N. N.
08.11.13
-1-

Квантова теория на полето и елементарните частици: Лекция 5

Николай М. Николов

ВНИМАНИЕ: НОВ НАЧАЛНЕН ЧАС - 10:00:00 !

Следващата лекция ще се проведе на 22.11.2013 от 10:00 в 305 ауд. на ФМИ

Допълнения и промени спрямо първата версия са поставени в червен цвят.

1. Математематическо допълнение: диагонализируеми и ермитови оператори в пред-Хилбертови пространства

Определения. 1) Нека V е комплексно векторно пространство (може и безкрайно мерно). Един линеен оператор $A : V \longrightarrow V$ се нарича диагонализируем, ако съществува базис

$$\{ e_j \mid j \in J \} \subseteq V$$

на V (индексиран с някакво множество J), който се състои от собствени вектори на A:

$$A e_j = a_j e_j \quad \forall j \in J , \quad \text{където} \quad a_j \in \mathbb{C} .$$

2) Нека $\mathcal{H}$ е пред-Хилбертово пространство (виж лекция 1), $A : V \longrightarrow V$ е линеен оператор. Тогава A се нарича ермитов, ако

$$\langle \phi \mid A \psi \rangle = \langle A \phi \mid \psi \rangle \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}.$$

В тази точка ще разгледаме някои основни свойства на диагонализируеми, ермитови оператори в пред-Хилбертови пространства. Обръщаме внимание, че ермитовостта сама по себе си не е достатъчно силно свойство за да осигури диагонализируемост.

<u>Твърдение 1.</u> Нека A е диагонализируем ермитов оператор в пред-Хилбертово пространство $\mathcal{H}$. Тогава A се диагонализира в ортонормиран базис на $\mathcal{H}$ и всички собствени стойности на A са реални.

<u>Доказателство.</u> 1.) a е собствена стойност на $A \Rightarrow a \in \mathbb{R}$?
Ако $A\phi = a\phi$ и $\phi \neq 0$, то $a\cancel{\langle\phi|\phi\rangle} = \bar{a}\cancel{\langle\phi|\phi\rangle}$, понеже:
$a\langle\phi|\phi\rangle = \langle\phi|a\phi\rangle = \langle\phi|A\phi\rangle = \langle A\phi|\phi\rangle = \langle a\phi|\phi\rangle = \bar{a}\langle\phi|\phi\rangle$.

2.) Собствени вектори на A с различни собствени стойности са ортогонални?
Нека $A\phi_j = a_j\phi_j$ $(j=1,2)$, $a_1 \neq a_2$, $\phi_1 \neq 0 \neq \phi_2$.

$$\underbrace{(a_1 - a_2)}_{\neq 0}\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \langle \underset{\substack{\| \text{- по } 1.) \\ a_1}}{\bar{a}_1}\phi_1|\phi_2\rangle - \langle\phi_1|a_2\phi_2\rangle$$

$$= \langle A\phi_1|\phi_2\rangle - \langle\phi_1|A\phi_2\rangle = 0 \Rightarrow \langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0.$$

3.) Нека сега $\{\phi_j \mid j \in J\}$ е базис на $\mathcal{H}$ от собствени вектори на A. Тогава за всяка собствена стойност a на A ние ортогонализираме подсистемата $\{\phi_j \mid j \in J,\ A\phi_j = a\phi_j\}$ по процедурата на Грам и Шмид (при което може да се наложи да се използва трансфинитна индукция). $\square$

Определения и забележки: 1.) Нека V е векторно пространство, а $W \subseteq V$ е векторно подпространство. Нека $A_1, \dots, A_s$ е система от линейни оператори, $A_j : V \to V$ (може и да е безкрайна система). Казваме, че W е *инвариантно подпространство* за $A_1, \dots, A_s$ ако:

$$\forall w \in W \ \forall j = 1, \dots, s : \ A_j w \in W.$$

В този случай можем да ограничим операторите до W:

$$A_j\restriction_W : W \longrightarrow W.$$

2.) Нека V е векторно пространство, $A_j : V \to V$, $j = 1, \ldots, s$, са линейни оператори (може и безкрайно множество). Казваме, че V е неприводимо пространство за $A_1, \ldots, A_s$, ако за всяко векторно подпространство $W \subseteq V$, което е инвариантно подпространство за $A_1, \ldots, A_s$, следва че $W = V$ или $W = \{0\}$. С други думи, системата $A_1, \ldots, A_s$ няма нетривиални инвариантни подпространства.

