N. N.
20.12.13
-1-

Квантова теория на полето и елементарните частици: Лекция 11

Николай М. Николов

Насрочваме извънредна лекция за

8 януари 2014, СРЯДА, от 12:15 до 15:00,

която ще започне в аудитория 304 на ФМИ и при нужда ще се преместим, като ще оставим бележка на аудиторията и на портала.

С червено са отбелязани части от лекцията, в които е имало пропуски или са приведени допълнителни сведения.

Поправка към Лекция 10 (v1):
Където е цитирана Лекция 6 - да се чете, Лекция 5 !

Уравнение на Клайн-Гордън / Klein-Gordon (конспективни записки)

1. Техническо предисловие: обобщени базиси в Хилбертово пространство

Нека $\mathcal{H}$ – Хилбертово пространство

Ортонормиран базис в $\mathcal{H}$ е $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}$, такава че:

- $\langle e_{j_1} | e_{j_2} \rangle = \delta_{j_1, j_2}$,
- $\forall \psi \in \mathcal{H} : \quad \psi = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j e_j .$

Забележка: С това предполагаме и, че $\mathcal{H}$ е сепарабелно.

Следствие. $\psi_j = \langle e_j | \psi \rangle$.

- за повече сведения - У. Рудин, Реален и комплексен анализ, глава 4.

В означения на Дирак: $e_j \equiv |j\rangle$,

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j |j\rangle , \quad \psi_j = \langle j | \psi \rangle .$$

Нека съгласно Лекция 5, стр. 7, $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_s$ е пълна система от съвместни наблюдаеми, които са диагонализируеми ($\Leftrightarrow$ имат само дискретен спектър) и нека $\{|\xi_1, \dots, \xi_s)\}$ е ортонормиран базис на $\mathcal{H}$ състоящ се от общи собствени вектори:

$$\hat{A}_r |\xi_1, \dots, \xi_s) = \xi_r |\xi_1, \dots, \xi_s),$$

$$\psi = \sum_{(\xi_1, \dots, \xi_s) \in \sigma} \psi_{\xi_1, \dots, \xi_s} |\xi_1, \dots, \xi_s),$$

$$\psi_{\xi_1, \dots, \xi_s} = \langle \xi_1, \dots, \xi_s | \psi \rangle,$$

където $\sigma \subseteq \mathbb{R}^s$ е съвместния спектър на $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_s$.

Обобщаваме: в случай на една квантова частица един от най-разпространените пълни набори от наблюдаеми е

$\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3$ - операторите на 3-мерния импулс

и $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_s$ - оператори описващи вътрешното състояние на частицата.

Обобщен ортонормиран базис от общи собствени вектори:

$$|\underline{k}, (\xi_r)\rangle \equiv |k_1, k_2, k_3; \xi_1, \dots, \xi_s\rangle,$$

$$\hat{P}_j |\underline{k}, (\xi_r)\rangle = k_j |\underline{k}, (\xi_r)\rangle,$$

$$\hat{A}_m |\underline{k}, (\xi_r)\rangle = \xi_m |\underline{k}, (\xi_r)\rangle.$$

Ортонормираност:

$$\langle \underline{k}', (\xi'_r) | \underline{k}, (\xi_r)\rangle = \delta(\underline{k}' - \underline{k}) . \delta_{(\xi'_r), (\xi_r)}$$

$$\left(\delta_{(\xi'_r), (\xi_r)} := \prod_{r=1}^{s} \delta_{\xi'_r, \xi_r} \right).$$

Разлагане по базис:

$$\psi = \int d^3k \sum_{(\xi_1, \dots, \xi_s) \in \sigma} \psi_{\xi_1, \dots, \xi_s}(k_1, k_2, k_3) \, |\underline{k}, (\xi_r)\rangle,$$

$$\psi_{(\xi_r)}(\underline{k}) \equiv \psi_{\xi_1, \dots, \xi_s}(k_1, k_2, k_3)$$ – вълнова функция на състоянието

$$\Rightarrow \quad \|\psi\|^2 = \int d^3k \sum_{(\xi_1, \dots, \xi_s) \in \sigma} |\psi_{\xi_1, \dots, \xi_s}(k_1, k_2, k_3)|^2.$$

С други думи, в този базис получаваме изоморфизъм

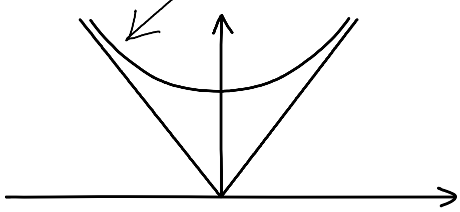
$$\mathcal{H} \cong L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^N), \quad N = \# \sigma$$

Обикновено $N < \infty$ – броя на независимите вътрешни състояния на частицата е краен.

2. Как това съответства на класификацията на Вигнер от Лекция 10?

В Лекция 10 построихме обобщен базис

$$|k, \sigma\rangle, \quad k \in \Gamma^{+}_{-m^2} \quad (\text{нека } m > 0)$$



$\sigma = 1, \ldots, N$ - индекс на ортонормиран базис на неприводимо унитарно представяне на $so(3)$.

