Квантова теория на полето и елементарните частици: Лекция 1

Николай М. Николов

1. Увод

Квантовата теория на полето (КТП / QFT - Quantum Field Theory) е съвременния апарат (теоретична рамка) на теория на елементарните частици. Съгласно тези представи елементарните частици не са никак елементарни нито в пряк нито в преносен смисъл, а са по-скоро прояви на някакъв колективен феномен наречен квантово поле. Ние ще демонстрираме тази идея още в първите лекции на този курс на модела на трептения на кристална решетка, чийто елементарни възбуждения се наричат фонони и имат характер на частици. Във физиката фононите са пример на така наречените квазичастици, но съгласно КТП елементарните частици са "точно толкова" нереални, или както по-точно казват ефективни обекти колкото и квазичастици като фононите. Тези идеи в КТП и съпровождащия ги теоретичен апарат по такъв начин придобиват приложимост далеч извън пределите на физиката на елементарните частици. Например, методите на КТП се използват отдавна във физиката на кондензираната материя (condensed matter physics).

1.1. Единици и мащаби във физиката на елементарните частици

Ще започнем увода към тези лекции с обзор по мащабите и единиците характерни за физиката на елементарните частици. Този увод не е съществен за настоящия курс, но ще послужи за за едно общо припомняне на някои основни понятия от физиката, които се изучават още в училище. Преди всичко да си припомним, че във физиката боравим с величини, които не винаги са сравними и по тази причина не всякакви числови операции над тях са допустими. Например събирането на дължина и маса е лишено от всякакъв смисъл. От друга страна, умножаването и деленето е винаги допустимо и тогава получаваме величини с производен характер, като например скоростта, която е отношение на разстояние и време. Тези на пръв поглед очевидни и естествени правила налагат силни ограничения във формата на физичните закони.

В механиката започваме с три основни величини и съответно единици:

$\mathbb{L}$ (дължина, m - метър), $\mathbb{T}$ (време, s - секунда), $\mathbb{M}$ (маса, kg - килограм).

а ето и някои от основните производни величини:

скорост: $\mathbb{V} = \mathbb{L}\,\mathbb{T}^{-1}$

ускорение: $\mathbb{A} = \mathbb{V}\,\mathbb{T}^{-1} = \mathbb{L}\,\mathbb{T}^{-2}$

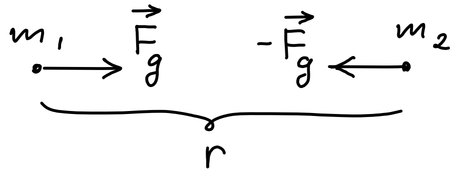
сила: $\mathbb{F} = \mathbb{A}\,\mathbb{M} = \mathbb{L}\,\mathbb{T}^{-2}\,\mathbb{M}$

енергия: $\mathbb{E} = \mathbb{V}^2\,\mathbb{M} = \mathbb{L}^2\,\mathbb{T}^{-2}\,\mathbb{M}$

(Размерностите на сила и енергия се пресмятат от основните закони в механиката като връзката между сила F ускорение a, и маса m, $F = ma$, както и формулата за кинетична енергия на материална точка с маса m и скорост v, $\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2}$.)

Във физическите закони при изразяване на релации между величини с различни размерности възникват константи които изравняват тези размерности. Един от първите примери за това е закона на Нютон за всемирното притегляне (Newton's law of universal gravitation, 1687):

$$\underbrace{F_g}_{\mathbb{L}\,\mathbb{T}^{-2}\,\mathbb{M}\ \text{(размерност)}} = k_g \underbrace{\frac{m_1 m_2}{r^2}}_{\mathbb{M}^2\,\mathbb{L}^{-2}\ \text{(размерност)}}$$

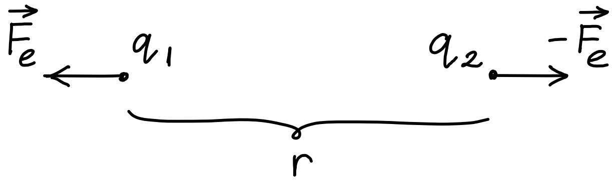


където F_g е големината на силата на привличане между две материални точки с маси m_1 и m_2 разположени на разстояние r една от друга. Както виждме различието в размерностите от двете страни на равенството налага въвеждане фундаментална физична константа k_g, наречена гравитационна константа, имаща нетривиална размерност, която се означва с $[k_g]$ и се изразява непосредствено:

$$[k_g] = \mathbb{L}^3\,\mathbb{T}^{-2}\,\mathbb{M}^{-1}.$$

Около 100 години по-късно подобен закон е открит от Кулон (Coulomb, 1785) за нов тип сили, електростатичните:

$$\underbrace{F_e}_{\mathbb{L}\,\mathbb{T}^{-2}\,\mathbb{M}} = k_e \underbrace{\frac{q_1 q_2}{r^2}}_{\mathbb{Q}^2\,\mathbb{L}^{-2}}$$



