N. N.
17.01.14
-1-

Квантова теория на полето и елементарните частици: Лекция 15

Николай М. Николов

Допълнения и промени са поставени в червен цвят.

Конспективни записки.

Последна лекция: избрани теми.

1. Зета-функцията на Риман в статистическата квантова физика и теория на полето

В статистическата квантова физика широко се използват методите на К.Т.П. и по-специално, на пространството на Фок, понеже те са свързани с описание на многочастични системи с променлив или неустановен брой частици. Например, идеален бозонен газ е система от идентични бозонни частици, които не взаимодействат по между си. В пространството на Фок те се описват с Хамилтониан

$$H = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \, a_j^* a_j \,,$$

където ε_j е спектъра от едночастични енергии, а a_j^* и a_j са съответните оператори на раждане и унищожаване. В статистическата физика, според така наречената теория на Гибс (Gibbs), главния мост от микроскопичното описание към макроскопичното, термодинамично описание е

$$Z(\beta) := \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H},$$

което се нарича статистическа сума (partition function) и където

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{\substack{\text{ортонормиран} \\ \text{базис}}} \langle \phi_\xi | A \phi_\xi \rangle$$

– следа на оператора A, и

$$\beta = \frac{1}{k_B T}, \quad T \text{ – абсолютна температура}, \quad k_B \text{ – константа на Болцман}.$$

Ортонормиран базис в пространство на Фок:

числа на заселване

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ \mathbb{N}_0}}{|n_1}, \underset{\substack{\Uparrow \\ \mathbb{N}_0}}{n_2}, \ldots \rangle := C_{n_1, n_2, \ldots} (a_1^*)^{n_1} (a_2^*)^{n_2} \cdots \Omega$$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и само краен брой $n_j \neq 0$.

$$H | n_1, n_2, \ldots \rangle = (n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \cdots) | n_1, n_2, \ldots \rangle$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\beta H} | n_1, n_2, \ldots \rangle$$

$$= e^{-\beta(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \cdots)} | n_1, n_2, \ldots \rangle .$$

$$\Rightarrow \quad Z(\beta) = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}$$

$$= \sum_{n_1, n_2, \ldots \in \mathbb{N}_0} \langle n_1, n_2, \ldots | e^{-\beta H} | n_1, n_2, \ldots \rangle$$

$$= \sum_{n_1, n_2, \ldots \in \mathbb{N}_0} \underbrace{\langle n_1, n_2, \ldots | n_1, n_2, \ldots \rangle}_{1} e^{-\beta(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \cdots)}$$

$$= \sum_{n_1, n_2, \ldots \in \mathbb{N}_0} e^{-\beta(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \cdots)}$$

$$= \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + e^{-\beta \varepsilon_j} + e^{-2\beta \varepsilon_j} + \cdots \right) \equiv \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta \varepsilon_j}$$

тъждество на Ойлер

$$= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon_j}} \quad \Rightarrow \quad Z(\beta) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon_j}} .$$

<u>Следствие.</u> Ако $\varepsilon_j = \ln p_j$, където p_j е j-тото по ред просто число, то

$$Z(\beta) \equiv \zeta(\beta) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta}$$

зета функцията на Риман.

2. Повторение на края на последната лекция или, формула на Гел-Ман и Лоу (Gell-Mann and Low)

Функции на Грийн

$$G(x_1,\dots,x_n) := \langle \Omega | T(\phi(x_1)\cdots\phi(x_n))\Omega\rangle$$

$$\equiv \langle \Omega | \phi(x_{j_1})\cdots\phi(x_{j_n})\Omega\rangle, \text{ където } x^0_{j_1} \geq \cdots \geq x^0_{j_n}$$

Формули на Гел-Ман и Лоу:

а) Нека $W(t_1,t_2) = e^{iH_0t_1}e^{-iH(t_1-t_2)}e^{-iH_0t_2}$

което според Лекция 3:

$$W(t_1,t_2) = T\text{-}\exp\left(-i\int_{t_1}^{t_2} H_1(t)\,dt\right)$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_1}^{t_2}d\tau_1\cdots\int_{t_1}^{t_2}d\tau_n\, T\big(H_1(\tau_1)\cdots H_1(\tau_n)\big)$$

и $H_1(t) = e^{iH_0t}(H-H_0)e^{-iH_0t}$.

