

N. N.

Квантова теория на полето и елементарните частици: Лекция 2

11.10.13

Николай М. Николов

-1-

Съобщения:

1. Следващата лекция ще започне от 9:45 (петък, зала 229 на ФМИ) и ще продължи до 12:15 с почивка 11:00 - 11:15.

2. Пълните лекционни записки ще бъдат общо достъпни до третата лекция (включително).

1. Квантова статистика - продължение

Резюме на въведените предположения и структури до дук:

Предполагаме, че наблюдаемите величини във всяка физична теория образуват векторно пространство, което е вложено в една комплексна асоциативна $*$ -алгебра \mathcal{Q} .

Припомняме, че комплексна асоциативна $*$ -алгебра \mathcal{Q} (complex associative $*$ -algebra) е векторно пространство над комплексните числа, което е снабдено с допълнителна дву-местна операция наречена произведение, $A \cdot B \in \mathcal{Q}$ ($A, B \in \mathcal{Q}$), която е разделно линейна по всеки аргумент.

(т.е. $(\alpha A + \beta B) \cdot C = \alpha A \cdot C + \beta B \cdot C$ и $A \cdot (\alpha B + \beta C) = \alpha A \cdot B + \beta A \cdot C$, и казваме, че е билинейна операция); операцията е още асоциативна, т.е. изпълнява закона $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$. До дук определихме понятието асоциативна алгебра \mathcal{Q} . Тя става $*$ -алгебра ако е снабдена още с едноместна операция

$*$: $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q} : A \mapsto A^*$, такава че (за $\forall A, B \in \mathcal{Q}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$):

(*1) антилинейност: $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A + \bar{\beta} B$

(*2) инволютивност: $(A^*)^* = A$;

(*3) антиморфизъм (обръща произведението): $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$.

Забележка Ако $\hat{1}$ е единица на $*$ -алгебрата \mathcal{Q} то $\hat{1}^* = \hat{1}$ понеже
 $\hat{1}^* \cdot A = (A^* \cdot \hat{1})^* = A^{**} = A$ и $A \cdot \hat{1}^* = (\hat{1} \cdot A^*)^* = A^{**} = A$.

Продължавайки нашия постулат, ние приемаме, че един елемент A на $*$ -алгебрата \mathcal{Q} съответства на наблюдаема тогава и само тогава когато е **самоспрегнат** (self-adjoint): $A = A^*$.

Забележки Ако $A = A^*$ и $B = B^*$ са две наблюдаеми, то по принцип тяхното произведение $A \cdot B$ в асоциативната алгебра \mathcal{Q} може и да не представя наблюдаема, тъй като $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^* = B \cdot A \neq A \cdot B$. Когато $A \cdot B = B \cdot A$ казваме, че A и B **комутират** (съттият) и това е следователно необходимото и достатъчно условие $A \cdot B$ да бъде отново наблюдаема. В края на тази лекция ще свържем условието за комутируемост и с релацията за съвместимост (едновременна измеримост) въведена в първата лекция.

Възможно е да възникне въпрос до колко необходимо е да се работи над комплексните а не над реалните числа. Един аргумент в полза на комплексните алгебри е, че даже в реални алгебри некомутативността би довела до наличие на несамоспрегнати елементи $C \neq C^*$. В този случай комплексните числа позволяват да направим разлагане на самоспрегнати части: $C = A + iB$, където $A = \frac{1}{2}(C + C^*) = A^*$ и $B = \frac{1}{2i}(C - C^*) = B^*$.

По-нататък, при зададена асоциативна $*$ -алгебра \mathcal{Q} ние нарекохме състояние (state) върху нея всяка функция $\omega: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ която е

(s0) линейна (линеен функционал): $\omega(\alpha A + \beta B) = \alpha \omega(A) + \beta \omega(B)$

(s1) положителност: $\omega(A^*A) \geq 0$ ($\forall A \in \mathcal{Q}$)

(s1') реалност: $\omega(A^*) = \overline{\omega(A)}$ ($\forall A \in \mathcal{Q}$)

(s2) Нормираност: $\omega(\hat{1}) = 1$ (където $\hat{1} \in \mathcal{Q}$ - единица на \mathcal{Q})

Физическият смисъл: $\omega(A)$ = средна стойност на A в ω .

Математически коментар: При известни допълнителни предположения от топологичен характер за асоциативната алгебра \mathcal{A} (например, \mathcal{A} е C^* -алгебра) условието $(s1')$ става следствие от $(s1)$.

