Квантова теория на полето и елементарните частици: Лекция 10

Николай М. Николов

Насрочваме извънредна лекция за 8 януари 2014 от 12:15 до 15:00, която ще започне в аудитория 304 на ФМИ и при нужда ще се преместим, като ще оставим бележка на аудиторията и на портала.

С червено са отбелязани части от лекцията, в които е имало пропуски или са приведени допълнителни сведения.

Класификация на Вигнер на неприводимите унитарни представяния на групата на Поанкаре

1. Симетрии и унитарни представяния – общи принципи

а) Припомняме, че всяка симетрия във физиката се описва математически от група (виж приложението към Лекция 3 и предисловието към Лекция 9).

б) От теоремата на Вигнер (споменавана в Лекции 3 и 9) следва, че всяка свързана топологична група на симетрия G се представя проективно-унитарно в Хилбертовото пространство на състоянията $\mathcal{H}$:

$$G \ni g \mapsto \mathcal{U}(g) \text{ - унитарен оператор в } \mathcal{H},$$

$$\mathcal{U}(g_1)\,\mathcal{U}(g_2) = e^{i\omega(g_1,g_2)}\,\mathcal{U}(g_1 g_2),$$

$$\omega(g_1,g_2) \in \mathbb{R}.$$

в) Всяка симетрия задавана от непрекъсната група (наричани още, групи на Ли) се закодира от алгебра на Ли по съответствия описани по-долу. За целта ще се ограничим до достатъчно общия случай на матрични групи. Нека $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ е множество (поле) от числа и $M_n := M_n(\mathbb{K})$ е алгебрата на $n \times n$-матрици с коефициенти в $\mathbb{K}$, $GL_n := GL(\mathbb{K}^n) \subseteq M_n$ е общата линейна група над $\mathbb{K}^n$. Тогава, матрична група е всяка подгрупа $G \subseteq GL_n$. (Атернативно означение е $\mathfrak{gl}_n \equiv M_n$ особено когато на M_n се гледа като на алгебра на Ли.)

в.1) Съществуват взаимно обратни съответствия:

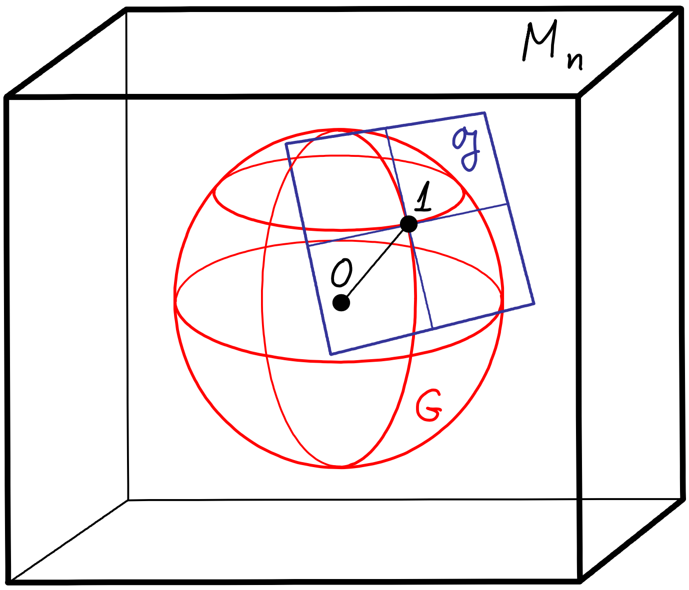
$$G \text{ (група на Ли)} \rightleftarrows \mathfrak{g} \text{ (алг. на Ли)},$$

където в обратната посока разкривяването на стрелката индикира възможни нееднозначности.

В права посока съответствието е следното

$$g(\varepsilon) = 1 + \varepsilon h + O(\varepsilon^2) \in G \subseteq M_n \iff h \in \mathfrak{g} \subseteq M_n .$$

С други думи, $\mathfrak{g}$ е допирателното пространство към G в единицата 1 пренесено успоредно от 1 в 0 (т.е., разглеждано като векторно подпространсво на M_n с център в 1).