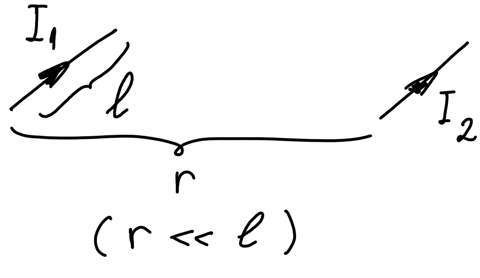
където F_e е големината на електростатичната сила на отблъскване (или привличане, в зависимост от знаците на електричните заряди) между два точкови заряда q_1 и q_2 разположени на разстояние r един от друг.

Независимо, че законите за F_e и F_g са математически идентични между тях има една съществена разлика от метрологична гледна точка. Електростатичната сила е единственото проявление на електричните заряди, известно до този момент. Ето защо закона на Кулон може да се приеме като определящ единицата за електричен заряд, който абстракто сме означили с $\mathbb{Q}$, по-горе. Това на практика означава да положим ектростатичната константа k_e, въведена в закона на Кулон за равна на 1 (или друга удобна числова стойност).

Така фактически закона на Кулон не въвежда нова физична константа и това щеше да остане така, ако зарядите нямаха и друга динамична проява. А именно, движещите се заряди си взаимодействат с нов тип сила, магнитната сила. Движещите се заряди формират ток I (по определение I е протекъл заряд за единица време). Законът за големината на силата F_m с която си взаимодействат два тока I_1 и I_2 течащи по два успоредни проводника с (достатъчно голяма) дължина ℓ разположени на разстояние r един от друг е открит от Ампер (Ampère's force, 1820):

$$\underbrace{F_m}_{\mathbb{L}\,\mathbb{T}^{-2}\,\mathbb{M}} = k_m \underbrace{I_1 \, I_2 \, \frac{2\ell}{r}}_{\mathbb{I}^2}$$

(размерност) (размерност)



Константите k_e и k_m (електростатичната и магнитната) престават да бъдат независими от метрологична гледна точка. Наистина, ако отчетем връзката между единиците за ток и заряд:

$$\mathbb{I} = \mathbb{Q}\,\mathbb{T}^{-1}$$

и разделим почленно размерностите в законите за F_e и F_m то ще получим

$$\left(\left[\frac{F_e}{F_m}\right] = \right) 1 = \left[\frac{k_e}{k_m}\right] \frac{\cancel{\mathbb{Q}^2}\,\mathbb{L}^{-2}}{\cancel{\mathbb{Q}^2}\,\mathbb{T}^{-2}} \quad , \text{ т.е. } \left[\frac{k_e}{k_m}\right] = \frac{\mathbb{L}^2}{\mathbb{T}^2}$$

има размерност на квадрат на скорост и следователно

$$c = \sqrt{\frac{k_e}{k_m}}$$

въвежда нова фундаментална физична константа с размерност на скорост. В края на 19ти век тази константа е свързана от Максуел (James Maxwell) със скоростта на разпространение (във вакуум) на така наречените електромагнитни вълни. Заедно с това е установено и че светлината е електромагнитно лъчение (вълна) и така, константата c съвпада със скоророста на светлината. Връзката между скоростта на светлината и законите на електромагнетизма е едно от най-великите открития във физиката и е в основата на (специалната) теория на относителността. Както видяхме по-горе предпоставките за това са налице още с откриването на закона за силите на Кулон, F_e, и на Ампер, F_m, тъй като това показва, че тези закони, които от една страна са еднакви във всички инерциални отправни системи, съдържат във себе си фундаментална константа с размерност на скорост която по такъв начин също се оказва универсална за всички инерциални отправни системи.

Последната фундаментална константа на която ще се спрем в този обзор е константата $\hbar$ на Планк (Макс Планк, Max Planck) предложена от него в 1900 като връзка между енергия $\mathcal{E}$ и (кръгова) честота ω на електромагнитно лъчение в закона за излъчване на абсолютно черно тяло:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega$$

По-късно в този курс ние ще въведем константата на Планк $\hbar$ във връзка с постулатите на квантовата механика и по-специално с така наречените канонични комутационни съотношения. За целите на метрологичния преглед, който правим в момента за нас е важно единствено, че тъй като честотата е величина хактеризираща периодично явление и се определя като единица върху период от време, то

$$\mathbb{E} = [\hbar]\,\mathbb{T}^{-1} \quad \Rightarrow \quad [\hbar] = \mathbb{E}\,\mathbb{T} = \mathbb{L}^2\,\mathbb{T}^{-1}\,\mathbb{M}.$$

(след като заместим размерността $\mathbb{E}$ на енергията, която изведохме по-горе).

