Симетрии и унитарни представяния

1. Общи принципи

а) Всяка симетрия във физиката се описва математически от група.

(виж. Прилож. към Лекц. 3)

б) Th. на Вайл (Лекц. 3, 9)

$\Rightarrow$ Всяка непрекъсната и свързана група на симетрия се представя проективно-унитарно в Хилб. пр-во на състоянията $\mathcal{H}$.

$$G \ni g \mapsto U(g) \text{ - унитарен},$$

$$U(g_1)\,U(g_2) = e^{i\omega(g_1, g_2)}\,U(g_1 g_2).$$

в) Симетрия с непрекъсната група се закодира от алгебра на Ли по следните съответствия:

в.1) G (група на Ли) $\xrightarrow{\quad} \xleftarrow{\sim}$ $\mathfrak{g}$ (алг. на Ли)

За матрични групи

$$g \in G \subseteq M_n = M_n(\mathbb{K}) \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$$

$$g = 1 + \varepsilon h + O(\varepsilon^2) \in G \iff h \in \mathfrak{g} \subseteq M_n$$

"генератори"

група на Ли = "глобална симетрия"

алгебра на Ли = "инфинитезимална симетрия"

$\mathfrak{g}$ е вект. пр-во над $\mathbb{K}$ и алг. на Ли:

ако $g_j = 1 + \varepsilon h_j + O(\varepsilon^2) \in G$, то

$$g_1 g_2 = 1 + \varepsilon(h_1 + h_2) + O(\varepsilon^2);$$

$$g_1 g_2 (g_2 g_1)^{-1} = 1 + \varepsilon^2 \underbrace{[h_1, h_2]}_{\in \mathfrak{g}} + O(\varepsilon^3).$$

Обратно: ако $h \in \mathfrak{g}$, то $e^{\varepsilon h} \in G \ \forall \varepsilon \in \mathbb{K}$.

в.2) Ако $U(g)$ - унитарна, гладко зависеща от g и $U(1) = \mathbb{1}$ $\iff$ $U(1 + \varepsilon h + O(\varepsilon^2)) =$

$$= 1 + \varepsilon \underbrace{U(h)}_{} + O(\varepsilon^2)$$ и $U(h)$ - антиермитов:

$$:= dU(1)(h) \,, \qquad U : \mathfrak{g} \xrightarrow[\text{лин.}]{} Op(\mathcal{H})$$

$$\langle \phi | \psi \rangle = \langle U(1+\varepsilon h + O(\varepsilon^2))\phi \,|\, U(1+\varepsilon h + O(\varepsilon^2))\psi \rangle$$

$$= \langle \phi | \psi \rangle + \varepsilon \langle U(h)\phi | \psi \rangle + \varepsilon \langle \phi | U(h)\psi \rangle + O(\varepsilon^2).$$

$$\Longleftrightarrow \quad \langle U(h)\phi | \psi \rangle = - \langle \phi | U(h) \psi \rangle.$$

т.е., $U(h)^* = -U(h)$.

Понеже $U : \mathfrak{g} \longrightarrow Op(\mathcal{H})$ е $\mathbb{K}$-линейно,

$$\Rightarrow \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

За унитарни представяния говорим само при групи и алг. на Ли, които се разглеждат над $\mathbb{R}$.

Можем да разширим $U : \mathfrak{g} \to Op(\mathcal{H})$ над $\mathbb{C}$ с комплексификация: $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$

т.ч. $U(\overline{h}) = -U(h)^*$ за $\overline{h_1 + ih_2} := h_1 - ih_2$,

$U(h_1 + ih_2) := U(h_1) + iU(h_2)$.

Унитарно <u>представяне</u>: $g_j = 1 + \varepsilon h_j + O(\varepsilon^2)$

$$U(g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}) = U(g_1) U(g_2) U(g_1)^{-1} U(g_2)^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad U([h_1, h_2]) = [U(h_1), U(h_2)]$$

– унитарно <u>представяне</u> на алг. на Ли.