Тогава

$$\Omega = \frac{W(0,-\infty)\Omega_0}{\langle\Omega|W(0,-\infty)\Omega_0\rangle}$$

- връзка между вакуумът при взаимодействие и вакуумът Ω_0 без взаимодействие.

б) $G(z_1,\dots,z_N)$

$$= \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}dt_1\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}dt_n$$

$$\times\langle\Omega_0|T(\varphi_0(z_1)\cdots\varphi_0(z_N)\,H_1(t_1)\cdots H_1(t_n))\Omega_0\rangle$$

$$= \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n$$

$$\times\langle\Omega_0|T(\varphi_0(z_1)\cdots\varphi_0(z_N)\,h_1(\varphi_0)(x_1)\cdots h_1(\varphi_0)(x_n))\,\Omega_0\rangle,$$

където $H_1(t) = \int d^3x\; h_1(\varphi_0)(x)\Big|_{x^0=t}$

$$\equiv e^{iH_0t}\int d^3x\; h_1(\varphi)(\underline{x},0)\; e^{-iH_0t}$$

(например, $h_1(\varphi_0)(x) = \frac{\lambda}{4!}:\varphi_0(x)^4:$)

и $Z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n$

$$\times\langle\Omega_0|T(h_1(\varphi_0)(x_1)\cdots h_1(\varphi_0)(x_n))\,\Omega_0\rangle,$$

$$\equiv\langle\Omega_0|S\,\Omega_0\rangle$$

Главни стъпки от извода на б): нека $z_1^0 \geq \cdots \geq z_N^0$

$$\Rightarrow \; G(z_1, \dots, z_N) = \langle \Omega \,|\, \varphi(z_1) \cdots \varphi(z_N)\, \Omega \rangle$$

$$= \langle \Omega \,|\, e^{iHz_1^0} e^{-iH_0 z_1^0} \varphi_0(z_1)\, W(z_1^0, z_2^0)\, \varphi_0(z_2)$$

$$\cdots \varphi_0(z_{N-1})\, W(z_{N-1}^0, z_N^0)\, \varphi_0(z_N)\, e^{iH_0 z_N^0} e^{-iHz_N^0}\, \Omega \rangle$$

$$= \frac{1}{Z} \langle \Omega_0 \,|\, W(\infty, z_1^0)\, \varphi_0(z_1)\, W(z_1^0, z_2^0)\, \varphi_0(z_2)$$

$$\cdots \varphi_0(z_{N-1})\, W(z_{N-1}^0, z_N^0)\, \varphi_0(z_N)\, W(z_N^0, -\infty)\, \Omega_0 \rangle$$

3. Повторение от предната лекция във връзка с редукционните формули

Редукционните формули, наречени още LSZ формули (Lehmann / Леман – Symanzik / Симанзик – Zimmerman / Цимерман) свързват пълните фурие трансформации на Грийновите функции

$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_N) := (2\pi)^{-\frac{4}{2}N}$$

$$\times \int d^4x_1 \cdots d^4x_N \; e^{ip_1\cdot x_1 + \cdots + ip_N \cdot x_N}\, G(x_1, \dots, x_N)$$

S амплитудите на разсейване:

$$\langle \underline{p}_1, \dots, \underline{p}_k | S | \underline{p}_{k+1}, \dots, \underline{p}_N \rangle$$