В резюме да отбележим, че стартирай от трите основни размерни величини в механиката: дължина $\mathbb{L}$, време $\mathbb{T}$ и маса $\mathbb{M}$, ние въведохме три фундаментални физични константи, които се оказват с независими размерности:

гравитационна константа k_g : $[k_g] = \mathbb{L}^3\,\mathbb{T}^{-2}\,\mathbb{M}^{-1}$

скорост на светлината c : $[c] = \mathbb{L}\,\mathbb{T}^{-1}$

константа на Планк $\hbar$: $[\hbar] = \mathbb{L}^2\,\mathbb{T}^{-1}\,\mathbb{M}$

Разполагайки с три връзки между трите независими единици $\mathbb{L}$, $\mathbb{T}$ и $\mathbb{M}$ ние можем да ги изразим обратно чрез размерностите на фундаменталните константи:

$$\mathbb{L} = [k_g]^{1/2} [\hbar]^{1/2} [c]^{-3/2}$$

$$\mathbb{T} = [k_g]^{1/2} [\hbar]^{1/2} [c]^{-5/2}$$

$$\mathbb{M} = [k_g]^{-1/2} [\hbar]^{1/2} [c]^{1/2}$$

По такъв начин константите k_g, c и $\hbar$ въвеждат абсолютни еталони за основните единици – това са така наречените Планкови единици (Planck's units):

Планкова дължина (Planck's length) : $l_P = \sqrt{\dfrac{k_g \hbar}{c^3}} = 1.616 \cdot 10^{-35}\ m$

Планково време (Planck's time) : $t_P = \sqrt{\dfrac{k_g \hbar}{c^5}} = 5.391 \cdot 10^{-44}\ s$

Планкова маса (Planck's mass) : $m_P = \sqrt{\dfrac{c \hbar}{k_g}} = 21.77\ \mu g$ $(10^{-9}\ kg)$

Метрологичният смисъл на горните еталони е, че това са единиците при които константите k_g, c и $\hbar$ имат стойност 1. Физическият смисъл на Планковите единици все още не е напълно изяснен (нека направим аналогия с константата c, която е налице още пред 1820 с откриване на закона за силата на Ампер, но тя получава пълна физична интерпретация десетилетия по-късно в теория на Максуел за електромагнетизма). Съвременното схващане за смисъла на Планковите единици е, че това са мащабите при които гравитацията (или пространство-времето) започва да проявява квантови свойства.

В този курс от лекции фундаменталните константи k_g, c и $\hbar$ ще се започнат да играят роля в обратен ред на тяхното въвеждане. Най-напред ще въведем $\hbar$ във връзка квантовата механика и първите стъпки към КТП. В последствие ще въведем скоростта на светлината заедно с кратък увод в специалната теория на относителността и ще преминем към съединяването на нейните принципи с принципите на квантовата механика. Това "съединение" се нарича релативистична квантова механика (Relativistic Quantum Mechanics) и е фактически същинската част на КТП. За съжаление обаче последната останала, но исторически първа фундаментална константа, гравитационната k_g, няма да играе никаква роля в този курс. Създаването на обединена теория на гравитацията и квантовите полета остава все още неизпълнима задача, макар и да е едно от интензивно развиващите се направления в съвременната теоретична физика.

В КТП широко разпространена и удобна система от единици е системата в която константите $\hbar$ и c са равни на 1. Само с две връзки (които идват от размерностите на $\hbar$ и c) между основните механични единици $\mathbb{L}$, $\mathbb{T}$ и $\mathbb{M}$ ние можем да изключим две единици и да оставим само една независима механична единица. Често за базисна механична единица в теорията на елементарните частици се използва енергията,

$$\mathbb{E} = c^2\, \mathbb{M} = \hbar\, \mathbb{T}^{-1} = c\hbar\, \mathbb{L}^{-1}.$$

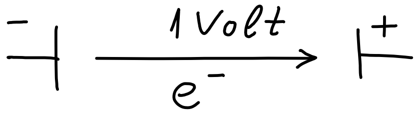
С други думи, по модул $\hbar$ и c (т.е., ако $\hbar = c = 1$):

$$\mathbb{L} = \mathbb{T} = \mathbb{M}^{-1} = \mathbb{E}^{-1}$$

(в частност, виждаме че $\mathbb{E}$ и $\mathbb{M}$ са дуални, или още, реципрочни единици на пространство-времените).