Введеохме и операция над състояния: смес на състоянията ω_1 и ω_2 наричаме линейния функционал $\omega = p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2$ при $p_1, p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$. Непосредствено се проверяват $(s1) - (s2)$. Чисто състояние нарекохме състояние, което не може да се представи като нетривиална смес:

$$\text{чисто състояние} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \omega = p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 - \text{смес} \\ \Rightarrow p_1 p_2 = 0 \end{array} \right.$$

Пример: Нека $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ - алгебрата на комплексни $n \times n$ матрици спрямо матричното умножение.

$$A^* = (\bar{A})^T - \text{ермитово спрягане.}$$

Елементите $A \in \mathcal{A}$ действат като линейни оператори в \mathbb{C}^n , което от своя страна е пример за крайно-мерно Хилбертово пр-во (пълната дефиниция следва) спрямо ермитовото скалярно произведение

$$\left. \begin{array}{l} \text{за } \phi = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \\ \psi = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n \end{array} \right\} : \langle \phi | \psi \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n$$

$$\text{Тогавта е в сила : } \langle \phi | A \psi \rangle = \langle A^* \phi | \psi \rangle.$$

Как се описват състоянията върху $M_n(\mathbb{C})$?

Теорема Състоянията в/у $M_n(\mathbb{C})$ са във взаимно еднозначно и обратимо съответствие с комплексни $n \times n$ -матрици $\rho = (\rho_{kl})$ такива, че :

$$(1) \rho \text{ е неотрицателна матрица : } \langle \phi | \rho \phi \rangle \geq 0 \quad (\forall \phi \in \mathbb{C}^n).$$

$$(2) \text{ имат следа } 1 : \text{Tr } \rho := \sum_{k=1}^n \rho_{kk} = 1$$

$$\text{Връзката между } \omega \text{ и } \rho \text{ е : } \omega(A) = \text{Tr}(\rho A)$$

Терминология: ρ се нарича матрица на плътността (density matrix).

Доказателството на това твърдение е извън рамките на този курс. От друга страна, това е несложно упражнение по линейна алгебра и затова ще приведем схема на доказателството:

Едно състояние ω върху $M_n(\mathbb{C})$ е линеен функционал и, както всяка линейна функция над векторно пространство, ω се определя еднозначно от стойностите си върху базис. От друга страна, като векторно пространство $M_n(\mathbb{C})$ е изоморфно на \mathbb{C}^{n^2} и има базис

$$E_{jk} = j \begin{pmatrix} 0 & \dots & \overset{k}{\downarrow} & \dots & 0 \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{j,k=1}^n A_{jk} E_{jk}.$$

Тогава ω се определя еднозначно от набора от числа

$$\rho_{jk} := \omega(E_{kj}) \quad (j, k = 1, \dots, n) \text{ и}$$

$$\begin{aligned} \omega(A) &= \omega\left(\sum_{j,k=1}^n A_{jk} E_{jk}\right) = \sum_{j,k=1}^n A_{jk} \omega(E_{jk}) = \sum_{j,k=1}^n \rho_{kj} A_{jk} \\ &= \text{Tr}(\rho A) \quad (= \text{Tr}(A \rho) \text{ - обърнете внимание!}). \end{aligned}$$

Условието $\text{Tr} \rho = 1$ следва автоматично от (s2). Условието $\langle \phi | \rho \phi \rangle \geq 0$ за $\forall \phi = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ следва ако се приложи (s1) за матрицата

$$C = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = A^* A \quad (\text{защо?}).$$

Забележка От ρ - неотрицателна матрица $\Rightarrow \rho = \rho^*$!
Ето защо в този случай условието (s1') е следствие от (s1).

Ще приведем без доказателство едно важно следствие (доказателството е отново упражнение по линейна алгебра).

Следствие ω е чисто състояние върху $M_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow$ представящата го матрица ρ има ранг 1, т.е.,

$$\rho = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ (защото е и самоспрегната).}$$

Ако означим $\phi = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, то

$$\omega(A) = \text{Tr}(\rho A) \equiv \langle \phi | A \phi \rangle.$$

Такива $\phi \in \mathbb{C}^n$ се наричат **вектори на състоянието**.

От $\text{Tr} \rho = \langle \phi | \phi \rangle = 1 \Rightarrow \phi$ - трябва да е единичен в-р.

Забележка. Ако $\phi' = e^{i\alpha} \phi$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) то ϕ' определя същото състояние:

$$\langle \phi' | A \phi' \rangle = \langle e^{i\alpha} \phi | A e^{i\alpha} \phi \rangle = \overbrace{e^{-i\alpha}}^{\text{виз свойства на ермитовото}} e^{i\alpha} \langle \phi | A \phi \rangle = \langle \phi | A \phi \rangle.$$

скалярно произведение, които следват

Следователно, чистите състояния са във взаимно-еднозначно съответствие с "единичните лъчи" в \mathbb{C}^n , т.е. подмножествата от вида

$$\{ e^{i\alpha} \phi \}_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad (\|\phi\| \equiv \langle \phi | \phi \rangle^{1/2} = 1).$$

(От своя страна, единичните лъчи пак са в 1-1 съответствие с едномерните подпространства.)