Предписанието

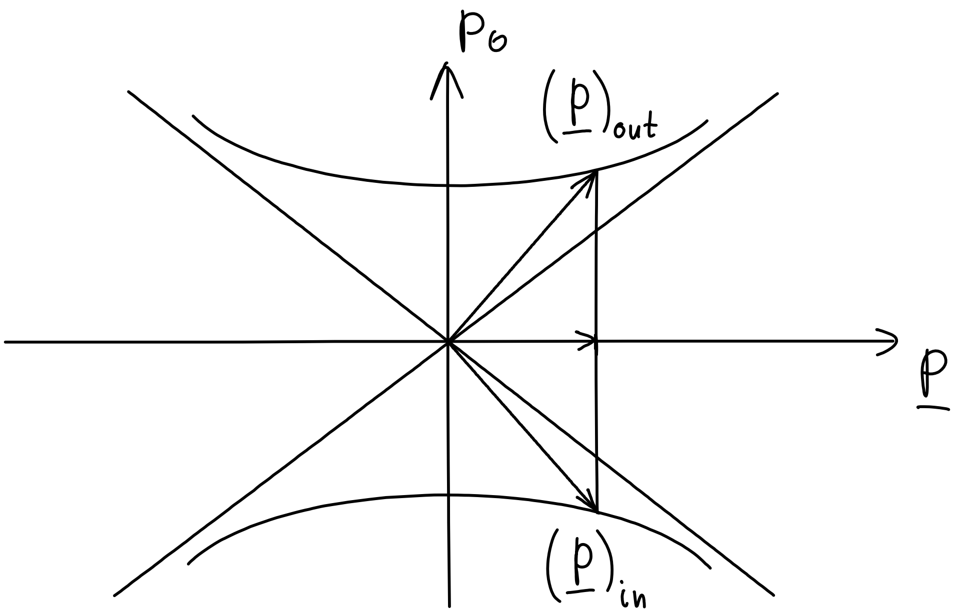
$\langle \underline{p}_1, \dots, \underline{p}_k | S | \underline{p}_{k+1}, \dots, \underline{p}_N \rangle$ се изразява

(пропорционално е на)

$\tilde{G}\big((\underline{p}_1)_{out}, \dots, (\underline{p}_k)_{out}, (\underline{p}_{k+1})_{in}, \dots, (\underline{p}_N)_{in}\big)$,

където за $\underline{p} \in R^3$

$$(\underline{p})_{out/in} := \left(\pm \varepsilon(\underline{p}), \underline{p}\right) \in \Gamma^{\pm}_{-m^2}$$



Механизъм на извеждане:

$$|\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_k> \sim \Psi(\underline{p}_1)^* \cdots \Psi(\underline{p}_k)^* \Omega$$

оператори на раждане

а $\tilde{\varphi}_0(\underline{p}, t)$ и от там $\varphi_0(x)$ се изразяват с $\Psi(\underline{p})^*$.

4. Функционален интеграл в К.Т.П.

Нека $\varphi_i(\omega)$ - система от Гаусови случайни величини ($\omega \in \mathcal{M}$ - вероятностно пространство с мярка μ_0).

Например $\mathcal{M} = \mathbb{R}^F$

$\varphi_i : \mathbb{R}^F \to \mathbb{R}$ - i-та проекция

$\omega = (\varphi_i)_{i=1}^F$

$$d\mu_0(\omega) = \frac{1}{Z_0} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} P_{ij} \varphi_i \varphi_j} \prod_{j=1}^F d\varphi_j$$

$(P_{i,j})_{F \times F}$ е положително определена реална матрица

Нека $I(\omega) = \sum_{j_1,\dots,j_4} v_{j_1\dots j_4}\, \varphi_{j_1}(\omega)\cdots\varphi_{j_4}(\omega)$

$$d\mu(\omega) = \frac{1}{Z}\, e^{-I(\omega)}\, d\mu_0(\omega)$$

– вероятностна мярка:

$$Z = \int d\mu_0(\omega)\, e^{-I(\omega)}.$$

$$\langle \varphi_{i_1}\cdots\varphi_{i_N}\rangle := \int_{\mathcal{M}} d\mu(\omega)\, \varphi_{i_1}(\omega)\cdots\varphi_{i_N}(\omega)$$

– моменти на μ.

