1. Пълни системи от наблюдаеми

$\rightarrow$ пълна система от квантови числа

Ако измерим A_1 - наблюдаема, $A_1 \phi = \xi_1 \phi$

по проекционния постулат преминаваме във ϕ,

но ако ϕ е единствено собствено състояние.

Иначе: $A_2, A_3, \ldots$

- докато $\exists!\, \mathbb{C}\phi \left(\in \mathbb{P}(\mathcal{H})\right)$: $A_j \phi = \xi_j \phi$

Това е първото условие за пълнота

Второто: $\forall j \nexists F$:

$$A_j = F\left(A_1, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots\right)$$

Например, в неприводимо представяне на алгебрата на Поакаре

$$\hat{P}_0 = \sqrt{\hat{\vec{P}}^2 + m^2} \ , \quad \hat{\vec{P}}^2 := \hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \hat{P}_3^2$$

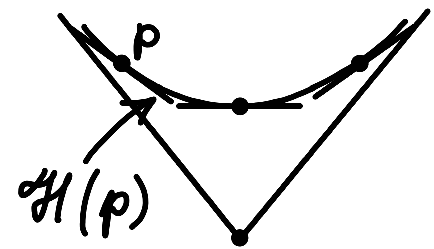
$\Rightarrow$ $\hat{P}_0$ трябва да се изключи от пълна система от наблюдаеми

Пълен набор: $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3, \hat{J}_3,$

$$\Psi(p) \in \mathcal{H}(p), \quad p \in \Gamma^+_{-m^2}$$

$$\parallel$$

$$\left(\psi_j(\underline{p})\right)_j$$



Пример – масивно векторно поле

$$\Psi_\mu(p)\,, \qquad p^\mu \Psi_\mu(p) = 0\,,$$

при фурие

$$\Psi_\mu(p) = A_\mu(p)\,\Omega$$

$$\Rightarrow \quad \left(\Box - m^2\right) A_\mu(x) = 0\,, \quad \partial_{x_\mu} A_\mu(x) = 0$$

$$\left(p_\mu \gamma^\mu\right) \psi(p) = 0$$

$$\left(i\partial_{x^\mu} \gamma^\mu\right) \psi(x) = 0$$

$$\left(\Box - m^2\right) \psi(x) = 0$$

2. $SO(3)$, $so(3)$, $SU(2)$

локално изоморфни групи на Ли

тяхната алгебра на Ли

$$so(3) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \{ iJ_1, iJ_2, iJ_3 \}$$

$$\frac{1}{i}[J_1, J_2] = J_3 \quad \circlearrowleft \quad \text{циклично по } 1, 2, 3$$

$$[J_j, J_k] = i\,\varepsilon_{jkl} J_l \quad , \quad \varepsilon_{jkl} = \begin{cases} 0 - 2 \text{ равни} \\ \mathrm{sgn}(j,k,l) \end{cases}$$

сумиране

Забележка 1. $so(3) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{iJ_k\}_{k=1}^{3}$

$so(3) \oplus i\,so(3)$

$$\cong sl(2,\mathbb{C}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{F, G, H\}$$

$$[F,G] = H, \quad [H,F] = 2F, \quad [H,G] = 2G$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U}(\mathcal{I}_k) =: \widehat{\mathcal{I}}_k$$

Пълна система от наблюдаеми

$$\hat{\vec{J}}^2 := \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^3 , \quad \hat{J}_3$$

оператор на квадрата на   проекция на
ъгловия момент

Наблюдение 1: $[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_k] = 0$

Забележка. $\hat{\vec{J}}^2$ – (оператор на) Казимир (Casimir)

– съвместен собствен ортонормиран базис

$$\hat{\vec{J}}^2 |\alpha, \beta\rangle = \alpha |\alpha, \beta\rangle, \quad \hat{J}_3 |\alpha, \beta\rangle = \beta |\alpha, \beta\rangle$$