Елементи $h \in \mathfrak{g}$ се наричат генератори на G (в алгебрата на Ли $\mathfrak{g}$). Те често се наричат и инфинитезимални преобразувания на симетрия.

- $\mathfrak{g}$ е векторно пространство над $\mathbb{K}$ (като допирателно пространство) – например, ако

$$g_j(\varepsilon) = 1 + \varepsilon h_j + O(\varepsilon^2) \quad (j = 1, 2), \text{ т.е., } h_1, h_2 \in \mathfrak{g}$$

$$\Longrightarrow \quad g_1(\varepsilon) g_2(\varepsilon) = 1 + \varepsilon (h_1 + h_2) + O(\varepsilon^2), \text{ т.е., } h_1 + h_2 \in \mathfrak{g}.$$

- $\mathfrak{g}$ е алгебра на Ли: за горните $g_j(\varepsilon)$ имаме

$$g_1(\varepsilon)\, g_2(\varepsilon)\, g_1(\varepsilon)^{-1} g_2(\varepsilon)^{-1} =$$
$$= \big(1 + \varepsilon h_1 + O(\varepsilon^2)\big)\big(1 + \varepsilon h_2 + O(\varepsilon^2)\big)\big(1 - \varepsilon h_1 + O(\varepsilon^2)\big)\big(1 - \varepsilon h_2 + O(\varepsilon^2)\big)$$
$$= 1 + \varepsilon (h_1 h_2 - h_2 h_1) + O(\varepsilon^2)$$
$$= 1 + \varepsilon [h_1, h_2] + O(\varepsilon^2), \quad \text{т.е., } [h_1, h_2] \in \mathfrak{g}.$$

Тук сме използвали, че:

$$g_j(\varepsilon)^{-1} = \big(1 + \varepsilon h_j + O(\varepsilon^2)\big)^{-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \big(-(\varepsilon h_j + O(\varepsilon^2))\big)^n = 1 - \varepsilon h_j + O(\varepsilon^2)$$

развиваме в прогресия

За обратното съответствие, от $\mathfrak{g}$ към G ще отбележим, че за $\forall h \in \mathfrak{g}$ имаме $e^{\varepsilon h} \in G$ за $\forall \varepsilon \in \mathbb{K}$ понеже ако $g(\varepsilon) = 1 + \varepsilon h + O(\varepsilon^2) \in G$, то $e^{\varepsilon h} = \lim\limits_{n \to \infty} g\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^n$

$$\left(\left(1 + \frac{\varepsilon h + O(\varepsilon^2)}{n}\right)^n \longrightarrow e^{\varepsilon h}\right).$$

Така, ако G е свързана подгрупа на Ли на GL_n, то ние можем да възстановим G като подгрупата породена от $\{e^{\varepsilon h} \mid h \in \mathfrak{g}, \varepsilon \in \mathbb{K}\}$.

Има обаче следния по-тънък момент, ако $\mathfrak{g}$ е вложена като подалгебра на Ли в друга обемаща матрична алгебра, M_m. Тогава възстановената група може да не бъде изоморфна на тази в M_n. И все пак, двете възстановени групи, да речем G и G', са винаги локално изоморфни, което означава, че съществуват околности на единицата

$$1 \in W \subseteq W_1 \subseteq G \quad \text{и} \quad 1' \in W' \subseteq W_1' \subseteq G'$$

и дифеоморфизъм $f : W_1 \to W_1'$ (т.е., гладко и гладко-обратимо, взаимно-еднозначно съответствие), такива че

$$W \cdot W \subseteq W_1, \quad W' \cdot W' \subseteq W_1', \quad f(W) \subseteq W',$$
$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) \text{ за } \forall g_1, g_2 \in W.$$

