g_{j_1}(\mathrm{x}_1)\cdots g_{j_n}(\mathrm{x}_n)\, d^4x_1\cdots d^4x_n = 0,$
от където ще следва че $F_{j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n) = 0$, тъй като това се изпълнява за всяка система от функции $\underline{g}(\mathrm{x})$.

[18] Обърнете внимание, че както в (4.7), така и в (4.5) сумирането се извършва по първия индекс k на $\pi(\Lambda)_{k,j}$, т.е., действа транспонираната матрица $\pi(\Lambda)^T$.

ната S-матрица в теория на пертурбациите

Формула (3.8) нарекохме евристична и нестрога тъй като в нея се извършва умножение на T–произведението, което е обобщена операторно-значна функция, по θ–функциите на Хевисайд, които не са гладки (и дори не са непрекъснати). Това се оказва математическия източник на така наречените ултравиолетови разходимости в квантовата теория на полето, или още, разходимости при големи енергии.

За коректното отстраняване на този проблем е необходимо по-внимателно да се извърши построението на T–произведенията, като се изходи от всички наложени до тук аксиоматични условия върху тях. Нека да сумираме, кои бяха тези условия:

(T1) ще започнем с условието за причинна факторизация (3.2)–(3.3). Следват още две еднакви по важност и трудност условия.

(T2) Условието за ковариантност (4.5)

(T3) и условието за унитарност (2.11).

Основната задача в причинната теория на пертурбациите е стартирайки със система от уайтманови полета $T_j(\mathrm{x})$ $(j = 1, \ldots, N)$, които по такъв начин изпълняват условията за локалност (3.6), ковариантност (4.7) и ермитовост (3.7), да се построи система от операторно–значни функционали $T_{(2)}$, $T_{(3)}$, $\ldots$, $T_{(n)}$, $\ldots$ (2.10), които заедно с

$$T_{(1)}\{\underline{g}\} \;:=\; \int \sum_{j\,=\,1}^{N} T_j(\mathrm{x})\, g_j(\mathrm{x})\, d^4x$$

да изпълняват горните три условия за T–произведения. Условието за причинна факторизация е главното условие, което води до построяването на T–произведенията (или еквивалентно, на локалната S–матрица в теория на пертурбациите).

Първо да отбележим, че системата от условия (T1)–(T3) може да се наложи само върху $T_{(1)}$, $\ldots$, $T_{(n_0)}$, за някое $n_0 = 1, 2, \ldots$

и това отваря възможност да се върви по индукция с построението на T–произведенията. Основната идея е да се използва условието (T1) за конструирането на $T_{(n_0+1)}$. Наистина, съгласно Лема 3 ("основата геометрична лема"), за всеки набор от аргументи $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ (при $n = n_0 + 1$), които не съвпадат напълно, съществува разбиване (1.7) и тогава можем да приложим (3.2), и да определим $T_{(n)}$ за този набор от точки.[19] На пръв поглед изглежда, че по такъв начин цялото условие (T1) за $n = n_0 + 1$ може да се осигури по построение. Това обаче не е съвсем вярно. Една част от условието (T1) ни е необходима за да може горната индуктивна конструкция да работи непротиворечиво. Това е

(T1') условието за полилокалност (3.5)–(3.4) за $n + m = n_0 + 1$,

което в случая на безкрайна система от T–произведения следва от (T1), но при

[19] или по-точно, в достатъчно малка околност на този набор от точки, ако отчетем че работим с разпределения (обобщени функции)

отрязване на системата до n_0, (T1') вече не следва от (T1).