От друга страна, съществува специален еталон за енергия съобразен с естествените мащаби в микросвета. Това е електронволта (Electronvolt, eV):

$$1\,eV = 1.602 \,.\, 10^{-19} \text{ Jaul } (kg\, m^2 s^{-2})$$



— това е енергията, която придобива (или губи) електрон при преминаване през електричен потенциал от 1 волт (Volt). При този еталон за енергия, масата на електрона например се равнява на

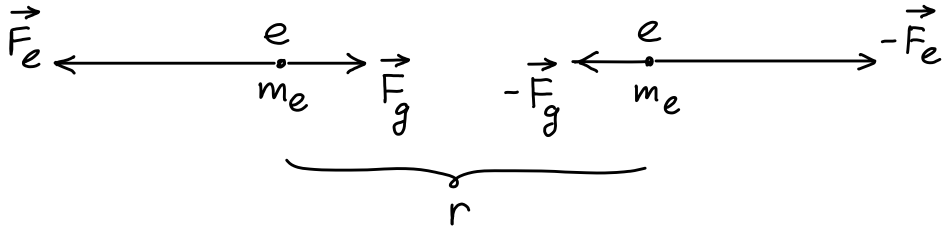
$$m_e = 511 \text{ KeV } (10^3 eV) = 9.11 \,.\, 10^{-31} kg$$

Други два примера: Планквата единица $= 1.22 \,.\, 10^{16}$ TeV (10^{12} eV) (с други думи, това е Планковата енергия). Подбрали сме тук за опорна единица TeV (тера електронволт) тъй като това е порядъка на най-високите енергии при които досега са ускорявани елементарни частици (за ЦЕРН ~ 10 TeV).

И втория пример: характерен атомен мащаб е така наречения радиус на Бор (Нилс Бор, Niels Bohr):

$$5.29 \,.\, 10^{-11} m = 1.35 \text{ KeV } (10^3 eV).$$

Ще завършим нашия обзор по единиците мащабите в теория на елементарните частици с едно сравнение между електростатичната и гравитационната сила с които взаимодействат два електрона:



И така, ако с e означим елементарния електричен заряд (заряда на електрона), а с m_e означим масата на електрона, то от законите на Кулон и Нютон, които писахме в началото получаваме съответно:

$$F_e = \frac{k_e e^2}{r^2} \quad , \quad F_g = \frac{k_g m_e^2}{r^2} .$$

Така, числителите на двата закона имат еднаква размерност и тя непосредствено се проверява, че може да се изрази чрез $\hbar$ и c:

$$[k_e e^2] = [k_g m_e^2] = [\hbar c]$$

С други думи, в системата $\hbar = c = 1$, $k_e e^2$ и $k_g m_e^2$ са безразмерни числа, чийто стойности се оказват съответно:

$$\alpha := \frac{k_e e^2}{\hbar c} \approx 7.28 . 10^{-3} \approx \frac{1}{137}$$ - константа на фината структура (fine structure constant).

$$\frac{k_g m_e^2}{\hbar c} = \frac{m_e^2}{m_P^2} = 1.75 . 10^{-45}$$

Така, отношението между двете сили F_e и F_g в случая на два електрона е

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{k_e e^2}{k_g m_e^2} = 4.17 . 10^{42}$$

което показва, че гравитацията играе изключително пренебрежима роля в микро света. Това е и причината квантовата гравитация да е така "неуловима" не само от теоретична, но и от експериментална гледна точка.

Въведената константа α се приема за основна характеристика на електромагнитното взаимодействие в КТП и се нарича още негова константа на връзката (coupling constant).

2. Увод в квантовата механика

Преминавайки по същество към тематиката на нашия курс ние ще започнем с въвеждане на необходимите ни сведения от квантовата механика. За целите на КТП ще ни бъдат необходими постулатите на квантовата механика и един от най-простите квантово механични модели: модела на квантов хармоничен осцилатор. В предложения увод в основите на квантовата механика следваме частично лекциите [FY] от приведената литература към тази лекция. Това са лекции по квантова механика писани от физици за математици и един от авторите е един от най-бележите съвременни физици, Лудвиг Фаддеев. Тази книга може до послужи на студентите желаещи допълнително да навлязат в квантовата механика.