3.) Ако $\mathcal{H}$ е пред-Хилбертово пространство и $W \subseteq \mathcal{H}$ е векторно подпространство, то ортогоналното допълнение на W се определя като:

$$W^{\perp} := \{ \phi \in \mathcal{H} \mid \langle \phi | \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in W \}.$$

Поради неизродеността на скаларното произведение (т.е., $\langle \phi | \phi \rangle = 0 \Longrightarrow \phi = 0$) следва, че $\quad W \cap W^{\perp} = \{0\}.$

Не винаги обаче $W + W^{\perp} = \mathcal{H}$. В случая на Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ и затворено подпространство W следва, че $W + W^{\perp} = \mathcal{H}$.

В общия случай на пред-Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ и векторно подпространство $W \subseteq \mathcal{H}$ ще казваме, че W допуска пълно ортогонално допълнение, ако $W + W^{\perp} = \mathcal{H}$.

Обикновено, ситуация на "непълно ортогонално допълнение" (и то в пред-Хилбертово пространство) се разглежда рядко и в литературата под "ортогонално допълнение" се има предвид случая когато $W + W^{\perp} = \mathcal{H}$.

<u>Лема 1.</u> Нека $\mathcal{H}$ е пред-Хилбертово пространство, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ е ермитов оператор, а $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ е линеен оператор, такъв че

$$[A, B] = 0.$$

Тогава: 1.) Ако $V \subseteq \mathcal{H}$ е инвариантно подпространство за A, то и $V^{\perp}$ е инвариантно подпространство за A.

2.) Ако W е собствено подпространство за A отговарящо на собствена стойност a, т.е.

$$W = \{ \phi \in \mathcal{H} \mid A\phi = a\phi \},$$

то W е инвариантно подпространство за B. Освен това, ако A е диагонализируем, то W допуска пълно ортогонално допълнение, $W + W^{\perp} = \mathcal{H}$.

3.) Нека A и B са и двата диагонализируеми и ермитови оператори, а W е както в подточка 2) на лемата. Тогава ограничението $B\restriction_W$ на B върху W е също диагонализируем ермитов оператор.

<u>Доказателство:</u> 1.) $\phi \in V^{\perp} \Rightarrow \forall \psi \in V : \langle \phi | \psi \rangle = 0$

$\Rightarrow \forall \psi \in V : \langle \phi | A\psi \rangle = 0$ (понеже $A\psi \in V$)

$\Rightarrow \forall \psi \in V \quad \langle A\phi | \psi \rangle = 0 \Rightarrow A\phi \in V^{\perp}$.

2.) $\phi \in W \Rightarrow A\phi = a\phi \Rightarrow A(B\phi) = BA\phi = a(B\phi) \Rightarrow B\phi \in W$.
Нека A е диагонализируем и нека $\{ e_j \mid j \in \mathcal{J} \}$ е ортонормиран базис на $\mathcal{H}$ състоящ се от собствени вектори за A (съгласно Твърдение 1). Нека $\mathcal{J}_1 = \{ j \in \mathcal{J} \mid Ae_j = a e_j \}$ и $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_1 \equiv \{ j \in \mathcal{J} \mid j \notin \mathcal{J}_1 \}$ (теоретико-множественото допълнение на $\mathcal{J}_1$ в $\mathcal{J}$). Тогава

$$W = \mathrm{Span}\{ e_j \mid j \in \mathcal{J}_1 \} \quad \text{и} \quad W^{\perp} = \mathrm{Span}\{ e_j \mid j \in \mathcal{J}_2 \}$$

където "Span" означава "линейна обвивка". $\Rightarrow W + W^{\perp} = \mathcal{H}$.