Нека да поясним, защо се налага да използваме (T1'). Проблема идва от това, че за даден набор от не напълно съвпадащи аргументи $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$ (за $n = n_0 + 1$) може да съществува и алтернативно на (1.7) причинно разбиване

$$\left\{\mathrm{x}_{u_1}, \ldots, \mathrm{x}_{u_p}\right\} \gtrsim \left\{\mathrm{x}_{v_1}, \ldots, \mathrm{x}_{v_{n-p}}\right\}, \tag{5.1}$$

където

$$\begin{aligned} &\{1, \ldots, n\} \\ &= \{u_1, \ldots, u_p\} \,\dot{\cup}\, \{v_1, \ldots, v_{n-p}\}\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Тогава следва да обосновем защо

$$\begin{aligned} &T_{j_{r_1}, \ldots, j_{r_m}}(\mathrm{x}_{r_1}, \ldots, \mathrm{x}_{r_m}) \\ &\times T_{j_{s_1}, \ldots, j_{s_{n-m}}}(\mathrm{x}_{s_1}, \ldots, \mathrm{x}_{s_{n-m}}) \\ &= T_{j_{u_1}, \ldots, j_{u_p}}(\mathrm{x}_{u_1}, \ldots, \mathrm{x}_{u_p}) \\ &\times T_{j_{v_1}, \ldots, j_{v_{n-p}}}(\mathrm{x}_{v_1}, \ldots, \mathrm{x}_{v_{n-p}})\,, \end{aligned} \tag{5.3}$$

където двете страни на равенството идват като алтернативни предписания за определението на

$T_{j_1,\ldots,j_n}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n)$. Пълното доказателство на тази съгласуваност е приведено в Допълнение B. В случая когато

$$\{r_1,\ldots,r_m\} = \{v_1,\ldots,v_{n-p}\}\,,$$
$$\{s_1,\ldots,s_{n-m}\} = \{u_1,\ldots,u_p\} \qquad (5.4)$$

съгласуваността (5.3) отговаря точно на условието (T1'), а във всички останали случаи тя се обосновава с помощта на условието (T1), както е предположено по индукция.

И така, разполагайки с построени T–произведения $T_{(1)},\ldots,T_{(n_0)}$ за някое $n_0 \geqslant 1$, така че да са изпълнени условията (T1), (T2) и (T3) за $n \leqslant n_0$, както и (T1') за $n+m = n_0+1$, то следва, че T–произведението $T_{(n_0+1)}$ е *еднозначно* определено, винаги когато поне два негови аргумента са различни. Математически това означава че операторнозначните обобщени функции

$T_{j_1,\ldots,j_n}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n)$ (за $n = n_0+1$) са еднозначно определени в допълнението на *пълния диагонал* $\{(\mathrm{x}_1,\,\ldots,\,\mathrm{x}_n) \in M^{\times n} \mid \mathrm{x}_1 = \cdots =$

$\mathrm{x}_n\}$ в n-тата декартова степен $M^{\times n}$ на пространство–времето M, т.е. в

$$M^{\times n} \backslash \{\mathrm{x}_1 = \cdots = \mathrm{x}_n\}\,. \tag{5.5}$$

Оставащата задача е продължението на така определените $T_{(n)}$ от $M^{\times n} \setminus \{\mathrm{x}_1 = \cdots = \mathrm{x}_n\}$ върху цялото пространство $M^{\times n}$, така че да се изпълняват индукционните предположения и за $n_0 + 1$. За показване, че съществува такова продължение на рекурсивно определените T–произведения ни е необходима техника на нормалните произведения и така наречената причинна теорема на Вик, които ще вземем в следващите лекции.

6. Произволът в построението на локалната S-матрица в теория на пертурбациите

В предходната точка показахме, че ако T-произведенията $T_{(m)}$ са определени за $m = 1, \ldots, n-1$ то операторно-значните функции

$T_{j_1,\ldots,j_n}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ са еднозначно определени за аргументи $(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ лежащи в извън диагоналната област $M^{\times n} \setminus \{\mathrm{x}_1 = \cdots = \mathrm{x}_n\}$. Следователно, ако $T'_{j_1,\ldots,j_n}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ е друго решение на поставения индуктивен проблем на стъпка n, то неравенството

$$\begin{aligned} & T'_{j_1,\ldots,j_n}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) \\ & - T_{j_1,\ldots,j_n}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) \neq 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