В края на 19 век във физиката, която днес наричаме класическа физика, доминира и фактически става завършен механистичния детерминизъм. Съгласно този възглед най-общо казано ние можем да определим с произволна точност състоянието на всяка физична система (стига да разполагаме с необходимите технически средства) и в последствие, можем да предскажем еволюцията на това състояние въз основа на динамичните закони за тази система, които най-общо казано имат вида на някакви динамични диференциални уравнения. В началото на 20 век обаче се натрупват множество експериментални наблюдения които не се вписват в съществуващите механистични модели. Ще споменем например атомните спектри, дискретизация на енергиите на атомите или молекулите и тази дискретизация става един от централните нерешими проблеми в началото на 20 век. В предложеното решение на този проблем от квантовата теория става отричане на възможността от пълния детерминизъм в предсказанията за еволюцията на една физична система, или по-точно отрича се детерминизма в измервателните и наблюдателни процеси.

От изложената накратко така наречена криза в класическата физика от началото на 20 век следва, че е необходимо преразглеждане на понятия във физиката като състояние и измерване, които предхождат дори начални раздели в класическата механика, като кинематиката. Тази част от постулатите на квантовата механика ще наречем "квантова статистика" и ще започнем с нейното излагане.

2.1. Квантова статистика

Ще следваме в известна степен умозрителен път в нашето изложение в който ще заложим някакви минимални (начални) физични предположения, извлечени от опита и тях ще допълним до постулати от които ще получим логически следствия, чиято физична интерпретация дава възможност да се преодолеят споменатите трудности в класическата физика, като дискретизацията (или още както казват квантуването) на енергията.

Нашето основно физично предположение е, че всяко измерване (опит) върху една физична система е свързан с неотстранимо смущение на системата. Например, когато наблюдаваме и определяме положението на едно тяло ние преди всичко го виждаме благодарение на отразената от него светлина. Падащата светлина обаче създава смущение в състоянието на тялото, което в случая на микро обект престава да бъде пренебрежимо и може да бъде минимизирано само до определена граница. Именно тази граница е фундаменталния смисъл на константата на Планк $\hbar$, която имайки размерност на величината действие от класическата механика се нарича още квант на действието.

От направеното физично предположение заключаваме като начало, че при последователни измервания на две физични величини, да речем първо A и после B може да получим различни резултати ако при същите начални условия сме измерили първо B и после A. Когато това се случи ще казваме, че величините A и B не са едновременно измерими, или по-накратко, са несъвместими.

По такъв начин, ние си мислим две съвкупности при задаването на една физична теория (или просто при описанието на една физична система):

- множество $\{\omega, \omega', \dots\}$ на състоянията на описваната система, което е възможно да бъде безкрайно и дори неизброимо. (Обръщаме внимание, че буквата ω тук не изразява "кръгова честота" както в точка 1 по-горе, но означава абстрактно състоянието на цялата система.)
- множество $\{A, B, \dots\}$ на наблюдаемите величини, или просто наричани наблюдаеми (observables), което отново може да е безкрайно и дори неизброимо множество.

Така, измервайки различни наблюдаеми при едно и също състояние на системата ние черпим информация за състоянието. По-горе приехме, че съществува определена релация в множеството на наблюдаеми: едновременна измеримост или още, съвместимост,

$$\begin{array}{c}\text{измерване на } A \text{ и } B \\ \text{в състояние } \omega\end{array} = \begin{array}{c}\text{измерване на } B \text{ и } A \\ \text{в състояние } \omega\end{array}$$

$$\Updownarrow \text{def}$$

$$A \text{ и } B \text{ са съвместими}$$

Типични примери на наблюдаеми във физиката са координатите на частица и нейната енергия. Както ще видим в последствие, отделните координати x, y, z са съвместими наблюдаеми, но енергията не е съвместима с никоя координата.

Ще считаме за сега релацията съвместимост за първично понятие в нашата система от постулати, но по-късно ще я свържем с определена алгебрична релация (комутируемост в асоциативна алгебра). Ще отбележим, че ние ще считаме релацията на съвместимост за симетрична (A е съвместима с B $\Rightarrow$ B е съвместима с A), но не и непременно транзитивна (A е съвместима с B и B е съвместима с C $\not\Rightarrow$ A е съвместима с C).

По нататък, при зададена двойка (ω, A) от състояние ω и наблюдаема A имаме многократно извършване на един и същ експеримент над системата (отговарящ на наблюдаемата A) при еднакви начални условия (отговарящи на състоянието ω). В резултат на това получаваме редица от числа $\{a_1, a_2, \dots\}$, където a_i е измерената стойност на A в състоянието ω при i-тия експеримент. Редицата от числа $\{a_1, a_2, \dots\}$ ни дава информация за вероятностното разпределение на величината A в състоянието ω. Така, ние не искаме да изключим възможността, че при някои (а възможно и при всички) състояния на системата измерванията носят вероятностен характер. Ние ще извлечем обаче само едно число от вероятностното разпределение на A в ω:

$$\langle A \rangle_\omega \equiv \omega(A) := \text{средната стойност на } A \text{ в } \omega$$