Определение Пред-Хилбертово пространство (pre-Hilbert space) \mathcal{H} е комплексно векторно пространство с ермитово скалярно произведение $\langle \phi | \psi \rangle \in \mathbb{C} \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$, т.е., такова че $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall \phi, \psi \in \mathcal{H})$:

$$1) \langle \alpha \phi + \beta \psi | \theta \rangle = \bar{\alpha} \langle \phi | \psi \rangle + \bar{\beta} \langle \psi | \theta \rangle$$

$$2) \langle \phi | \alpha \psi + \beta \theta \rangle = \alpha \langle \phi | \psi \rangle + \beta \langle \phi | \theta \rangle$$

$$3) \langle \phi | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | \phi \rangle}$$

$$4) \langle \phi | \phi \rangle \geq 0, \text{ като } \langle \phi | \phi \rangle = 0 \Rightarrow \phi = 0.$$

Забележка $\|\phi\| = \langle \phi | \phi \rangle^{1/2}$ превръща \mathcal{H} в нормирано пространство (normed space). Когато \mathcal{H} е цяло (complete) нормирано пространство, то се нарича Хилбертово пространство.

Твърдение. За всяко пред-Хилбертово пространство \mathcal{H} множеството:

$$O_p(\mathcal{H}) := \{ A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \mid A \text{ е линеен оператор такъв, че } \exists \text{ линеен оператор } B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \text{ за който } \langle \phi | A\psi \rangle = \langle B\phi | \psi \rangle \text{ за } \forall \phi, \psi \in \mathcal{H} \}.$$

е $*$ -алгебра, в която произведението е композицията (операторното произведение) а спрегнатото се определя от условието:

$$\langle A^* \phi | \psi \rangle = \langle \phi | A\psi \rangle.$$

В случая когато $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$: $O_p(\mathbb{C}^n) \equiv M_n(\mathbb{C})$.

Доказателство. Ако A и $B \in O_p(\mathcal{H})$, то $\exists A^*$ и B^* съгласно условието в $O_p(\mathcal{H})$. $\Rightarrow \langle \phi | AB\psi \rangle = \langle A^* \phi | B\psi \rangle = \langle B^* A^* \phi | \psi \rangle$. Оттук, следва, че $O_p(\mathcal{H})$ е алгебра спрямо операторното произведение, а също така и че $*$ -операцията е антиморфизъм (условие (*3)).

Обръщаме внимание, че A^* е еднозначно определен от условието $\langle A^* \phi | \psi \rangle = \langle \phi | A \psi \rangle$ ($\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$) тъй като ако $\langle B \phi | \psi \rangle = \langle \phi | A \psi \rangle$ то $\langle (A^* - B) \phi | \psi \rangle = 0$ $\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$ и в частност за $\psi = (A^* - B) \phi$ получаваме, че $\| (A^* - B) \phi \|^2 = \langle (A^* - B) \phi | (A^* - B) \phi \rangle = 0$, т.е. $(A^* - B) \phi = 0$ ($\forall \phi$) и $\Rightarrow A^* = B$. \square

Математически коментар. В случая когато \mathcal{H} е произволно Хилбертово пространство, $\mathcal{O}_p(\mathcal{H}) =$ алгебрата на всички ограничени оператори над \mathcal{H} . Това следва от две основни теореми на функционалния анализ: първо, A е затворен оператор, понеже допуска спрегнат (по условие), второ, A е ограничен, понеже е глобално определен затворен оператор (коментарът се отнася за студенти изучаващи функционален анализ).

Следващото твърдение на Гелфанд-Наймарк-Сигал показва, че примера на $M_n(\mathbb{C}) (= \mathcal{O}_p(\mathbb{C}^n))$, който разгледахме отговаря в голяма степен на общата ситуация.

Теорема (GNS): Ако \mathcal{A} е $*$ -алгебра, а ω е състояние над \mathcal{A} , то $\exists \mathcal{H}$ - пред Хилбертово пространство, вектор $\phi \in \mathcal{H}$ и линейно изображение $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}_p(\mathcal{H})$ такива, че ($\forall A, B \in \mathcal{A}$):

$$\left. \begin{array}{l} (1) \pi(A \cdot B) = \pi(A) \cdot \pi(B) \\ (2) \pi(A^*) = \pi(A)^* \\ (3) \pi(\hat{1}) = \hat{1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{казваме, че } \pi \text{ е морфизъм на } * \text{-алгебри} \\ \text{с } 1 \text{ или още, че } \pi \text{ е представление} \\ \text{(в пред-Хилбертово пространство).} \end{array}$$

$$(4) \omega(A) = \langle \phi | A \phi \rangle$$

$$(5) \{ A \phi | A \in \mathcal{A} \} = \mathcal{H} \text{ - казваме, че } \pi \text{ е циклично представление.}$$

Доказателството на теоремата, макар и чисто алгебрично, е извън рамките на настоящия курс.