В теорията на групи и алгебри на Ли има абстратна, диференциално геометрична конструкция на алгебра на Ли по група на Ли, която обобщава горната. Доказва се, че две групи G и G' определят изоморфни алгебри на Ли $\Longleftrightarrow$ G и G' са локално изоморфни. Още един важен факт, наготово: измежду всички локално изоморфни, свързани групи на Ли, които възпроизвеждат дадена алгебра на Ли, съществува единствена с точност до изоморфизъм група, която е едносвързана (т.е. всеки затворен непрекъснат път е непрекъснато-свиваем в точка); при това, всяка друга група от локално изоморфните на тази универсална група (наричана универсална накриваща) са нейни фактори по дискретни, нормални подгрупи.

в.2) Нека $\mathcal{U}(g)$ е унитарна трансформация в Хилбертово пространство $\mathcal{H}$, която гладко зависи от $g \in G$, за матрична група на Ли $G \subseteq M_n$ и $\mathcal{U}(1) = \hat{1}$. Тогава:

$$\mathcal{U}(1 + \varepsilon h + O(\varepsilon^2)) = \hat{1} + \varepsilon\, \mathcal{U}(h) + O(\varepsilon^2), \text{ където}$$

$$\mathcal{U}(h) := d\mathcal{U}(1)(h), \text{ за } h \in \mathfrak{g}$$

Така получаваме линейно изображение: $\mathcal{U} : \mathfrak{g} \longrightarrow Op(\mathcal{H})$

Твърдим:

- $\mathcal{U}(h)$ е антиермитов, т.е., $\mathcal{U}(h)^* = -\mathcal{U}(h)$ за $\forall h \in \mathfrak{g}$.

Наистина: за $\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$ имаме

$$\langle \phi | \psi \rangle = \langle \mathcal{U}(1 + \varepsilon h + O(\varepsilon^2))\phi \,|\, \mathcal{U}(1 + \varepsilon h + O(\varepsilon^2))\psi \rangle$$

$$= \Big\langle (\hat{1} + \varepsilon\, \mathcal{U}(h) + O(\varepsilon^2))\phi \,\Big|\, (\hat{1} + \varepsilon\, \mathcal{U}(h) + O(\varepsilon^2))\psi \Big\rangle$$

$$= \langle \phi | \psi \rangle + \varepsilon \langle \mathcal{U}(h)\phi | \psi \rangle + \varepsilon \langle \phi | \mathcal{U}(h)\psi \rangle + O(\varepsilon^2).$$

$\Rightarrow \langle \mathcal{U}(h)\phi | \psi \rangle = -\langle \phi | \mathcal{U}(h)\psi \rangle$ за $\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$, т.е.

$\mathcal{U}(h)^* = -\mathcal{U}(h)$. $\square$

- Нека $\mathcal{U} : G \longrightarrow U(G)$ е унитарно представяне.

$\Rightarrow \forall h_1, h_2 \in \mathfrak{g}$ имаме $\mathcal{U}([h_1, h_2]) = [\mathcal{U}(h_1), \mathcal{U}(h_2)]$.

Тоест, алгебрата на Ли се представя в $Op(\mathcal{H})$ с антиермитови оператори.

Забележете: Комутатор на антиермитови оператори е също антиермитов оператор, $A^* = -A$ и $B^* = -B \Rightarrow [A, B]^* = -[A, B]$.