Проективно-унитарно представяне:

$$U(g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}) = e^{i(\omega(g_1, g_2) - \omega(g_2, g_1))}$$

$$\times\, U(g_1)\, U(g_2)\, U(g_1)^{-1} U(g_2)^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad U([h_1, h_2]) = [U(h_1), U(h_2)]$$

$$+\, \omega'(h_1, h_2) \cdot \hat{1}$$

$$\omega'(h_1, h_2) = (d_{g_1} d_{g_2} \omega)(1)(h_1, h_2) - (d_{g_2} d_{g_1} \omega)(1)(h_2, h_1).$$

нарича се централно разширение $\tilde{g} = g \oplus \mathbb{K} \cdot \hat{1}$

в) Действие на наблюдаеми.

Ермитови генератори и заряди

$$A \xmapsto{g} U(g)\, A\, U(g)^{-1}$$

$$= A + \varepsilon\, [U(h), A] + O(\varepsilon^2)$$

(ако $g = 1 + \varepsilon h + O(\varepsilon^2)$)

Факт. Действието върху A не се променя ако

$$U(g) \to U_1(g) := e^{i\varphi(g)} U(g),$$

$$U(h) \to U_1(h) := U(h) + \varphi(h).$$

Ако така се модифицира U, то ω и ω' в проективните представяния се променят и могат дори да се нулират = тривиалност на проективността

генераторът е фиксиран само с точност до адитивна константа

$U(h)$ - антиермитов $\Rightarrow$ $\frac{1}{i}U(h)$ - ермитов

$$[U(h_1), U(h_2)] = U([h_1, h_2])$$

комутаторно представяне

$$i\left[\frac{1}{i}U(h_1), \frac{1}{i}U(h_2)\right] = \frac{1}{i}U([h_1, h_2])$$

- с квантова скобка $\{\cdot,\cdot\} := i[\cdot,\cdot]$ (Лекц. 4).

Физическа интерпретация: ермитовият генератор $\frac{1}{i}\mathcal{U}(h)$ се отъждествява с физическа наблюдаема наречена "заряд на симетрията".

Симетрията $\mathcal{U}(g)$ не променя еволюцията

$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{U}(g)\,\mathcal{U}(t)\,\mathcal{U}(g)^{-1} = \mathcal{U}(t)$$

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{U}(g)$ комутира с еволюцията $\mathcal{U}(t) = e^{itH}$

$\Longleftrightarrow \quad \left[\frac{1}{i} U(h), H \right] = 0 \quad \forall$ ермитов генератор

$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{i} U(h)$ е запазваща се величина

— закони за запазване

= симетрии на динамиката

Импулси: $[\hat{x}^j, \hat{p}_k] = i\,\delta^j_k$, $j, k = 1, 2, 3$

$$e^{i a^k \hat{p}_k}\, \hat{x}^j\, e^{-i a^k \hat{p}_k}$$

$$= \hat{x}^j + i a^k [\hat{p}_k, \hat{x}^j] + 0 + \cdots = \hat{x}^j + a^j$$

$\Rightarrow$ Ермитовите генератори на пространствените транслации са импулсите !

$\Leftrightarrow$ К.К.С. / C.C.R.

Припомняне: ермитовият генератор на транслациите по времето е енергията / хамилтониана

$$e^{itH} = U(t)$$ - операторът на еволюцията.

До тук – заряди на пространствени симетрии – това са импулси, енергия, моменти на импулси

Заряди на вътрешни симетрии – електричен заряд и др.