Математически коментари 1. Теоремата има допълнителна част гласяща, че тройката (\mathcal{H}, ϕ, π) е единствена "с точност до изоморфизъм".

2. В теоремата не се твърди, че π е изоморфизъм, нито дори че е инекция или сюрекция.

3. В тази теорема срещаме понятието представяне на алгебра, което е аналогично на (линейно) представяне на група и в частност, има аналогични операции и понятия за представяния, като прека сума, приводимост, неприводимост. Доказва се например, че помукеното представяне по GNS теоремата е неприводимо \Leftrightarrow изходното състояние ω е чисто.

4. Във връзка с 3. още: една \ast -алгебра \mathcal{A} може да допуска нееквивалентни (неизоморфни) неприводими представяния, когато е безкрайно-мерна. Този математически феномен има физическа интерпретация: в статистическата физика се счита, че различните фази (фазови състояния) на една квантова термодинамичка система се описват с нееквивалентни представяния на алгебрата на наблюдаемите величини. Нееквивалентността на представяния лежи и в основата на математическото описание на физически феномени като спонтанното нарушаване на симетрията.

По-нататък ще предположиме, че $\mathcal{A} := \text{Op}(\mathcal{H})$, т.е. ще работим в (пред) Хилбертово пространство. Дори ще приемем за простота в началото, че $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$.

Физически, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ означава, че нашата система е крайна в смисъл, че всяка наблюдаема може да приема само краен брой различни стойности. И всъщност, този брой $\leq n$, както ще видим след малко в тази лекция.

Коментар Във връзка с илюстративния избор $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ ще отбележим, че в теоретичната физика е често срещан маниер да се работи с безкрайни суми като с крайни и дори с интеграли като с (Риманови) крайни суми. Тази математическа неточност е понякога отстранима и е по-скоро педагогичен похват. В КТП обаче такъв нестрог (макар и евристичен) подход много често остава без алтернативен строг подход. Така, КТП се явява математически незавършена теория и по-точно казано, до днес няма математически завършена теория на взаимодействащи квантови полета във физически интересен случай на $3+1$ пространство + времеви измерения. В тази връзка ще изтъкнем, че този проблем на математическата физика (в известна конкретизирана форма) е формулиран като един от милениум проблемите на Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, заедно с проблеми като хипотезата на Риман и хипотезата на Пойкаре (вече решена).

От друга страна, независимо че е математически незавършена, КТП се явява теорията дава най-точните предсказания потвърждавани някога на експеримент. А именно, това е предсказанието за така наречения аномален диполен магнитен момент на електрона, измерен и теоретично потвърден с точност до 12 значещи цифри!

Следват няколко физически интерпретации.

1. Кога една наблюдаема $A \in \mathcal{O}_r(\mathcal{H})$ има детерминирана стойност в дадено състояние?

Преди всичко, нека това е чисто състояние, тъй като тези състояния са максимално изчистени статистически. Нека $\phi \in \mathcal{H}$ е вектора на състояние ($\|\phi\| = 1$) и нека средната стойност на A в ϕ означим с $\langle A \rangle_\phi := \langle \phi | A \phi \rangle$. Да отбележим, че $\langle A \rangle_\phi$ е реално число:

$$\langle \phi | A \phi \rangle = \langle A^* \phi | \phi \rangle = \langle A \phi | \phi \rangle = \overline{\langle \phi | A \phi \rangle}.$$

Да въведем наблюдаемата $B = A - \langle A \rangle_\phi \hat{1} = B^*$, която има смисъл на отклонението на A от средната си стойност спрямо ϕ . Средната стойност на B^2 в ϕ , $\langle \phi | B^2 \phi \rangle$, се нарича **средно квадратно отклонение** на A в ϕ или още, **дисперсия** на A в ϕ . Именно нулирането на дисперсията на A в ϕ е статистически критерий, че A има детерминирана стойност в ϕ или с други думи, че A приема почти сигурно една и съща стойност в ϕ . От друга страна,

$$\langle \phi | B^2 \phi \rangle = \langle B^* \phi | B \phi \rangle = \langle B \phi | B \phi \rangle = \|B \phi\|^2 \geq 0$$

и следователно: **A има детерминирана стойност в ϕ**

$$\Leftrightarrow \langle \phi | B^2 \phi \rangle = 0 \Leftrightarrow \|B \phi\| = 0 \Leftrightarrow B \phi = 0 \Leftrightarrow A \phi = \langle A \rangle_\phi \phi$$

$\Leftrightarrow \phi$ е собствен вектор на A .