(ще използваме две алтернативни означения $\langle A \rangle_\omega$ и $\omega(A)$). По закона за големите числа ние получаваме $\langle A \rangle_\omega$ от експерименталните данни $\{a_1, a_2, \dots\}$ от границата:

$$\langle A \rangle_\omega = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Сега ще обсъдим какви операции и структури можем да предполагаме, че съществуват в множествата от наблюдаеми и състояния. В нашите разсъждения ще заложим следното начално предположение за разделящото свойство на съответствието

$$(\omega, A) \mapsto \langle A \rangle_\omega .$$

Постулат 1 (i) ако $\langle A \rangle_\omega = \langle B \rangle_\omega$ за $\forall \omega$, то $A = B$;
(ii) ако $\langle A \rangle_{\omega_1} = \langle A \rangle_{\omega_2}$ за $\forall A$, то $\omega_1 = \omega_2$.

a) Операции над наблюдаеми.

a.1) Функция от една или повече съвместими наблюдаеми $A, B, \ldots$
Нека например A и B са съвместими наблюдаеми. Следователно ние можем да ги измерим едновременно при всеки експеримент за кое да е състояние ω и да получим редица от двойки $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$.
Тогава, ако $f(a,b)$ е някаква функция на две променливи, то ние определяме $f(A,B)$ чрез редицата $\{f(a_1,b_1), f(a_2,b_2), \ldots\}$.
По такъв начин:

$$\langle f(A,B) \rangle_\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} f(a_i, b_i) .$$

В частност, определени са операции като сума $A+B$, произведение $A \cdot B$ и умножение λA на A по число λ.

а.2) Статистическа сума на две произволни наблюдаеми A и B.
Нека започнем със случая когато A и B са съвместими. Тогава от а.1) получаваме

$$\langle A+B\rangle_\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$$
$$= \langle A\rangle_\omega + \langle B\rangle_\omega .$$

Въз основа на това просто наблюдение и Постулат 1 приемаме:

<u>Постулат. 2</u> За всеки две наблюдаеми A и B съществува наблюдаема C наречена статистическа сума (или просто сума) $A+B$ със свойството

$$\langle C\rangle_\omega = \langle A\rangle_\omega + \langle B\rangle_\omega .$$

По такъв начин, множеството от наблюдаеми приема структура на векторно пространство.

Преди да преминем към трети вид операция над наблюдаеми ще припомним едно понятие от алгебрата

<u>Определение</u> Асоциативна алгебра $\mathcal{A}$ е векторно пространство с допълнителна двуместна операция наречена произведение:

$$\mathcal{A} \ni A, B \mapsto A\cdot B \in \mathcal{A}$$

такава, че следните свойства са налице:

(1) билинейност: при фиксиране на единия аргумент получаваме линейно изображение по ответния аргумент. Това са така наречените дистрибутивни закони:

$$(\lambda A + \mu B)\cdot C = \lambda A\cdot C + \mu B\cdot C \,,$$
$$A\cdot(\lambda B + \mu C) = \lambda A\cdot B + \mu A\cdot C \,.$$

(2) асоциативност: $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$.

Допълнително свойство:

(3) комутативност: $A\cdot B = B\cdot A$.

Асоциативна алгебра с това свойство се нарича комутативна алгебра.

И така, една съвкупност от съвместими наблюдаеми може да образува комутативна алгебра и фактически, винаги поражда такава съгласно операция a.1).

a.3) Жорданово произведение на произволни две наблюдаеми A и B (на името на Pascual Jordan):

$$A\circ B := \frac{1}{2}\left((A+B)^2 - A^2 - B^2\right) .$$

Обръщаме внимание, че дясната страна е определена въз основа на операции a.1) и a.2):

- A^2, B^2 – определени по a.1).
- $A+B$ – определена по a.2).
- $(A+B)^2$ – определена по a.1).
- и накрая завършваме с a.2).

В случай на асоциативна алгебра Жордановото произведение дава

$$A \circ B = \frac{1}{2}\left(A \cdot B + B \cdot A\right)$$

и следователно в случай на комутативна алгебра и в частност, за съвместими наблюдаеми $A \circ B = A \cdot B = B \cdot A$.

Въз основа на това ние приемаме един от най-силните постулати в квантовата механика.

<u>Постулат. 3</u> Множеството от наблюдаеми се съдържа като векторно подпространство в асоциативна (но възможно некомутативна) алгебра така се е в сила: $A \circ B = \frac{1}{2}\left(A \cdot B + B \cdot A\right)$.

(Следствие: ако A и B са съвместими, то $A \cdot B = B \cdot A$ и съвпада с обикновеното произведение определено по операция а.1.)