2. Алгебра на (~~Ли на групата на~~) Поанкаре

а) На (псевдо) ортогоналните групи

$$x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu} \quad , \qquad x \cdot y = (\Lambda x) \cdot (\Lambda y)$$

$$\hookrightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\ \mu_1} x^{\mu_1} \Lambda^{\nu}_{\ \nu_1} y^{\nu_1} = \eta_{\mu_1 \nu_1} x^{\mu_1} y^{\nu_1} \quad (\forall x, y)$$

$$\hookrightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\ \mu_1} \Lambda^{\nu}_{\ \nu_1} = \eta_{\mu_1 \nu_1}$$

Нека $\Lambda^{\mu}{}_{\mu_1} = \delta^{\mu}{}_{\mu_1} + \varepsilon\, \omega^{\mu}{}_{\mu_1} + O(\varepsilon^2)$

$\hookrightarrow \quad \omega^{\mu}{}_{\mu_1} \eta_{\mu\nu} + \omega^{\nu}{}_{\nu_1} \eta_{\mu\nu} = 0$

$\hookrightarrow \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad , \quad \omega_{\mu\nu} := \omega_{\mu}{}^{\nu_1} \eta_{\nu_1 \nu}$

$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu} \quad , \quad \omega^{\mu\nu} = \omega^{\nu}{}_{\mu_1} \eta^{\mu_1 \mu}$

$(X_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} := \delta^{\mu}_{\alpha} \eta_{\beta\nu} - \delta^{\mu}_{\beta} \eta_{\alpha\nu}$ – базисни за $\alpha < \beta$

$$\left([X_{\alpha\beta}, X_{\mu\nu}]\right)^{\rho}_{\sigma} = (X_{\alpha\beta})^{\rho}_{\sigma_1}(X_{\mu\nu})^{\sigma_1}_{\sigma} - (X_{\mu\nu})^{\rho}_{\sigma_1}(X_{\alpha\beta})^{\sigma_1}_{\sigma}$$

$$\begin{aligned}[X_{\alpha\beta}, X_{\mu\nu}] &\overset{?}{=} \eta_{\alpha\nu} X_{\beta\mu} + \eta_{\beta\mu} X_{\alpha\nu} \\ &\quad - \eta_{\alpha\mu} X_{\beta\nu} - \eta_{\beta\nu} X_{\alpha\mu}\end{aligned}$$

$$\eta_{\mu,\nu} : \mathbb{R}^{p,q} \longrightarrow so(p,q), \quad \dim = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$n = p + q$$

В частност, $so(3)$: $X_{12} =: i J_3$ (и цикл. по 1,2,3)

$$[J_1, J_2] = i J_3 \quad \text{(и цикл. по 1,2,3)}$$

б) Алг. на Поанкаре. Група: $\{(a, \Lambda)\}$

Матрична реализация:

$$\begin{array}{c|c|c} & 0\;1\;2\;3 & 4 \\ \hline \begin{matrix}0\\1\\2\\3\end{matrix} & \Lambda & a \\ \hline 4 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$(0,\Lambda)(a,1)(0,\Lambda)^{-1} = (\Lambda a, 1)$$

$(a,1) = e^{a^\alpha Y_\alpha}$ - трансляции

$(0,\Lambda) = e^{\omega^{\mu\nu} X_{\mu\nu}}$ - псевдо-ротации

$$\hookrightarrow (0,\Lambda)\, a^\alpha Y_\alpha \,(0,\Lambda)^{-1} = (\Lambda a)^\alpha Y_\alpha$$

$$\Lambda = 1 + \varepsilon X_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon Z(\varepsilon)$$

$$\Lambda^{-1} = 1 - \varepsilon X_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2) = 1 - \varepsilon Z + (-\varepsilon Z)^2 + \cdots$$

$$\hookrightarrow \quad [X_{\mu\nu}, a^\alpha Y_\alpha] = (X_{\mu\nu}\, a)^\alpha Y_\alpha$$

$$= (X_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta\, a^\beta Y_\alpha = a_\nu Y_\mu - a_\mu Y_\nu$$

$$\hookrightarrow \quad [X_{\mu\nu}, Y_\alpha] = \eta_{\nu\alpha} Y_\mu - \eta_{\mu\alpha} Y_\nu$$

$$\dim \text{Алг. на Поанкаре} = \underbrace{\frac{4\cdot 3}{2}}_{\text{Лоренц}} + 4 = 10$$