е възможно само ако $\mathrm{x}_1 = \cdots = \mathrm{x}_n$. Математически, в термини на обобщени функции, това се записва като

$$\begin{aligned} & \mathrm{supp}\left(T'_{j_1,\ldots,j_n} - T_{j_1,\ldots,j_n}\right) \\ & \subseteq \{\mathrm{x}_1 = \cdots = \mathrm{x}_n\}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

С помощта на теорията на обобщените функции може да се покаже, че всяка операторно-значната обобщена функция, която има носител на пълния диагонал $\{\mathrm{x}_1 = \cdots = \mathrm{x}_n\}$, може да се представи като крайна линейна комбинация на пълната делта функция

$$\delta_{(n)} := \delta(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2) \cdots \delta(\mathrm{x}_{n-1} - \mathrm{x}_n) \tag{6.3}$$

и всевъзможните ѝ висши частни производни, които накратко ще бележим с

$$\partial^{\xi}\delta_{(n)}\,, \tag{6.4}$$

а коефициентите на това разлагане са операторно-значни обобщени функции на коя да е от изравнените променливи x_1, $\ldots$, x_n – да речем x_n. Така, с формула твърдението, което току що изказахме, се записва като

$$\begin{aligned} & i^{n-1}\Big(T'_{j_1,\ldots,j_n}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n) \\ & - T_{j_1,\ldots,j_n}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n)\Big) \\ & = \sum_{\xi} \partial^{\xi}\delta_{(n)}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n) \\ & \qquad \times\ \phi_{\xi\,;\,j_1,\ldots,j_n}(\mathrm{x}_n)\,, \end{aligned} \tag{6.5}$$

където сумата по ξ (индексиращи частните производни на $\delta_{(n)}$) е крайна, а изборът на общия фактор i^{n-1} е свързан с ермитовостта, която ще дискутираме по-долу.

С това получаваме, че произволът на стъпка n от конструкцията на T–произведенията се състои в добавяне на делта функции

$\partial^{\xi}\delta_{(n)}$ умножени по някакви полета $\phi_{\xi\,;\,j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x})$. Какви свойствата на тези полета? Първо, от условията за унитарност за $T_{(n)}$ и $T'_{(n)}$ следва непосредствено, че $i^{n-1}(T'_{(n)} - T_{(n)})$, а следователно и всички $\phi_{\xi\,;\,j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x})$, са ермитови. Действително, от формула (2.11) следва, че

$$(T'_{(n)} - T_{(n)})^* + (-1)^n(T'_{(n)} - T_{(n)}) \;=\; 0$$

понеже, както $T_n^* + (-1)^n T_{(n)}$, така и $T_n'^* + (-1)^n T'_{(n)}$ зависят по един и същи начин от $T_{(1)}, \dots, T_{(n-1)}$.[20]

Второ, системата от полета $\phi_{\xi\,;\,j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x})$ е ковариантна:

$$U(\mathrm{a},\Lambda)\,\phi_{\xi\,;\,j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x})\,U(\mathrm{a},\Lambda)^{-1}$$

ще се изразява линейно от $\phi_{\eta\,;\,k_1,\dots,k_n}(\mathrm{x}')$ за $\mathrm{x}' = \Lambda\mathrm{x} + \mathrm{a}$, макар и получения трансформационен закон евентуално да бъде доста сложен (но все пак ще е краен). Това следва, ако приложим спрягането $U(\mathrm{a},\Lambda) \bullet U(\mathrm{a},\Lambda)^{-1}$ към двете страни на

[20] налага се да се използва и факта, че $(i^{n-1})^* = (-1)^{n-1} i^{n-1}$

(6.5) и използваме трансформационните свойс-тва на $T_{(n)}$ и $T'_{(n)}$, както и тези на $\partial^{\xi}\delta_{(n)}$.