$$\Rightarrow \quad \langle \varphi_{i_1}\cdots\varphi_{i_N}\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$\times \sum_{\forall j\text{-та}} v_{j_{1,1}\dots j_{1,4}}\cdots v_{j_{N,1}\dots j_{N,4}}$$

$$\times \langle \varphi_{i_1}\cdots\varphi_{i_N}(\varphi_{j_{1,1}}\cdots\varphi_{j_{1,4}})\cdots(\varphi_{j_{N,1}}\cdots\varphi_{j_{N,4}})\rangle_0$$

= първите два реда

$$\times \sum_{\substack{\text{всички}\\ \text{пълни}\\ \text{сдвоявания}}} \langle \varphi_{i_1}\cdots\varphi_{i_N}(\varphi_{j_{1,1}}\cdots\varphi_{j_{1,4}})\cdots\rangle_0 ,$$ където

$$\langle F\rangle_0 := \int d\mu_0(\omega)\, F(\omega) \quad \text{и} \quad \varphi_i\varphi_j := \langle \varphi_i\varphi_j\rangle_0$$

Тук използваме:

Теорема на Вик за Гаусови случайни величини:

$\forall$ момент = сума от произведения на 1 и 2 моменти по $\forall$ възможни разбивания.

Подробно $\langle \varphi_{j_1} \cdots \varphi_{j_n} \rangle_0$

$$\equiv \frac{1}{Z_0} \int_{\mathbb{R}^F} \varphi_{j_1} \cdots \varphi_{j_n} e^{-\sum\limits_{k,\ell} P_{k,\ell} \varphi_k \varphi_\ell} d\varphi_1 \cdots d\varphi_F$$

$$= \sum_{P} \prod_{S \in P} \langle \prod_{\ell \in S} \varphi_{j_\ell} \rangle_0 ,$$

където $\sum\limits_{P}$ е сумата по $\forall$ разбивания P на множеството $\{1, \dots, n\}$ в дизюнктно обединение на 2 и 1 елементни подмножества S. В случая имаме $\langle \varphi_j \rangle_0 = 0$, така че остават само двуелементни разбивания.

$$\Rightarrow \langle \varphi_{i_1} \cdots \varphi_{i_N} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\Gamma_n} G_{\Gamma_n}(i_1, \dots, i_N),$$

$$G_{\Gamma_n} = \sum_{j\text{-та}} \left(\prod_k v_{j_{k,1} \cdots j_{k,4}} \right) \prod_e G(s_e, t_e),$$

$$G(i,j) := \langle \varphi_i \varphi_j \rangle_0 .$$

Континуална версия:

$$\langle \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N)\rangle$$

$$= \frac{1}{Z}\int\Big(\prod_x d\varphi(x)\Big)\, e^{-S[\varphi]}\,\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N)$$

- формула на Файнман-Кац (Feynman-Kac) за евклидова формулировка на К.Т.П.

$$t \mapsto it,$$
$$\mathbb{R}^{3,1} \mapsto \mathbb{R}^{4,0}.$$

Операция наречена Виково въртене (Wick rotation).

Този тип "интеграли" се наричат континуални интеграли / функционални интеграли / интеграл по траекториите / интеграл по историите / path integral

5. Какъв тип редове се получават в теория на пертурбациите?

Да разгледаме едномерен модел на развитията в точка 4.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varphi^2 - \lambda\varphi^4} d\varphi =: Z(\lambda)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{4n} e^{-\frac{1}{2}\varphi^2} d\varphi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a_n \lambda^n$$

- радиус на сходимост 0 !

$Z(\lambda)$ не е аналитична в $\lambda = 0$.

Редът е асимптотичен!

Изход: сумиране по Борел

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n \text{ - формален}$$

$$(Bf)(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \lambda^n \text{ - сходящ}$$

$$f_{BS}(\lambda) = \int_0^{\infty} dt\, e^{-t} (Bf)(t\lambda)$$

6. Сумарно за строенето на модели в К.Т.П.

Имаме два подхода – и при двата в началото се задава действие S

а) Операторен подход: S поражда каноничен (Хамилтонов) формализъм по който се прилага процедурата на канонично квантуване.