3. Унитарни представяния

$$(-)\, U(X_{\alpha\beta}) = i\hat{M}_{\alpha\beta}\,, \quad (-)\, U(Y_\mu) = i\hat{P}_\mu$$

– ермитови генератори

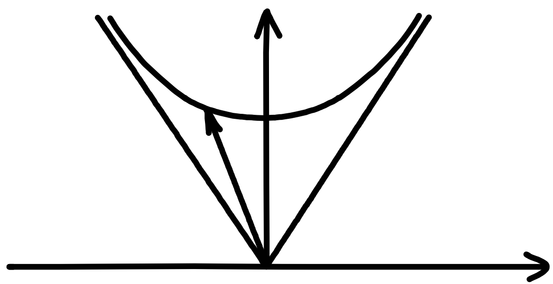
$$[\hat{P}_\mu , \hat{P}_\nu] = 0$$

$$i[\hat{M}_{\alpha\beta} , \hat{P}_\mu] = \eta_{\alpha\mu}\hat{P}_\nu - \eta_{\beta\nu}\hat{P}_\nu$$

$$i[\hat{M}_{\alpha\beta} , \hat{M}_{\mu\nu}] = \eta_{\alpha\mu}\hat{M}_{\beta\nu} + \eta_{\beta\nu}\hat{M}_{\alpha\mu} - \eta_{\alpha\nu}\hat{M}_{\beta\mu} - \eta_{\beta\mu}\hat{M}_{\alpha\nu}$$

Нека $\hat{m}^2 := -\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = \hat{p}_0^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2$

Съвместния спектър на $\hat{p}_\mu$: $\hat{p}_\mu |p\rangle = p_\mu |p\rangle$



От принципа за положителност на ен-та $\Rightarrow \hat{m}^2 \geq 0$

$$\hat{m}^2 |p\rangle = p^\mu p_\mu |p\rangle$$

Заб. $\langle p | p' \rangle = \delta(p - p')$

– "несобствени" вектори

$|p\rangle \notin \mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_{-1}$

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

rigged Hilbert space

"обогатено" Хилбертово простр.

Факт. $[\hat{\mathfrak{M}}^2, \hat{P}_\mu] = 0 = [\hat{\mathfrak{M}}^2, \hat{M}_{\mu\nu}]$

централен оператор

Лема на Шур. $\forall$ централен оператор в неприводимо представяне е кратен на $\mathbb{1}$.

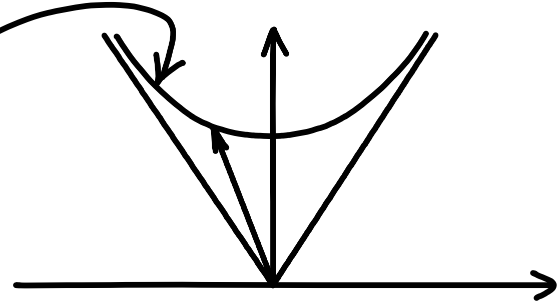
Аргумент: иначе ще има нетривиално собствено подпростр. и $\Rightarrow$ нетрив. инвариантно подпростр.

<u>Следствие.</u> Във $\forall$ неприводимо унитарно представяне на алгебрата на Поанкаре (с неотрицателна енергия):

$$\hat{m}^2 = m^2 \cdot \mathbb{1} \qquad (m^2 \geq 0).$$

Нека за $\forall\, p \in \Gamma_m^+$

$$p = (p_\mu)_{\mu=0}^{3} :$$



$$\mathcal{H}(p) := \{ \Psi \in \mathcal{H}_{-1} \mid \hat{P}_\mu \Psi = p_\mu \Psi \}$$