3.) Нека съгласно Твърдение 1, $\{f_j \mid j \in J\}$ е (ортонормиран) базис на $\mathcal{H}$, състоящ се от собствени вектори за B, $Bf_j = b_j f_j$. От друга страна, съгласно подточки 1 и 2 на лемата, $W + W^\perp = \mathcal{H}$ и W и $W^\perp$ са инвариантни подпространства за B. Нека за $\forall j \in J$:

$$f_j = f_j' + f_j'', \quad f_j' \in W, \quad f_j'' \in W^\perp \implies Bf_j' \in W, \quad Bf_j'' \in W^\perp.$$

$$\implies \quad b_j f_j' + b_j f_j'' = b_j f_j = Bf_j = Bf_j' + Bf_j''.$$

$$\implies \quad W \ni b_j f_j' - Bf_j' = Bf_j'' - b_j f_j'' \in W^\perp$$

$$\implies \quad Bf_j' = b_j f_j' \text{ и } Bf_j'' = b_j f_j'' \quad (\text{понеже } W \cap W^\perp = \{0\}).$$

Така, $\{f_j' \mid j \in J\} \subseteq W$ е система от собствени вектори на B. Понеже $\mathrm{Span}\{f_j \mid j \in J\} = \mathcal{H} = W + W^\perp$, то $\mathrm{Span}\{f_j' \mid j \in J\} = W$. Минавайки към максимална линейно независима подсистема от вектори на $\{f_j' \mid j \in J\}$ получаваме базис на W състоящ се от собствени вектори на B. $\implies B\restriction_W$ е диагонализируем. $\square$

Да припомним и лемата от миналата лекция, която е аналогична на горната.

<u>Лема 2.</u> Ако $A : V \to V$ и $B : V \to V$ са линейни оператори във векторно пространство, $v \in V$, $Av = av$ и $[A, B] = \alpha B$, и $v' = Bv$, то $Av' = (a + \alpha)v'$.

<u>Доказателство.</u> $A(Bv) = BAv + [A, B]v = (a + \alpha)Bv$. $\square$

<u>Теорема 1.</u> Нека $A_1, \ldots, A_s$ е система от диагонализируеми ермитови оператори в пред-Хилбертово пространство $\mathcal{H}$, които комутират:

$$[A_{r_1}, A_{r_2}] = 0, \quad \forall r_1, r_2 = 1, \ldots, s$$

Тогава съществува ортонормиран базис на $\mathcal{H}$ състоящ се от вектори, които са едновременно собствени вектори за всеки от $A_1, \ldots, A_s$.

Доказателство. Прилагаме индукция по s. При $s=1$ това е Твърдение 1. При $s>1$ отделяме A_s и вземаме произволно собствено подпространство W на A_s. Съгласно Лема 1 (точка 3), W ще е инвариантно подпространство за A_r и $A_r \restriction_W$ ще е диагонализируем при $\forall r<s$. По индукция, намираме ортонормиран базис на W състоящ се от собствени вектори за $A_1, \ldots, A_{s-1}$ и A_s. Обединявайки всички тези базиси за различните собствени подпространства W на A_s, получаваме търсения базис на $\mathcal{H}$. $\square$

Физична терминология. Както знаем от предходните лекции комутируемостта $[A, B] = 0$, между наблюдаеми A и B е необходимото и достатъчно условие за едновременната измеримост на A и B. Съгласно Теорема 1, ако $A_1, \ldots, A_s$ са едновременно измерими наблюдаеми, то съществува ортонормиран базис от вектори (на състояния), в които $A_1, \ldots, A_s$ приемат едновременно детерминирани стойности:

$$A_r \phi = a_{r, n_r} \cdot \phi \quad , \quad r = 1, \ldots, s \, , \; n_r = 1, 2, \ldots$$

Системата от собствени стойности $(a_{1,n_1}, \ldots, a_{s,n_s})$ се наричат **квантови числа** на състоянието ϕ. Ако наборът $(a_{1,n_1}, \ldots, a_{s,n_s})$ отделя еднозначно състоянието съответстващо на ϕ, то казваме, че $(a_{1,n_1}, \ldots, a_{s,n_s})$ е **пълен набор от квантови числа**. С други думи:

$$\left| \begin{array}{l} A_1 \phi = a_1 \phi, \ldots, A_s \phi = a_s \phi \\ A_1 \phi' = a_1 \phi', \ldots, A_s \phi' = a_s \phi' \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{l} \phi = c \cdot \phi' \\ \text{или } \phi' = c' \cdot \phi . \end{array} \qquad (CSO)$$

Определение Система от взаимно комутиращи диагонализируеми ермитови оператори $A_1, \ldots, A_s$, която изпълнява условето (CSO) ще наричаме пълна система от съвместими наблюдаеми ("Complete System of Observables").