б) Функционален метод: по S се строи функционален интеграл.

Типове действия: Свободни

$$S_0^{KG} = \frac{1}{2}\int d^4x \left(\partial_{x_\mu}\varphi\, \partial_{x^\mu}\varphi + m^2\varphi^2 \right)$$

$$\hookrightarrow \left(\partial_{x^\mu}\partial_{x_\mu} + m^2 \right)\varphi = 0$$

$$S_0^{D} = \int d^4x\, \overbrace{\overline{\Psi}(x)}^{\Psi^+\gamma^0} \left(i\gamma^\mu \partial_{x^\mu} - m \right)\Psi(x)$$

$$\hookrightarrow \left(i\gamma^\mu \partial_{x^\mu} - m \right)\Psi = 0$$

$$S_0^{M} = \frac{1}{4}\int d^4x \left(\partial_{x^\mu}A_\nu - \partial_{x^\nu}A_\mu \right) \times \left(\partial_{x_\mu}A^\nu - \partial_{x_\nu}A^\mu \right)$$

$\hookrightarrow$ Уравнения на Максуел за

$$F_{\mu\nu}(A) = \partial_{x^\mu}A_\nu - \partial_{x^\nu}A_\mu .$$

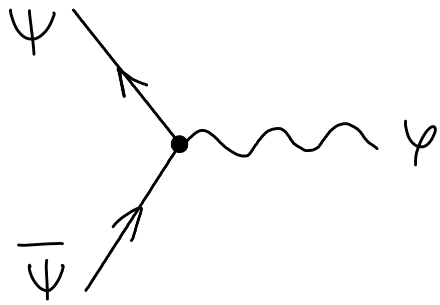
$$S_0 = S_0^{KG} + S_0^{D} + S_0^{M}$$

$\Longleftrightarrow$ обединяване на уравненията

Взаимодейсствия: $S = S_0 + S_{int}$

Юкава (Yukawa):

$$S_{int} = \lambda \int d^4x \; \overline{\Psi} \Psi \varphi$$



(нуклон - пионно взаимодейсвие)

Преди Юкава - взаимодейсвие ток - ел.маг. поле

$$S_{int}^{MD} = \int d^4x \; J^\mu(x) A_\mu(x)$$

$$J^\mu(x) = e \overline{\Psi} \gamma^\mu \Psi \text{ - ток}$$

$$Q = \int d^3x \; J^0(x) \Big|_{x^0 = const}$$

$$= const \, (x_0)$$

- при квантуване това става оператор на ел. заряд

$$S_0^{D} + S_{int}^{MD} = \int d^4x \, \overline{\Psi}(\gamma^\mu i \nabla_\mu^A + m)\Psi,$$

$$\nabla_\mu^A := \partial_{x^\mu} + ie A_\mu .$$

Калибровъчни трансформации / gauge transformations

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_{x^\mu} f$$

$\Rightarrow$ 1) $F_{\mu\nu} = \partial_{x^\mu} A'_\nu - \partial_{x^\nu} A'_\mu$

2) $\int d^4x \, J^\mu A'_\mu = \int d^4x \, J^\mu A_\mu - \int d^4x \, f \, \partial_{x^\mu} J^\mu$

$\partial_{x^\mu} J^\mu = 0$ – закон за запазване на заряда

(изпълнен е само върху уравненията на Лагранж – Ойлер)

3) $\nabla_\mu^{A'} = e^{-if(x)} \nabla_\mu^A e^{if(x)}$

$$S^{MD}[\Psi, A] = S^{MD}[\Psi', A']$$

$$\Psi'(x) = e^{if(x)} \Psi(x)$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_{x^\mu} f(x)$$

$$e^{if(x)} \in U(1)$$

– абелева калибровъчна симетрия

Заради зависимостта от x:

локална калибр. симетрия.