Доказателство: Нека $g_j = 1 + \varepsilon h_j + O(\varepsilon^2)$,

$$\mathcal{U}(g_j) = \hat{1} + \varepsilon\, \mathcal{U}(h_j) + O(\varepsilon^2), \quad j = 1, 2$$

Тогава замествайки в

$$\mathcal{U}(g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}) = \mathcal{U}(g_1)\,\mathcal{U}(g_2)\,\mathcal{U}(g_1)^{-1}\,\mathcal{U}(g_2)^{-1}$$

и сравнявайки двете страни на равенството до първи порядък по ε получаваме, че $\mathcal{U}([h_1, h_2]) = [\mathcal{U}(h_1), \mathcal{U}(h_2)]$. $\square$

- Нека $\mathcal{U} : G \longrightarrow U(G)$ е проективно-унитарно представяне. Тогава за $\forall h_1, h_2 \in \mathfrak{g}$:

$$\mathcal{U}([h_1, h_2]) = [\mathcal{U}(h_1), \mathcal{U}(h_2)] + i\,\omega'(h_1, h_2) \cdot \mathbb{1}$$

за $\omega'(h_1, h_2) \in \mathbb{R}$.

Доказателство: Имаме $\mathcal{U}(g_1 g_2) = e^{i\omega(g_1, g_2)}\,\mathcal{U}(g_1)\,\mathcal{U}(g_2)$,

$$\mathcal{U}(g^{-1}) = e^{i\alpha(g)}\,\mathcal{U}(g)^{-1}.$$

Ще считаме, че функциите $\omega(g_1, g_2)$ и $\alpha(g)$ зависят гладко от g_1, g_2 и g поне в околност на единицата на G. (Без доказателство ще отбележим, че това винаги може да се осигури с предефиниране $\mathcal{U}_1(g) := e^{i\varphi(g)}\,\mathcal{U}(g)$.) Тогава разписвайки

$$\mathcal{U}(g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}) = \mathcal{U}(g_1)\,\mathcal{U}(g_2)\,\mathcal{U}(g_1)^{-1}\,\mathcal{U}(g_2)^{-1}$$

и развивайки по g_1 и g_2 в околност на единицата до първи ред получаваме исканото равенство. $\square$

Продължават конспективни записки.

Коментари:

- Понеже $\mathcal{U} : \mathfrak{g} \longrightarrow Op(\mathcal{H})$ е $\mathbb{K}$-линейно, $\Rightarrow$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
  За унитарни представяния говорим само при групи и алгебри на Ли, които се разглеждат над $\mathbb{R}$.
  Можем да разширим $\mathcal{U} : \mathfrak{g} \longrightarrow Op(\mathcal{H})$ над $\mathbb{C}$ с комплексификация: $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$
  така, че $\mathcal{U}(\overline{h}) = -\mathcal{U}(h)^*$ за $\overline{h_1 + i h_2} := h_1 - i h_2$,
  и $\mathcal{U}(h_1 + i h_2) := \mathcal{U}(h_1) + i\,\mathcal{U}(h_2)$.

- Проективно представяне на алгебра на Ли е еквивалентно на представяне на т. нар. централно разширение $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K} \cdot 1$
  $$[h_1 \oplus \lambda_1 1, h_2 \oplus \lambda_2 1] := [h_1, h_2] \oplus \omega'(h_1, h_2)\, 1 .$$

<u>В резюме:</u> Една симетрия задавана от свързана група на Ли и нейно (проективно) унитарно представяне може еквивалентно да се опише от съответната алгебра на Ли и нейно (проективно) представяне с антиермитови оператори.

г) Действие на наблюдаеми. Ермитови генератори и заряди

Съгласно действието на квантови трансформации върху наблюдаеми (картина на Хайзенберг – Лекция 4):

$$A \overset{g}{\longmapsto} \mathcal{U}(g)\, A\, \mathcal{U}(g)^{-1} = A + \varepsilon\, [\mathcal{U}(h), A] + O(\varepsilon^2),$$

ако $g = 1 + \varepsilon h + O(\varepsilon^2) \in G$.

<u>Факт.</u> Действието върху A не се променя ако

$$\mathcal{U}(g) \longrightarrow \mathcal{U}_1(g) := e^{i\gamma(g)}\, \mathcal{U}(g),$$
$$\mathcal{U}(h) \longrightarrow \mathcal{U}_1(h) := \mathcal{U}(h) + \gamma'(h).$$

генераторът е фиксиран само с точност до адитивна константа

Ако така се модифицира $\mathcal{U}$, то $\omega(g_1, g_2)$ и $\omega'(h_1, h_2)$ в проективните представяния се променят и могат дори да се нулират = тривиалност на проективността на представянето.