<u>Математически коментари:</u> 1.) Постулат 3 може да бъде частично обоснован или по-точно, сведен до по-детайлни предположения които да са формулирани непосредствено за Жордановото произведение (и следователно, в термините на операции а.1 и а.2). Това е така понеже Жордановото произведение, макар и неасоциативно изпълнява известни тъждества в случая на асоциативни алгебри. Така се стига до понятието Жорданови алгебри, които при определени условия биха идвали от асоциативни алгебри (за по-широка дискусия по тази тема препоръчваме монографията [E]).

2.) Обръщаме внимание, че асоциативното произведение $A \cdot B$ на две наблюдаеми A и B е възможно да не представлява вече никаква наблюдаема величина. По такъв начин ние разширяваме за удобство множеството на наблюдаемите с добавяне на "идеални" (фантомни) елементи по аналогично както да речем в аритметиката са добавени отрицателните числа.

3.) Постулат 3 може да бъде уточнен, като се премине към комплексни асоциативни алгебри, които са $*$-алгебри, т.е. имат ~~идемпотентна~~ ИНВОЛЮТИВНА ($** = \mathrm{id}$) антилинейна операция. Тогава постулираме, че наблюдаемите са "реални", т.е. те са самоспрегнатите елементи, $A^* = A$, в тази алгебра.

Допълнителна информация за асоциативни и $*$-алгебри може да се намери в лекционните записки [N] (лекции 1 и 2).

б) Структура на множеството от състояния

Когато приехме алтернативното означение $\omega(A) \equiv \langle A \rangle_\omega$ за сдвояването между състоянияния и наблюдаеми (определено от средната стойност), ние имахме предвид, че това ще даде действие на състоянията като линейни функционали над векторното пространство от набаюдаеми. Наистина, съгласно въведените по-горе операции а.1) и а.2) над наблюдаеми е в сила:

$$\omega(\lambda A + \mu B) = \lambda\, \omega(A) + \mu\, \omega(B)$$

за всеки наблюдаеми A, B и числа λ, μ. Така върху множеството на състоянията естествено се индуцира структурата на дуалното векторно пространство на векторното пространство на всички наблюдаеми: ние можем да определим линейни комбинации на състояния по формулата:

$$(p_1\omega_1 + \cdots + p_n\omega_n)(A) := p_1\,\omega_1(A) + \cdots + p_n\,\omega_n(A),$$

където $p_1, \ldots, p_n$ са числа. Две специфични свойства на състоянията обаче налагат известни ограничения на допустимите линейни комбинации $p_1\omega_1 + \cdots + p_n\omega_n$.

- Тъй като числата могат да се разглеждат като тривиални константни наблюдаеми, които приемат една и съща стойност във всяко състояние, то в частност имаме

$$\omega(1) \equiv \langle 1 \rangle_{\omega} = 1 .$$

Следователно за да бъде линейната комбинация $p_1\omega_1 + \cdots + p_n\omega_n$ отново състояние е необходимо:

$$1 = p_1\omega_1(1) + \cdots + p_n\omega_n(1) = p_1 + \cdots + p_n .$$

- Друго естествено свойство на състоянията е, че те приемат неотрицателни стойности като линейни функционали когато се приложат върху неотрицателни наблюдаеми като например A^2, при произволна наблюдаема A, т.е.:

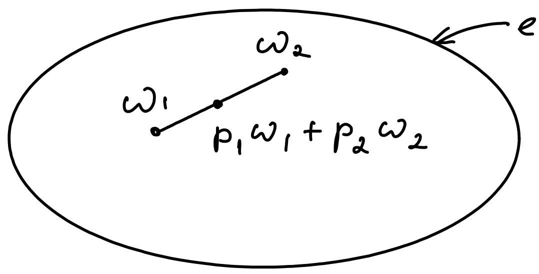
$$\omega(A^2) \geq 0 \quad \forall \text{ наблюдаема } A .$$

Достатъчно условие линейният функционал $p_1\omega_1 + \cdots + p_n\omega_n$ да изпълнява това свойство е $p_1 \geq 0, \ldots, p_n \geq 0$.

Линейни комбинации $p_1\omega_1 + \cdots + p_n\omega_n$ от състояния с ограниченията $p_1 + \cdots + p_n = 1$, $p_1 \geq 0, \ldots, p_n \geq 0$ се наричат изпъкнали комбинации и имат следната физическа интерпретация.