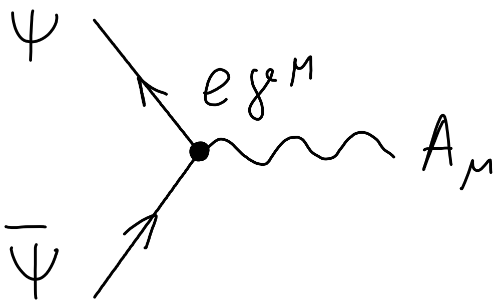
Ако не зависи от x:

глобална калибр. симетрия.

$$e^{iQ\alpha}\,\psi(x)\,e^{-iQ\alpha} = e^{i\alpha}\,\psi(x)$$

$$i\,[Q, \psi(x)] = \psi(x)$$

Диаграмно:



7. Алтернативна мотивация за калибровъчната симетрия

- отново за асимптотичните едночастични състояния:

проекция на спина

$$\Big|\underbrace{\overset{\Gamma^{+}_{-m^2}\ \ni}{p},\ J_3}_{\text{кинематично състояние}},\ \overbrace{n_1,\dots,n_s}^{\text{вътрешни квантови числа}}\Big\rangle$$

Експериментално наблюдение:

$\exists$ алгебра на Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ - максимална абелева подалгебра (подалгебра на Картан) така, че ако $Q_1,\dots,Q_s$ - базис на $\mathfrak{h}$, то възможните вътрешни квантови числа $n_1,\dots,n_s$ могат да се изберат като собствени стойности за представените генератори $\hat{Q}_1,\dots,\hat{Q}_s$.

Стандартен модел: $\mathfrak{g} = u(1) \oplus su(2) \oplus su(3)$

Съответната калибровъчна група

$$G = U(1) \times SU(2) \times SU(3)$$

– при локализирането на симетрията

$\left(\Psi_K(x)\right)_K$ – K индексира базис на представяне V на G

За "симетризиране" на

$$S = \int d^4x \, g^{KK'} \, \overline{\Psi}_K \left(\gamma^\mu i \partial_{x^\mu} + m\right) \Psi_{K'}$$

при $\Psi'_K(x) = \pi(g(x))_K^{K'} \, \Psi_{K'}(x)$

$$\partial_{x^\mu} \mapsto \nabla_\mu^A = \partial_{x^\mu} + i\lambda A_\mu$$

$$A_\mu = \left(A_{\mu K}^{\ \ K'}\right)$$

По-точно: $A_\mu = A_\mu^a \, \pi(T_a)_K^{K'}$

T_a – базис на $\mathfrak{g}$

$\pi(T_a)_K^{K'}$ – представянето

Геометрически: A_μ

- задава успоредно пренасяне

Действие за A_μ

- на Янг-Милс / Yang-Mills
- обобщава електродинамиката

Други понятия свързани с симетрии:

- приближена симетрия
  - запазва се само при част от процесите
  - описва се с част от Лагранжиана, който има такава глобална калибровъчна симетрия.
- спонтанно нарушена симетрия
  - вакуумът не я притежава но действието и физичните закони я притежават.
  - Механизъм на Голдстоун и Хигс.

Композитни (съставни) частици
– асимптотични състояния $|p, J_3, \ldots\rangle$
на които не съответства локално поле по
$|p, J_3, \ldots\rangle = \tilde{\phi}_K(p)\Omega$, т.е., такова, че
$[\phi_K(x), \phi_{K'}(x')] = 0$ при $x \sim x'$

Например – водородния атом $p^+ + e^-$;
p^+ е също съставна → кварков модел.

Несъставните частици, породени от локални полета се считат за "точкови" обекти.

Нестабилни частици (квази-стабилни)
– на тях не съответстват асимптотични състояния
$|p, J_3, \ldots\rangle$.
Могат да се съпоставят такива в приближен смисъл.

Електрона е стабилна точкова частица.
Мюона е нестабилна точкова частица.

Още незасегнати теми:

А. Нестабилни композитни частици – резонанси

Б. Локални наблюдаеми и глобални – H, Q, ...
"Бягащи константи" (running coupling constants)

В. Пренормировки и аномалии.