Имаме две интерпретации на действието на алгебра на Ли:

$\mathcal{U}(h)$ – антиермитов $\iff$ $\frac{1}{i}\mathcal{U}(h)$ – ермитов

$[\mathcal{U}(h_1), \mathcal{U}(h_2)] = \mathcal{U}([h_1, h_2])$	$i\,[\frac{1}{i}\mathcal{U}(h_1), \frac{1}{i}\mathcal{U}(h_2)] = \frac{1}{i}\mathcal{U}([h_1, h_2])$
– представяне спрямо комутатора, в качеството на скобка на Ли	– представяне спрямо квантовата скобка на Поасон (като скобка на Ли) $\{\cdot,\cdot\} := i\,[\cdot,\cdot]$ (Лекция 4)

Физическа интерпретация:

Ермитовият генератор $\frac{1}{i}\mathcal{U}(h)$ се отъждествява с физическа наблюдаема наречена "заряд на симетрията".

Симетрията $\mathcal{U}(g)$ $(g \in G)$ не променя еволюцията $\{\mathcal{U}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$

$\iff$ $\mathcal{U}(g)\,\mathcal{U}(t)\,\mathcal{U}(g)^{-1} = \mathcal{U}(t)$

$\iff$ $\mathcal{U}(g)$ комутира с еволюцията $\mathcal{U}(t) = e^{itH}$

$\iff$ $[\frac{1}{i}\mathcal{U}(h), H] = 0$ $\forall$ ермитов генератор

$\iff$ $\frac{1}{i}\mathcal{U}(h)$ е запазваща се величина

– закони за запазване = симетрии на динамиката

Примери – импулси: От $[\hat{x}^j, \hat{p}_k] = i\,\delta^j_k$, $j,k = 1,2,3$

$\iff$ $e^{ia^k\hat{p}_k}\,\hat{x}^j\,e^{-ia^k\hat{p}_k}$

$$= \hat{x}^j + ia^k[\hat{p}_k, \hat{x}^j] + 0 + \dots = \hat{x}^j + a^j.$$

Следователно:

Ермитовите генератори на пространствените транслации са импулсите!

$\iff$ К.К.С. / C.C.R.

Припомняне: ермитовият генератор на транслациите по времето е енергията / Хамилтониана

$$e^{itH} = \mathcal{U}(t) \text{ – операторът на еволюцията.}$$

До тук – заряди на пространствени симетрии

– това са импулси, енергия, моменти на импулси

Заряди на вътрешни симетрии – електричен заряд и др.

2. Алгебра на (~~Ли на групата на~~) Поанкаре

↖ ще съкратим за удобство

а) Алгебри на Ли на (псевдо) ортогоналните групи.

$$x\cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \,, \qquad x\cdot y = (\Lambda x)\cdot(\Lambda y)$$

$$\hookrightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_{\ \mu_1} x^{\mu_1} \Lambda^\nu_{\ \nu_1} y^{\nu_1} = \eta_{\mu_1\nu_1} x^{\mu_1} y^{\nu_1} \quad (\forall x, y)$$

$$\hookrightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_{\ \mu_1} \Lambda^\nu_{\ \nu_1} = \eta_{\mu_1\nu_1}$$

Нека $\Lambda^\mu_{\ \mu_1} = \delta^\mu_{\mu_1} + \varepsilon\, \omega^\mu_{\ \mu_1} + O(\varepsilon^2)$

$$\hookrightarrow \omega^\mu_{\ \mu_1} \eta_{\mu\nu} + \omega^\nu_{\ \nu_1} \eta_{\mu\nu} = 0$$

$$\hookrightarrow \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \,, \quad \omega_{\mu\nu} := \omega^{\nu_1}_{\ \mu} \eta_{\nu_1\nu} \,,$$

$$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu} \,, \quad \omega^{\mu\nu} = \omega^\nu_{\ \mu_1} \eta^{\mu_1\mu} .$$

Базисни генератори в алгебрата на Ли:

$$(X_{\alpha\beta})^\mu_{\ \nu} := \delta^\mu_\alpha \eta_{\beta\nu} - \delta^\mu_\beta \eta_{\alpha\nu}$$ – базисни за $\alpha < \beta$.