За накрая оставихме най-важното свойство на полетата $\phi_{\xi\,;\,j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x})$. Това е локалността. Ако приложим свойство (T1') за $T_{(n)}$ и $T'_{(n)}$, то от (3.5) за $m = 1$ ще получим, че

$$\begin{aligned}&\left(T'_{(n)} - T_{(n)}\right) T_k(\mathrm{y})\\ &= T_k(\mathrm{y}) \left(T'_{(n)} - T_{(n)}\right)\end{aligned}$$

когато аргументите на $T'_{(n)} - T_{(n)}$ са пространствено–подобни спрямо y. Като отчетем и разлагането (6.5) ще получим

$$\begin{aligned}&\phi_{\xi\,;\,j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x})\, T_k(\mathrm{y})\\ &= T_k(\mathrm{y})\, \phi_{\xi\,;\,j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x})\,,\end{aligned} \tag{6.6}$$

винаги когато x $\sim$ y. С други думи, полетата $\phi_{\xi\,;\,j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x})$ са взаимно локални спрямо $T_j(\mathrm{x})$. В аксиоматичния подход на Уайтман има теорема на Борхерс (Borchers), която твърди, че ако едно поле е локално спрямо система от уайтманови полета, то и самото поле е локално (спрямо себе си), т.е.,

$$\phi_{\xi\,;\,j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x})\, \phi_{\eta\,;\,k_1,\dots,k_n}(\mathrm{y})$$

$$= \phi_{\eta\,;\,k_1,\dots,k_n}(\mathrm{y})\,\phi_{\xi\,;\,j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x})\,, \tag{6.7}$$

ако $\mathrm{x} \sim \mathrm{y}$.

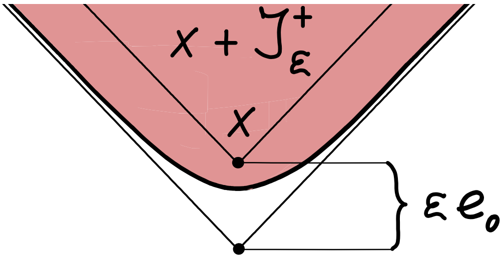
И така, изводът до който достигаме е изключително прост за формулиране: при построяването на T–произведенията на всяка индуктивна стъпка произволът в конструкцията се свежда до прибавяне на уайтманови полета (умножени по делта функция или нейни производни). Тези локални полета могат да са от вече избраната система от полета $T_j(\mathrm{x})$, но могат и да са допълнителни полета. Въпросът до колко е необходимо да се разширява изходната система от локални полета е въпроса за така наречената *пренормируемост* на дадена теория.

7. Пренормируемост

. . . .

Приложение A. Доказателство на Лема 2

Нека $X \gtrsim Y$. За всяка точка $\mathrm{x} \in X$ построяваме околности $\mathrm{x} + J_{\varepsilon}^{+}$ $(\varepsilon > 0)$ по начина описан във фигурата по-долу.