(Припомняме, че $\|\phi\| = 1$ понеже ϕ е вектор на състояние.)

Нещо повече, ако A е детерминирана в състоянието ϕ ($\Leftrightarrow \phi$ е собствен вектор на A), то стойността, която наблюдаемата A приема почти сигурно в ϕ е съответната собствена стойност на представлящия самоспрегат оператор A . Ние ще засилим този извод в следния:

Постулат Възможните стойности, които може да приема една наблюдаема A при измеране са собствените стойности на представящия A самоспрегнат оператор.

По-обща и точна формулировка: възможните стойности са тези и само тези числа, които лежат в спектъра на представящия самоспрегнат оператор. Спектралната теория на самоспрегнатите оператори е основна тема във функционалния анализ, но излиза извън рамките на предположения материал в този курс.

В примера $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ ($\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$): всяка ермитова матрица A (т.е., $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A^* = A$) се диагонализира в ортонормиран базис от собствени вектори f_1, \dots, f_n ($\langle f_j | f_k \rangle = 0$ за $j \neq k$, $\|f_j\| = 1$). Това е една от основните теореми на линейната алгебра. Нека означим диагоналната форма, която приема матрицата A във базиса f_1, \dots, f_n на \mathbb{C}^n :

$$A = \text{diag}(\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{\text{еднакви собствени стойности}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}, \dots, \underbrace{a_k, \dots, a_k})$$

$a_i \neq a_j$ при $i \neq j$.

Допускайки известна неточност отново ще използваме буквата A акцентирайки по такъв начин на факта, че това е същият оператор и съответно, същата наблюдаема, но в друг ортонормиран базис. Нека въведем и оператори P_1, \dots, P_k , които се представят във базиса f_1, \dots, f_n с диагоналните матрици:

$$P_1 = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0),$$

$$P_2 = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, \dots, 0, \dots, 0),$$

...

$$P_k = \text{diag}(0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \dots, 1, \dots, 1),$$

където единиците са разположени последователно на местата в които A има еднакви собствени стойности.

Операторите P_1, \dots, P_k са самоспегнати, $P_j^* = P_j$, понеже се представят от ермитови матрици в ортонормиран базис. Освен това те изпълняват равенствата:

а) $P_j^2 = P_j$ т.е., **идемпотентност**
или още, P_j са **проектори**

б) заедно с условието $P_j^* = P_j$, P_j са **ортogonalни проектори**.

в) $P_j P_\ell = 0$ при $j \neq \ell$, т.е. P_1, \dots, P_k са **взаимно ортогонални проектори**.

г) $P_1 + \dots + P_k = \hat{I}$, т.е., P_1, \dots, P_k **формират разбиране на единицата**.

д) $AP_j = a_j P_j$ ($j = 1, \dots, k$) (за определеност полагаме $a_1 < a_2 < \dots < a_k$).

Ако означим с $\mathcal{M}_j = P_j \mathcal{M}$, подпространството на \mathcal{M} върху което P_j проектира ($j = 1, \dots, k$), то \mathcal{M}_j е собственото подпространство на A отговарящо на собствената стойност a_j . Именно това отразява свойство д). Свойство в) се преформулира като взаимна ортогоналност на \mathcal{M}_j и \mathcal{M}_ℓ при $j \neq \ell$ ($\mathcal{M}_j \perp \mathcal{M}_\ell$ и в частност, $\mathcal{M}_j \cap \mathcal{M}_\ell = \{0\}$). Свойство г) се преформулира като

$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_k$, т.е. \mathcal{M} се **разбива в пряка сума на взаимно ортогонални собствени подпространства**.

Съгласно полаганията ни полугаваме още:

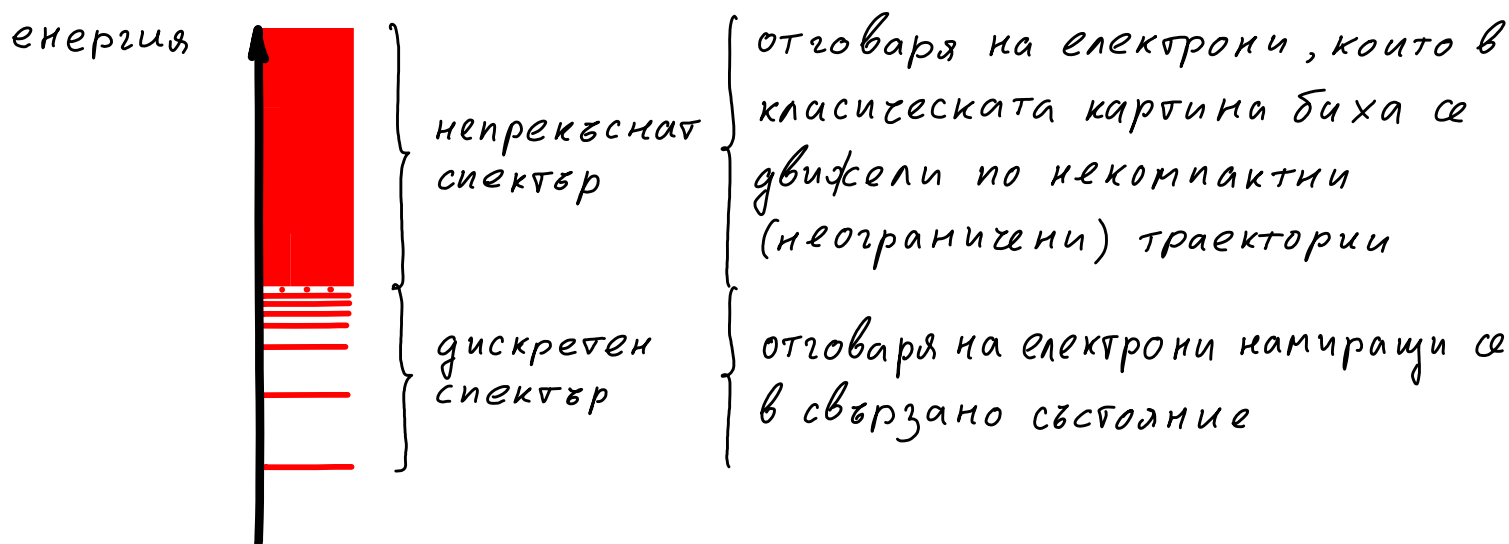
$$A = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_k P_k.$$

Това представяне на A за оператори P_1, \dots, P_k удовлетворяващи свойствата а) - г) по-горе се нарича **спектрално разлагане** (spectral decomposition) на оператора A , а P_j - **спектрални проектори**.

Такова разлагане на A е **единствено**, съгласно неговата връзка с разлагането на A на **собствени вектори и собствени стойности**.

Коментари: 1.) Спектърът на един самоспрегат оператор може да е дискретна редица от числа и по такъв начин принципино обяснява един от основните наблюдателни феномени - дискретните спектри на атомните и молекулни спектри на излъчване - останали необясними в класическата физика.

2.) Във безкрайно мерни Хилбертови пространства един самоспрегат оператор може да има освен дискретен спектър, състоящ се от собствени стойности, също и непрекъснат спектър, числата от който вече нямат пряк смисъл на собствени стойности. Типичен пример на спектъра на енергията на електрон във водороден атом е изобразен на следната фигура:



3.) Оператор в Хилбертово пространство изпълняващ равенството $\langle \phi | A \psi \rangle = \langle A \psi | \phi \rangle$ за $\forall \phi, \psi$ от дефиниционната област на A се наричат ермитови (още, симетрични). За неограничени оператори това е съществено по-слабо условие от условието за самоспрегатост, което е условие и върху дефиниционната област на спрегнатия оператор. Един ермитов оператор може да допуска различни продължения до самоспрегат оператор (а може и да няма такива), и всяко продължение да има различен спектър, т.е., да описва различна физическа наблюдаема.

4.) Така, в безкрайно мерни Хилбертови пространства множество наблюдаеми се описват с неограничени оператори. Физически, неограничеността на представящия оператор отговаря на неограниченост на възможните стойности, които може да приема наблюдаемата. Типичен пример е оператора на енергията.

5.) Математически, работата с неограничени оператори в Хилбертови пространства се затруднява силно от обстоятелството, че те имат дефиниционни области, които са подпространства (обикновено навсякъде гъсти) в Хилбертовото пространство. Тези области за два неограничени оператора може да са толкова различни, че дори сумата на операторите да е едностовно определена за нулевия вектор. В този случай алгебричната постановка с която запознахме нашата система от постулати на квантовата механика става принципино невъзможна. Математически, изходът от тази ситуация е да се стартира математическата постановка на теорията използвайки само ограничени наблюдаеми /оператори. Това има дори физически смисъл - в крайна сметка нашите измервателни прибори имат ограничена скала. Например, ние не измерваме точно енергията, а някакъв отрязък от енергията, което вече е ограничена наблюдаема. Самите неограничени наблюдаеми могат допълнително да се опишат с редици от ограничени наблюдаеми, които задават разширяващи се диапазони на измерване.

Преминваме към следващата физическа интерпретация:

2. Квантови събития ще наричаме наблюдаеми, които могат да приемат само две стойности: 0 и 1, като стойността 1 отговаря на настъпване на събитието (а 0 - на не настъпването).