Пресмятаме:

$$([X_{\alpha\beta}, X_{\mu\nu}])^\rho_{\ \sigma} = (X_{\alpha\beta})^\rho_{\ \sigma_1} (X_{\mu\nu})^{\sigma_1}_{\ \sigma} - (X_{\mu\nu})^\rho_{\ \sigma_1} (X_{\alpha\beta})^{\sigma_1}_{\ \sigma}$$

$$\hookrightarrow [X_{\alpha\beta}, X_{\mu\nu}] \overset{?}{=} \eta_{\alpha\nu} X_{\beta\mu} + \eta_{\beta\mu} X_{\alpha\nu} - \eta_{\alpha\mu} X_{\beta\nu} - \eta_{\beta\nu} X_{\alpha\mu}$$

– това са определящите комутационни съотношения (defining relations) за алгебрата на Ли, която се бележи с $so(p,q)$. ← малки букви

$$\eta_{\mu,\nu} : \mathbb{R}^{p,q} \longrightarrow so(p,q) \,, \quad \dim = \frac{n(n-1)}{2}$$

$n = p + q$

В частност, $so(3)$: $X_{12} =: i J_3$ (и цикл. по 1,2,3)

$$[J_1, J_2] = i J_3 \quad \text{(и цикл. по 1,2,3)}$$

б) Алгебра на Поанкаре. Група: $\{(a, \Lambda)\}$

Матрична реализация: $\begin{array}{c|cc} & 0\,1\,2\,3 & 4 \\ \hline \begin{matrix}0\\1\\2\\3\end{matrix} & \Lambda & a \\ 4 & 0 & 1 \end{array}$.

$$(0,\Lambda)(a,1)(0,\Lambda)^{-1} = (\Lambda a, 1),$$

$$(a,1) = e^{a^\alpha Y_\alpha} \quad \text{- транслации},$$

$$(0,\Lambda) = e^{\omega^{\mu\nu} X_{\mu\nu}} \quad \text{- псевдо-ротации}$$

$$\hookrightarrow \quad (0,\Lambda)\, a^\alpha Y_\alpha\, (0,\Lambda)^{-1} = (\Lambda a)^\alpha Y_\alpha .$$

$$\Lambda = 1 + \varepsilon X_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon Z(\varepsilon),$$

$$\Lambda^{-1} = 1 - \varepsilon X_{\mu\nu} + O(\varepsilon^2) = 1 - \varepsilon Z + (-\varepsilon Z)^2 + \cdots$$

$$\hookrightarrow \quad [X_{\mu\nu}, a^\alpha Y_\alpha] = (X_{\mu\nu} a)^\alpha Y_\alpha$$

$$= (X_{\mu\nu})^\alpha_{\ \beta}\, a^\beta Y_\alpha = a_\nu Y_\mu - a_\mu Y_\nu$$

$$\hookrightarrow \quad [X_{\mu\nu}, Y_\alpha] = \eta_{\nu\alpha} Y_\mu - \eta_{\mu\alpha} Y_\nu$$

- това заедно с определящите съотношения на $so(3,1)$ са определящите съотношения на алгебрата на Поанкаре.

$$\dim \text{ Алг. на Поанкаре} = \underbrace{\frac{4\cdot 3}{2}}_{\text{Лоренц}} + \underbrace{4}_{\text{транслации}} = 10$$

3. Унитарни представяния

$$(-)\,\mathcal{U}(X_{\alpha\beta}) =: i\hat{M}_{\alpha\beta}\,,\quad (-)\,\mathcal{U}(Y_\mu) =: i\hat{P}_\mu$$

– ермитови генератори.