Но $\Gamma^{+}_{-m^2} \cong \mathbb{R}^3$! k_0 е функция на k_1, k_2, k_3

$$-(k_0)^2 + (k_1)^2 + \cdots + (k_3)^2 = -m^2 \quad \text{и} \quad k_0 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad k_0 = \sqrt{\underline{k}^2 + m^2}.$$

С други думи, в неприводимо представяне на алгебрата на Поанкаре единствено $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ и $\hat{P}_3$ са независими наблюдаеми, а $\hat{P}_0$ (енергията) е функция от тях.

$$\hat{P}_0 = \sqrt{\hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \hat{P}_3^2 + m^2}$$

Забележка. Импулсите $\hat{P}_\mu$ и k_μ възникват естествено с долни индекси, т.е., като ковектори. Разбира се, ние винаги можем да им вдигнем индексите, $\hat{P}^\mu = \eta^{\mu\nu}\hat{P}_\nu$, но тогава

$$\hat{P}^0 = -\hat{P}_0 \quad !$$

$\Rightarrow$ Един от двата се избира за енергия (по конвенция), да речем, $\hat{P}_0$ ($\Rightarrow \hat{P}_0$ - неотрицателен оператор).

3. Скаларна частица (scalar particle)

$\equiv$ безспинова (spiningless) частица

$\underset{def}{=}$ само едно вътрешно състояние

$\equiv$ представянето на $SO(3)$ е едномерно

$= \hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3$ – пълен набор от наблюдаеми

$\Rightarrow |\underline{k}\rangle$ – обобщен ортонормиран базис,

$$\langle \underline{k}' | \underline{k} \rangle = \delta(\underline{k}' - \underline{k})$$

$$\psi = \int d^3k \; \psi(\underline{k}) \, |\underline{k}\rangle, \quad \|\psi\|^2 = \int d^3k \; |\psi(\underline{k})|^2$$

(разложение на $\psi \in \mathcal{H}$ по обобщения базис).

Еволюция на състоянието

$$\Psi(\underline{k}, t) = e^{i\hat{P}_0 t}\, \Psi(\underline{k})$$

↑ оператор на еволюцията.

Но $\hat{P}_0 = \sqrt{\hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \hat{P}_3^2 + m^2}$.

$$\Rightarrow \quad \Psi(\underline{k}, t) = e^{i\hat{P}_0 t}\, \Psi(\underline{k}) = e^{i\,\mathcal{E}(\underline{k})\,t}\, \Psi(\underline{k}),$$

където $\mathcal{E}(\underline{k}) = \sqrt{\underline{k}^2 + m^2}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\underline{k}, t) = i\sqrt{\underline{k}^2 + m^2}\; \Psi(\underline{k}, t).$$

$$\Rightarrow \quad \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \underline{k}^2 + m^2 \right) \Psi(\underline{k}, t) = 0.$$

<u>Отстъпление.</u> Фурие-трансформации

$$\Psi(\underline{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3\underline{k}\; e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}}\, \Psi(\underline{k})$$

- унитарна трансформация $L^2(\mathbb{R}^3) \cong L^2(\mathbb{R}^3)$

<u>Внимание.</u> Вместо да слагаме вълна "~" на Фурие-трансформираната функция, ние ще приемем, че променливите, $\underline{x}$ или $\underline{k}$, носят името на функцията, както е по-горе.

Така, $\int d^3x\, |\Psi(\underline{x})|^2 = \int d^3k\, |\Psi(\underline{k})|^2$.

Нека $\Psi(\underline{x},t) := (2\pi)^{-3/2}\int d^3k\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}}\, \Psi(\underline{k},t)$.

$$\Longleftrightarrow \quad \Psi(\underline{k},t) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3x\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}}\, \Psi(\underline{x},t).$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \underline{k}^2 + m^2\right)\Psi(\underline{k},t)$$

$$= (2\pi)^{-3/2}\int d^3x \left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \underline{k}^2 + m^2\right) e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}}\,\Psi(\underline{x},t)$$

$$= (2\pi)^{-3/2}\int d^3x\, \Psi(\underline{x},t)\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\right)^2 + m^2\right) e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}}$$

$$= (2\pi)^{-3/2}\int d^3x\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\right)^2 + m^2\right)\Psi(\underline{x},t)$$

интегрираме по части

$$\Longrightarrow \quad \left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\right)^2 + m^2\right)\Psi(\underline{x},t) = 0$$

– уравнение на Клайн-Гордън (за еволюцията на вектора на състояние, т.е., вълновата функция).

Ако означим, $t = x^0$, $\underline{x} = (x^j)_{j=1}^3$, $x = (x^0, \underline{x})$, $\Psi(\underline{x},t) \equiv \Psi(x)$

$$\Longrightarrow \quad (\Box - m^2)\Psi(x) = 0, \quad \Box = \partial_{x^\mu}\partial_{x_\mu}.$$