Нека отсетем факта на спектрално разложение

$$A = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots$$

на всяка наблюдаема A на ортогонални проектори, при което $\{a_1, a_2, \dots\}$ е множеството от стойности на A . Следователно, $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, 1\}$ означава просто, че $A = P$ е ортогонален проектор.

И така, една наблюдаема P е квантово събитие $\Leftrightarrow P$ е ортогонален проектор (т.е., $P^2 = P$ и $P = P^*$).

В допълнение, гистите състояния при които квантовото събитие P настъпва почти сигурно са тези и само тези, чийто вектори на състоянието $\phi \in \mathcal{H}$ са собствени за P , $P\phi = 1 \cdot \phi$, т.е. ϕ лежи в подпространството $P\mathcal{H}$ върху което P проектира.

Отрицанието на събитието P е ортогоналния проектор $1 - P$ и състоянията, при които това събитие настъпва почти сигурно лежат в ортогоналното допълнение на подпространството $P\mathcal{H}$.

Връщайки се пак към спектралното разложение

$$A = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots$$

на произволна наблюдаема A ние можем да интерпретираме ортогоналните проектори P_1, P_2, \dots в това разложение (т.е., спектралните проектори на A) като квантови събития:

P_j е квантовото събитие при което A приема стойност a_j .

Забележка Така, квантовите събития P са във взаимно еднозначно и обратимо съответствие със подпространствата $P\mathcal{H}$ на \mathcal{H} върху които ортогоналните проектори проектират. В елементарната теория на Хилбертови пространства се доказва, че такива подпространства на \mathcal{H} могат да бъдат точно затворените линейни подпространства на \mathcal{H} .

3. Вероятността за настъпване на квантовото събитие P в състояние ω е равна на средната стойност на P в ω : действително, при измерване на P вероятността за настъпване на P се ползва по закона за големите числа като средната честота на настъпване на P , т.е. средната стойност на P .

$$\omega(P) = \text{вероятността за настъпване на } P \text{ в } \omega$$

4. Ако $A = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots$ е спектралното разложение на наблюдаема A , то вероятността A да приеме стойност a_j в състояние $\omega =$ вероятността за настъпване на събитието P_j в $\omega = \omega(P_j)$.

5. Наредба на квантовите събития. Квантова логика.

Нека P и Q са квантови събития (\Rightarrow ортогонални проектори). Казваме, че събитието Q следва от събитието P (или още, че Q съдържа P), ако винаги при настъпването на P настъпва и Q . P настъпва почти сигурно в $\phi \Leftrightarrow \phi \in P\mathcal{H}$. Следователно от тук следва, че $\phi \in Q\mathcal{H}$, т.е.

от P следва $Q \Leftrightarrow P\mathcal{H} \subseteq Q\mathcal{H}$, т.е. P проектира върху подпространство на пространството върху което Q проектира.

Забележки: 1.) Строго погледнато, в последната еквивалентност ние обосновахме единствено посоката " \Rightarrow ", тъй като разсъждавахме само за състояния ϕ в които P настъпва почти сигурно, а не и за други вектори на състояния. Лялното основание за горната еквивалентност може да се получи като следствие от проекционния постулат, който следва по-долу.

2.) Както отбелязахме в забележката в края на интерпретация 2 квантовите събития са във взаимно-еднозначно и обратно съответствие със затворените подпространства на Хилбертовото пространство. При това наредбата на квантовите събития отговаря на наредбата на теоретико-множествено включване между съответстващите затворени подпространства. Множеството на всички затворени подпространства на едно Хилбертово пространство е изходният обект в едно силно актуално направление днес наречено квантова логика. Един от първите въвели и дискутирали тази структура е Биркхоф.

Преминаваме към поредната физическа интерпретация:

6. Елементарни квантови събития и връзката им с чисти състояния.

Съгласно наредбата въведена в предходната точка в множеството на всички квантови събития има най-малък елемент - нулевия оператор. Той разбира се отговаря на "невъзможното събитие".

Така, минималните ненулеви събития имат смисъла на елементарни квантови събития, т.е., това са събития, за които не съществуват по-малки от тях ненулеви събития.

Съгласно полукратата в точка 5 интерпретация, минималните събития съответстват на минимални ненулеви подпространства на Хилбертовото пространство \mathcal{H} . А те са точно едномерните подпространства.

И така, P е елементарно квантово събитие $\Leftrightarrow P$ е ортогонален проектор върху едномерно подпространство.

Математическа забележка Крайно-мерните подпространства на Хилбертово пространство (и в частност, едномерните) са винаги затворени.

Получихме, че елементарните квантови събития са във взаимно еднозначно и обратимо съответствие с едномерните подпространства на \mathcal{H} . От друга страна, във взаимно еднозначно и обратимо съответствие с едномерните подпространства са и чистите състояния.