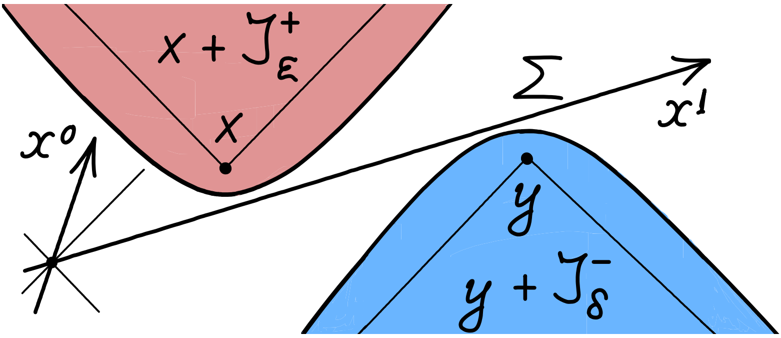


Фигура 6: Построяване на околностите $\mathrm{x}+J_\varepsilon^+$: два светлинни конуса на бъдещето са построени, като първия е с връх в x, а втория е с връх в $\mathrm{x}_\varepsilon := \mathrm{x} - \varepsilon \mathrm{e}_0$. Спрямо долния светлинен конус е построен пространствено –подобен хиперболоид $\mathrm{x}_\varepsilon + \Gamma^+_{m^2}$, който клони асимптотично към този конус. Освен това предполагаме, че хиперболоида пресича свързващата отсечка $\varepsilon \mathrm{e}_0$ между върховете на светлинните конуси и я дели в някаква фиксирана пропорция, да речем $1 : 3$ (това ще фиксира m^2 като функция на ε). Тогава, J_ε^+ е горното полупространство отделено от $\Gamma^+_{m^2}$, т.е., $J_\varepsilon^+ := \mathrm{Future}(\Gamma^+_{m^2})$.

Полагайки, $J_\delta^- := -J_\delta^+$ за $\delta > 0$ получаваме система от околности $\mathrm{y} + J_\delta^-$ на всяка точка $\mathrm{y} \in Y$. Тъй като при ε, $\delta \to 0$ околностите $\mathrm{x} + J_\varepsilon^+$ и $\mathrm{y} + J_\delta^-$ се свиват равномерно към конусите $\mathrm{x} + \overline{V}^+$ и $\mathrm{y} + \overline{V}^-$, съответно, то следва че за всеки $\mathrm{x} \gtrsim \mathrm{y}$ съществуват $\varepsilon, \delta > 0$, такива че

$$\mathrm{x} + J_\varepsilon^+ \gtrsim \mathrm{y} + J_\delta^- ,$$

като в този случай множествата $\mathrm{x} + J_\varepsilon^+$ и $\mathrm{y} + J_\delta^-$ могат също да бъдат разделени от плоска хипер–повърхнина на Коши, както е изобразено на фигурата по-долу.



Фигура 7: Причинно разделяне на $\mathrm{x} + J_\varepsilon^+$ и $\mathrm{y} + J_\delta^-$ в случая когато x не е в миналото на y.

Използвайки компактността на X и Y можем да построим крайни покрития от вида

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \left(\mathrm{x}_j + J_{\varepsilon_j}^+\right),$$

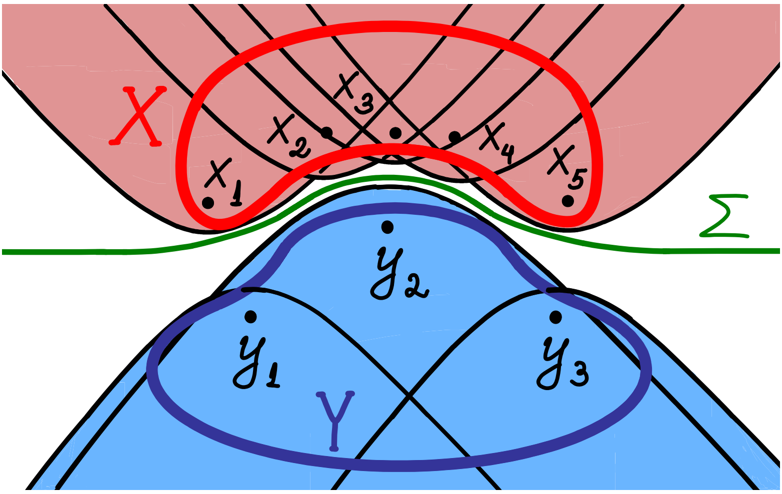
$$Y \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \left(\mathrm{y}_k + J_{\delta_k}^-\right), \tag{A.1}$$

изпълняващи също

$$\mathrm{x}_j + J_{\varepsilon_j}^+ \gtrsim \mathrm{y}_k + J_{\delta_k}^- \tag{A.2}$$

за всеки $j = 1, \ldots, n$ и $k = 1, \ldots, m$.[21] Това е изобразено на фигурата по-долу

[21]Припомняме, че компактността на едно множество позволява от всяко отворено покритие да се избере крайно подпокритие.