Повишаващи – понижаващи оператори

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i \hat{J}_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_\pm] = 0 \\ &[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm J_\pm \end{aligned}$$

Проверка: $[\hat{J}_3, \hat{J}_1 + i\hat{J}_2] = i\hat{J}_2 - i(i\hat{J}_1)$

$\mathrm{sgn}(3,1,2) = +1$, $\mathrm{sgn}(3,2,1) = -1$

Забележка 1 - продължение:

$H \longleftrightarrow iJ_3$, $F \longleftrightarrow J_+$, $G \longleftrightarrow J_-$

В частност: $[J_+, J_-] = J_3$

Класификация на неприводимите крайно-мерни представяния на $sl(2,\mathbb{C}) \cong so(3) + i\,so(3)$

Старши вектор: $\hat{J}_3 |\alpha, \beta_{max}\rangle = \beta_{max} |\alpha, \beta\rangle$

Младши вектор: $\hat{J}_3 |\alpha, \beta_{min}\rangle = \beta_{min} |\alpha, \beta\rangle$

$\hat{J}_+ |\alpha, \beta_{max}\rangle = 0 \, , \quad \hat{J}_- |\alpha, \beta_{min}\rangle = 0$

$$J_+ |\alpha, \beta\rangle :=$$

__Теорема.__ Във всяко неприводимо унитарно представяне на $so(3)$: $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{|\alpha,\beta\rangle\}$,

$\beta \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$ за $j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}$,

$\alpha = j(j+1)$,

$$\hat{J}_+ |\alpha, \beta+1\rangle = \left((j+\beta+1)(j-\beta)\right)^{1/2} |\alpha,\beta\rangle,$$

$$\hat{J}_+ |\alpha, \beta\rangle = \left((j+\beta+1)(j-\beta)\right)^{1/2} |\alpha,\beta+1\rangle.$$

$$(j) := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ |\alpha, \beta\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha = j(j+1) \\ \beta \in \{-j, -j+1, \dots, j\} \end{array} \right\}$$

$$\dim (j) = 2j+1.$$

Пример: $\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbb{C}^2$, $\hat{J}_k = \frac{1}{2}\sigma_k$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

– матрици на Паули

$$\hat{J}_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тензорно произведение на представяния

$$[\hat{J}^{(1)}_{k_1}, \hat{J}^{(2)}_{k_2}] = 0 \quad , \quad [\hat{J}^{(r)}_1, \hat{J}^{(r)}_2] = i\hat{J}^{(r)}_3$$

$\Rightarrow \quad \hat{J}_k = \hat{J}^{(1)}_k + \hat{J}^{(2)}_k$ е пак представяне

<u>Теорема</u> $(j_1) \otimes (j_2)$

$$\cong \left(\frac{|j_1 - j_2|}{2}\right) \oplus \left(\frac{|j_1 - j_2|}{2} + 1\right) \oplus \cdots$$

$$\oplus \left(\frac{j_1 + j_2}{2}\right)$$

Група и алгебра на Лоренц

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = i M_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + i M_{\nu\beta} \eta_{\mu\alpha} - i M_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - i M_{\nu\alpha} \eta_{\mu\beta}$$

$$J^{(1,2)}_{l} := \frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} M^{jk} \pm i M^{0l}$$

$$\Rightarrow \quad so(3,1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \left(so(3) \oplus so(3) \right) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} .$$

$\Rightarrow$ Крайно-мерните представяния

$$(j_1, j_2) := (j_1) \otimes (j_2)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$ – представяне на алгебрата на Лоренц

$$[[\gamma_\mu, \gamma_\nu], [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]] =$$

$$= [[[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \gamma_\alpha], \gamma_\beta] + [\gamma_\alpha, [[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \gamma_\beta]]$$

$$\{\{A, B\}, C\} = ABC + BAC + CAB + CBA$$

$$\{B, \{A, C\}\} = BAC + BCA + ACB + CAB$$

$$[A, [B, C]] = \{\{A, B\}, C\} - \{B, \{A, C\}\}$$