Комутационните съотношения на представянето:

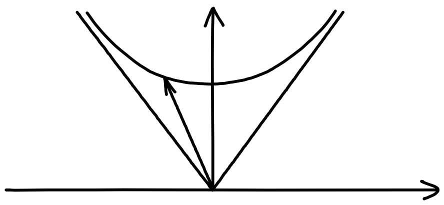
$$[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] = 0\,,$$

$$i[\hat{M}_{\alpha\beta}, \hat{P}_\mu] = \eta_{\alpha\mu}\hat{P}_\nu - \eta_{\beta\nu}\hat{P}_\nu\,,$$

$$i[\hat{M}_{\alpha\beta}, \hat{M}_{\mu\nu}] = \eta_{\alpha\mu}\hat{M}_{\beta\nu} + \eta_{\beta\nu}\hat{M}_{\alpha\mu} - \eta_{\alpha\nu}\hat{M}_{\beta\mu} - \eta_{\beta\mu}\hat{M}_{\alpha\nu}\,.$$

Нека $\hat{\mathfrak{m}}^2 := -\hat{p}^\mu\hat{p}_\mu = \hat{p}_0^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2 - \hat{p}_3^2$

Съвместния спектър на $\hat{P}_\mu$: $\hat{P}_\mu|p\rangle = p_\mu|p\rangle$ (Лекция 9).



От принципа за положителност на енергията $\Rightarrow$ $\hat{\mathfrak{m}}^2 \geq 0$

понеже $\hat{\mathfrak{m}}^2|p\rangle = -p^\mu p_\mu|p\rangle$

<u>Забележка.</u> $\langle p|p'\rangle = \delta(p-p')$ – обобщени вектори

$$|p\rangle \notin \mathcal{H}\,,\qquad \mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_{-1}$$

като например, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

rigged Hilbert space

"обогатено" Хилбертово простр.

<u>Факт.</u> $[\hat{\mathfrak{m}}^2, \hat{P}_\mu] = 0 = [\hat{\mathfrak{m}}^2, \hat{M}_{\mu\nu}]$

централен оператор

Сега ще преминем към изучаване на неприводимите (irreducible) унитарни представания на групата (или алгебрата) на Поанкаре.

Подобно на Лекция 6 (началото), определеме инвариантно подпространство $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$ на представяне: то е инвариантно за всички представени оператори $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $A(\mathcal{H}_1) \subseteq \mathcal{H}_1$.

За унитарни представяния: ако $\mathcal{H}_1$ е инвариантно, то и $\mathcal{H}_1^\perp$ е инвариантно. $\Rightarrow$ получаваме

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H} & = & \mathcal{H}_1 & \oplus & \mathcal{H}_2 \\ U(g)\downarrow & & U_1(g)\downarrow & & U_2(g)\downarrow \\ \mathcal{H} & = & \mathcal{H}_1 & \oplus & \mathcal{H}_2 \end{array} \qquad (\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_1^\perp).$$

права сума (direct sum) на представяния.

Неприводимо представяне е представяне без нетривиални инвариантни подпространства. $\Rightarrow$ то не може да се разложи в права сума, както по-горе. Друго следствие: Всяко унитарно представяне може да се разложи в права сума (евентуално и прав "интеграл") на неприводими представяния.

<u>Лема на Шур.</u> (Schur's Lemma)

$\forall$ централен оператор в неприводимо представяне е кратен на $\hat{1}$.

<u>Аргумент:</u>

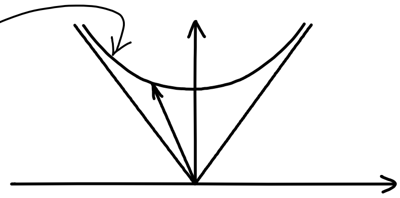
иначе ще има нетривиално собствено подпростр. и

$\Rightarrow$ нетрив. инвариантно подпростр.