Нека е зададено вероятностно разпределение $p_1, \ldots, p_n$ ($p_1 + \cdots + p_n = 1$, $p_1 \geq 0, \ldots, p_n \geq 0$). Тогава изпъкналата комбинация $p_1\omega_1 + \cdots + p_n\omega_n$ на състояния $\omega_1, \ldots, \omega_n$ се нарича тяхна (статистическа) смес и се интерпретира като състояние в което с вероятност p_i бихме получили резултати отговарящи на състоянието ω_i.

Следствие: множеството от състояния е изпъкнало множество във векторно пространство.



екстремалните точки на изпъкналото множество от състояния се наричат чисти състояния.

Така, чистите състояния са по дефиниция такива състояния ω, които не могат да се представят като нетривиална смес $\omega = p_1\omega_1 + p_2\omega_2$ с $p_1 > 0$ и $p_2 > 0$. С други думи, това са състоянията които са максимално изчистени от статистически (вероятностен) характер (идващ от нашето незнание за състоянието на системата или липсата на прецизност при неговото приготвяне). В класическата физика (механика) наблюдаемите величини имат точно определени стойности в чисто състояние и то съответства на точка от фазовото пространство на системата.

Постулат. 4 Асоциативната алгебра в която се съдържат наблюдаемите се представя (точно) като алгебра от оператори в Хилбертово пространство $\mathcal{H}$. При това, наблюдаемите се представят със самоспрегнати оператори, а чистите състояния се представят от единични вектори в Хилбертовото пространство $\mathcal{H}$ по формулата:

$$\omega(A) = \langle \Psi | A \Psi \rangle .$$

Пояснения :

- Хилбертово пространство е комплексно векторно пространство $\mathcal{H}$ с Ермитово скаларно произведение $\langle \phi | \psi \rangle$ $(\phi, \psi \in \mathcal{H})$.
  Ключови свойства :
  $$\langle \psi | \alpha \phi \rangle = \alpha \langle \psi | \phi \rangle$$
  $$\langle \alpha \psi | \phi \rangle = \bar{\alpha} \langle \psi | \phi \rangle$$
  $$\overline{\langle \psi | \phi \rangle} = \langle \phi | \psi \rangle$$

  $\| \psi \|^2 := \langle \psi | \psi \rangle \geq 0$ и $\| \psi \| = 0 \iff \psi = 0$
  + пълнота (в безкрайно мерни $\mathcal{H}$).

  За стегнат и красив увод в теорията на Хилбертовите пространства препоръчваме учебника [R], глава 4 (в тази връзка много полезна е и глава 1).

- Пример : $\mathbb{C}^N = \{ (x_1, \ldots, x_N) \mid x_i \in \mathbb{C} \}$
  $\langle (x_1, \ldots, x_N) | (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \cdots + \bar{x}_N y_N$.

- Самоспрегнат оператор : $\langle \psi | A \phi \rangle = \langle A \psi | \phi \rangle$
  – в $\mathbb{C}^N$ – съответства на ермитова матрица.
  (Дисциплина : Функционален анализ).

- $\| \psi \|^2 = \langle \psi | 1 \psi \rangle = \omega(1) = 1$. Ето защо ψ трябва да е единичен вект.
  Освен това : ако $\psi' = \alpha \psi$ то $\langle \psi' | A \psi' \rangle = \langle \alpha \psi | \alpha A \psi \rangle$
  $= \bar{\alpha} \alpha \langle \psi | A \psi \rangle = |\alpha|^2 \langle \psi | A \psi \rangle$.

  т.е. ако $|\alpha| = 1$, то ψ и ψ' определят едно и също състояние

  $\Rightarrow$ лъчите в $\mathcal{H}$ са във взаимно еднозначно съответствие с чистите състояния.

- Постулат 4 може (частично) да се обоснове с т. нар. теорема на Гелфанд (Gelfand) Наймарк (Naimark) Сигал (Segal) (GNS theorem).
  За повече подробности за тази теорема [N], лекции 1 и 2.

Литература към лекция 1:

[E] G.G.Emch, Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory,, J. Wiley-Interscience, New York, 1972

Руски превод:
Ж. Эмх, Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля, 1976

[FY] L. D. Faddeev and O. A. Yakubovskii, Lectures on Quantum Mechanics for Mathematics Students, AMS, 2009

Оригинално издание:
Л.Д. Фаддеев, О.А. Якубовский, Лекции по квантовой механике для студентов-математиков, 1980

[N] Н. Николов, Лекции по спецкурс "Увод в теорията на операторни алгебри с приложение в математиката и физиката" (http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/OA/)

[R] У. Рудин, Реален и комплексен анализ, 1984

Оригинално издание:
W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1966

[T] L.A. Takhtadzhian, Quantum Mechanics for Mathematicians, AMS, 2008

[vN] J. von Neumann, Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, (1 ed. 1955, 12 ed. 1996)

Руски превод:
И. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, 1964