Така, ползваваме 1-1 съответствие между чистите състояния и елементарните квантови събития:

За ψ елементарно квантово събитие $P \exists$ единствено чисто състояние ϕ в което P се случва почти сигурно: ако ϕ е вектора на състоянието, то $P\phi = \phi$ и $P\mathcal{H} = \mathbb{C}\phi$ - едномерното подпространство породено от ϕ .

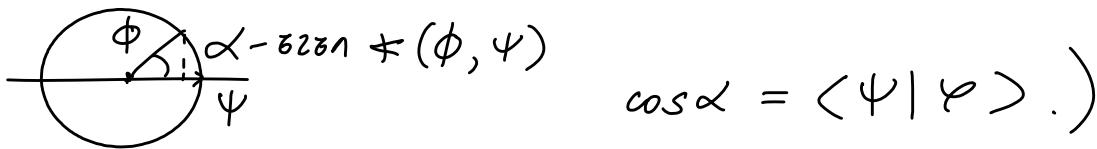
Получената връзка между тисли състояния и елементарни квантови събития е в основата на следващата физическа интерпретация:

7. Нека ϕ и $\psi \in \mathcal{H}$ са единични вектори (т.е. вектори на състояние) и нека P и Q са съответстващите им елементарни квантови събития (т.е., $P\phi = \phi$, $Q\psi = \psi$ и по-точно P проектира върху ϕ , а Q върху ψ).

Вероятност за преход $\phi \mapsto \psi := \langle Q \rangle_{\phi} \equiv \langle \phi | Q \phi \rangle$
(средната стойност на Q в ϕ).

Ще я пресметнем: $Q\phi = \langle \psi | \phi \rangle \psi$ - факт!

(Аналогия от евклидовата геометрия: $Q\phi = (\cos \alpha) \cdot \psi$



$$\Rightarrow \langle Q \rangle_{\phi} = \langle \psi | \phi \rangle \langle \phi | \psi \rangle = |\langle \phi | \psi \rangle|^2 \equiv \langle P \rangle_{\psi}$$

= Вероятност за преход $\psi \mapsto \phi$ (симетричност!)

Вероятностите за преход са основни обекти за предсказание в КТП. Те се пресметат посредством скалярните произведения $\langle \phi | \psi \rangle$, които носят името "амплитуди на прехода".

Да обърнем внимание, че тъй като $\|\phi\| = \|\psi\| = 1$, то

$$|\langle \phi | \psi \rangle|^2 \in [0, 1]$$

и може с пълно право да служи за вероятност.

Основание за предходната интерпретация дава следващия постулат наречен "проекционен постулат" на фон Нойман.

Постулат. Ако при измерване на една наблюдаема A имаща спектрално разложение $A = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots$ сме получили стойност a_j , то непосредствено след измерването системата преминава със скок в смесено състояние описвано с матрицата:

$$\rho = \frac{P_j}{\text{Tr } P_j} \quad (\text{Tr } P_j = \dim(P_j \mathcal{H})),$$

където P_j е съответния спектрален проектор.

В частност, при настъпване на едно елементарно квантово събитие P системата преминава със скок в съответстващото му чисто състояние.

Забележки 1.) Деленето на $\text{Tr } P_j$ в дефиницията на ρ е свързано с условието за нормировка, $\text{Tr } \rho = 1$, което получихме преди. (В случая когато $\text{Tr } P_j = \infty$ този постулат се нуждае от допълнителна прецизировака.)

2.) По-физически, горния постулат може да се изкаже така: ако непосредствено след измерване на една наблюдаема A ние повторим измерването в **полусекното резултантно състояние**, то ще измерим същата стойност и състоянието на системата няма да се измени при това повторно измерване.

3.) Току що написания постулат води до така наречения "квантов парадокс на Зенон": ако ние постоянно измерваме една величина, например, следим непрекъснато положението на една частица, то ще измерваме само една и съща стойност.

4.) Разбира се, когато експериментално се ползват следи от елементарни частици те са цели линии, а не една точка на мястото на "замръзналата" частица. В действителност обаче, наблюдаваните следи не са "непрекъснати" линии, а са поредица от точки - поредица от детекции на частицата между които състоянието на частицата е еволюирало.

Приведения постулат ни дава възможност да получим критерий за това кога две наблюдаеми са едновременно измерими (или още, съвместими) - понятие което въведохме в първата лекция но във втората го момента то не играеше роля.

Следствие. Две наблюдаеми A и B са съвместими $\Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A$, т.е., комутират.

В права посока (\Rightarrow) ние аргументирахме това още в предходната лекция. Няма да привеждаме тук доказателство на това следствие от проекционния постулат, а ще го приемем като математическа интерпретация (определение) на физическото понятие за съвместимост.

С това приключваме нашия увод в квантовата статистика и ще преминем от следващата лекция към излагане на квантовата динамика.