<u>Следствие.</u> Във $\forall$ неприводимо унитарно представяне на алгебрата на Поанкаре (с неотрицателна енергия):

$$\hat{\mathfrak{M}}^2 = m^2 \cdot 1 \qquad (m^2 \geq 0). \qquad \square$$

Нека за $\forall\ p \in \Gamma_m^+$
$p = (p_\mu)_{\mu=0}^3$:



$$\mathcal{H}(p) := \{ \Psi \in \mathcal{H}_{-1} \mid \hat{P}_\mu \Psi = p_\mu \Psi \}$$

<u>Факт.</u> $U(\Lambda) : \mathcal{H}(p) \longrightarrow \mathcal{H}(\Lambda p)$

<u>Доказателство:</u> $U(\Lambda)\, \hat{P}_\mu\, U(\Lambda)_{-1} = \Lambda_\mu^\nu\, \hat{P}_\nu$

$\hookrightarrow \quad \Psi \in \mathcal{H}(p) \iff \hat{P}_\mu \Psi = p_\mu \Psi$

$$\iff \hat{P}_\mu U(\Lambda)\Psi = U(\Lambda)(U^{-1} P_\mu U)\Psi$$
$$= (\Lambda^{-1})_\mu^\nu \hat{P}_\nu \Psi = (\Lambda^{-1})_\mu^\nu p_\nu \Psi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{псевдоортогон.}}}{=} (\Lambda p)_\mu \Psi$$

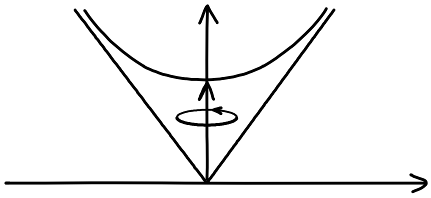
$$\iff \Psi \in \mathcal{H}(\Lambda p) \qquad \square$$

Итака,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(p) \arrow[r, "U(\Lambda_1)"] \arrow[rr, bend right, "U(\Lambda_2\Lambda_1)"'] & \mathcal{H}(\Lambda_1 p) \arrow[r, "U(\Lambda_2)"] & \mathcal{H}(\Lambda_2\Lambda_1 p) \end{tikzcd}$$

Нека $SO(3,1)_p := \{ \Lambda \in SO(3,1) \mid \Lambda p = p \}$
=: стационарна подгрупа / стабилизатор / stabilizer на p

За $p = (1,0,0,0)$: $SO(3,1)_p = SO(3)$.



$\Rightarrow$ $\mathcal{H}(p)$ е унитарно представяне на $SO(3,1)_p$ и в частност, $\mathcal{H}(1,0,0,0)$ е представяне на $SO(3)$.

Освен това, $\mathcal{H}(p)$ е неприводимо представяне за $SO(3,1)_p$
$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{H}$ е неприводимо представяне за алгебрата на Поакаре.
(По-прецизно е да пишем $Spin_0(3,1)_p$, но на ниво алгебри на Ли – няма разлика.)

Следствие. (Теорема на Вигнер / Wigner.)

$\forall$ нерприводимо унитарно представяне на алгебрата на Поанкаре се характеризира от реален параметър

μ (≤ 0 – при неотрицателност на енергията)

и неприводимо представяне на $SO(3,1)_p$

за някое $p \in \Gamma_\mu^{(+)}$. При $\mu < 0$, последното е винаги неприводимо представяне на $SO(3)$ и в този случай $m := \sqrt{-\mu}$ се нарича също маса на представянето.

Забележка. При $m = 0$, $p \in \Gamma_0^+ \equiv V^+$

$SO(3,1)_p \cong$ Групата на Евклид (над $\mathbb{R}^3$)