<u>Факт.</u> $U(\Lambda) : \mathcal{H}(p) \longrightarrow \mathcal{H}(\Lambda p)$

$$U(\Lambda)\,\hat{P}_\mu\,U(\Lambda)^{-1} = \Lambda_\mu^{\ \nu}\,\hat{P}_\nu$$

$$\psi \in \mathcal{H}(p) \iff \hat{P}_\mu \psi = p_\mu \psi$$

$$\iff \hat{P}_\mu\, U(\Lambda)\psi = U(\Lambda)\left(U^{-1} P_\mu\, U\right)\psi$$

$$= \left(\Lambda^{-1}\right)_\mu^{\ \nu} \hat{P}_\nu \psi = \left(\Lambda^{-1}\right)_\mu^{\ \nu} p_\nu\,\psi = (\Lambda p)_\mu\,\psi$$

псевдоортогон.

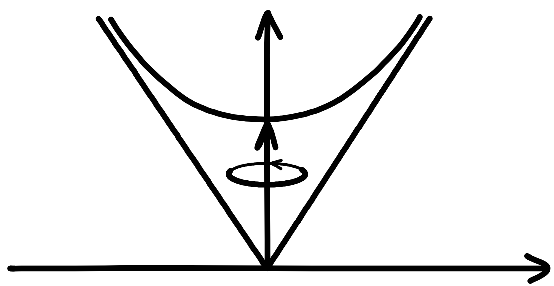
$$\iff \psi \in \mathcal{H}(\Lambda p)$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(p) \arrow[r, "U(\Lambda_1)"] \arrow[rr, bend right, "U(\Lambda_2\Lambda_1)"'] & \mathcal{H}(\Lambda_1 p) \arrow[r, "U(\Lambda_2)"] & \mathcal{H}(\Lambda_2\Lambda_1 p)
\end{tikzcd}
$$

Нека $SO(3,1)_p = \{ \Lambda \in SO(3,1) \mid \Lambda p = p \}$

$=:$ стационарна подгрупа / стабилизатор / stabilizer на p

За $p = (1,0,0,0)$: $SO(3,1)_p = SO(3)$.



Следствие. (Теорема на Вигнер / Wigner.)

$\forall$ неприводимо унитарно представяне на алг. на Поанкаре се характеризира от m^2 (≥ 0 - при неотрицателност на енергията) и неприводимо представяне на $SO(3,1)_p$ за някое $p \in \Gamma_m^{(+)}$. При $m > 0$ това е винаги неприводимо представяне на $SO(3)$.

__Забележка.__ При $m = 0$, $p \in \Gamma_0^+ \equiv V^+$

$SO(3,1)_p \cong$ Групата на Евклид (над $\mathbb{R}^3$)

4. Неприводими унитарни представяния на $SO(3)$

Означения: Нека $i\hat{J}_3 = U(X_{12})$ и цикл.

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hat{J}_3 \quad \text{и цикл.}$$

$$\hat{J}^2 := \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^3$$

Факт. $[\hat{J}^2, \hat{J}_k] = 0$, $k = 1, 2, 3$

и $\Rightarrow$ $\hat{J}^2 = s' \cdot 1$ за неприводимо унитарно представяне. $\square$

Нека $\hat{J}_\pm := \hat{J}_1 \pm i \hat{J}_2$

Имаме:

$$[\hat{J}_\pm, \hat{J}_3] = \mp \hat{J}_3$$

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2 \hat{J}_3$$

Теорема. $\hat{S}^2 = s(s+1)$, където $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

За $\forall s$ $\exists!$ с точност до изоморфизъм неприводимо унитарно предст. на $so(3)$. В него

$$\hat{J}_3 \cong \mathrm{diag}(-s, -s+1, \dots, s-1, s).$$

dim на предст. $= 2s+1 = 0, 1, \dots$

Кинематична класификация на елементарните частици := неприводимите унитарни представяния на алг. на Поанкаре с неотрицателна енергия

$= (m, s)$, $m \geq 0$ - маса на частицата

$s = 0, 1/2, 1, \dots$ - спин на частицата

spin, вътрешен ъглов момент.