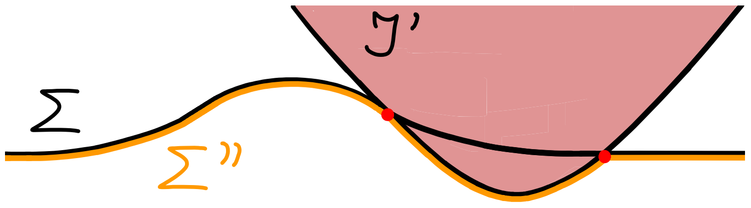


Фигура 8: Крайно покритие на множествата X и Y от фигура 5 изпълняващо условието (A.2).

Така, достатъчно е да се докаже съществуването на разделяща хипер–повърхнина на Коши за множества X' и Y', които са от вида на десните страни съответно в първото и второто неравенство от (A.1). Последното твърдение може да се докаже с индукция по $n+m$. За $n = m = 1$ това е илюстрирано на фигура 7. Ако допуснем, че твърдението е доказано за зададено $N = n + m \geqslant 2$ $(n, m \geqslant 1)$ и разгледаме множества, които представляват обединения с общо $N + 1$ елемента, то или n е нараснало с единица или m. Нека за определеност n е нараснало с единица (случая $m \mapsto m+1$ е аналогичен). И така, нека $X'' = X' \cup (\mathrm{x}_{n+1} + J^+_{\varepsilon_{n+1}})$ и $\mathrm{x}_{n+1} + J^+_{\varepsilon_{n+1}} \gtrsim \mathrm{y}_k + J^-_{\delta_k}$ за $k = 1, \ldots, m$. Нека Σ е хипер–повърхнина на Коши, която разделя X' и Y', и която е построена по индукция. Искаме да коригираме Σ към Σ' така, че Σ' да разделя X'' и Y'. Нека $\partial J'$ е границата на $J' := \mathrm{x}_{n+1} + J^+_{\varepsilon_{n+1}}$, което е един пространствено подобен хиперболоид. Ако положим

$$\Sigma'' := \left(\Sigma \backslash J'\right) \cup \left(\mathrm{Past}(\Sigma) \cap \partial J'\right),$$

то Σ'' ще изпълнява определението за хипер –повърхнина на Коши с изключение евентуално на гладкостта по контура $\partial(\Sigma \backslash J')$, където става съединяването на Σ с $\partial J'$. Това е илюстрирано на следната фигура.



Фигура 9: Деформация на хипер–повърхнина на Коши. Получените чупки в граничните точки на деформацията могат допълнително да се изгладят с деформация в произволно малка тяхна околност.

Получената "чупка" обаче винаги може да се заглади в произволно малка нейна околност и така да получим от Σ'' желаната хипер–повърхнина на Коши, която да разделя X'' и Y'.

В обратна посока Лема 2 следва от самото разбиване (1.5), тъй като $\mathrm{Future}(\Sigma) \gtrsim \mathrm{Past}(\Sigma)$.

Приложение Б. Формула за T^*

За рекурентното разрешаване на (2.11) е удобно да се премине към $T_{j_1,\dots,j_n}(\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n)$ и техните ермитово спрегнати функции. Тогава, ако се въведе означението

$$T(X) \,:=\, T_{j_{r_1},\dots,j_{r_p}}(\mathrm{x}_{r_1},\dots,\mathrm{x}_{r_p})\,,$$

където $r_1,\dots,r_p$ са различни и $X = \{r_1,\dots,r_p\} \subseteq \{1,\dots,n\}$,

$$T(\emptyset) \,=\, \widehat{1}$$

то условието (2.11) е равносилно на

$$\sum_{X\,\dot{\cup}\,Y\,=\,\{1,\dots,n\}} T(X)^*\,T(Y) \,=\, 0\,.$$

От тук се получава . . . .

Приложение В. Съгласуваност при конструкцията на T–произведенията

. . . .