Например, пълен набор от квантови числа, които характеризират състоянието на един електрон в атом се получава от три взаимно комутиращи наблюдаеми: енергията $\hat{H}$ на електрона (нарича се "главно квантово число"); проекцията $\hat{L}_z$ на външния ъглов момент по фиксирана ос "z"; проекцията $\hat{S}_z$ на вътрешния ъглов момент по същата ос.

Математическа терминология. Ако $A_1, \ldots, A_s$ е система от взаимно комутиращи диагонализируеми, ермитови оператори в $\mathcal{H}$ и $\{\phi_j \mid j \in J\}$ е ортонормиран базис от собствени вектори:

$$A_r \phi_j = a_{r,j} \cdot \phi_j \quad \forall r = 1, \ldots, s, \ \forall j \in J$$

то $\{(a_{1,j}, \ldots, a_{s,j}) \in \mathbb{R}^s \mid j \in J\}$ се нарича съвместен спектър на $A_1, \ldots, A_s$.

Следствие 1. Ако $A_1, \ldots, A_s$ е пълна система от съвместими наблюдаеми (т.е., взаимно комутиращи, диагонализруеми ермитови оператори), то съществува ортонормиран базис на пред-Хилбертовото пространство $\mathcal{H}$ индексиран от съвместния спектър S на $A_1, \ldots, A_s$, т.е.:

$$\mathrm{Span}\{e_{(a_1, \ldots, a_s)} \mid (a_1, \ldots, a_s) \in S \subseteq \mathbb{R}^s\} = \mathcal{H},$$

$$\langle e_{(a_1, \ldots, a_s)} \mid e_{(a'_1, \ldots, a'_s)} \rangle = \delta_{a_1, a'_1} \cdots \delta_{a_s, a'_s},$$

$$A_r e_{(a_1, \ldots, a_s)} = a_r e_{(a_1, \ldots, a_s)}, \ r = 1, \ldots, s.$$

2. Означения на Дирак (Dirac)

2.1. В общ контекст, при означенията на Дирак "разцепваме" скаларни произведения от вида $\langle \phi | A \psi \rangle$ и ги записваме като

$$\langle \phi | A | \psi \rangle \ \left(:= \langle \phi | A \psi \rangle \right),$$

считайки цялото означение $|\psi\rangle$ за вектор в (пред)-Хилбертовото пространство на състоянията $\mathcal{H}$, $A|\psi\rangle$ е действието на оператора A върху $|\psi\rangle$. Така,

$$\langle \phi | A | \psi \rangle \equiv \text{"}\big\langle |\phi\rangle \big| A|\psi\rangle \big\rangle\text{"}$$

и в частност, $\langle \phi | \psi \rangle \equiv \langle \phi | \hat{1} | \psi \rangle \equiv \text{"}\big\langle |\phi\rangle \big| |\psi\rangle \big\rangle\text{"}$ е скаларното произведение на ϕ и ψ, както е и в досегашните означения.

По-концептуално обяснение се основава на тълкуването на $\langle \phi |$, като линеен функционал над $\mathcal{H}$ определен от $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ по формулата:

$$\langle \phi | : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} : |\psi\rangle \longmapsto \langle \phi | \psi \rangle .$$

Така, самото съответствие $|\phi\rangle \longmapsto \langle \phi |$ е анти-линейно. Съгласно така наречената "теорема на Рис за представянето" (Riesz representation theorem) съответствието $|\phi\rangle \longmapsto \langle \phi|$ задава антилинеен изоморфизъм между всяко Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ $(\ni |\phi\rangle)$ и пространството $\mathcal{H}'$ $(\ni \langle \phi |)$ на всички непрекъснати линейни функционали над $\mathcal{H}$.

Наименование: $|\phi\rangle$ - ket-вектори, $\langle \phi |$ - bra-вектори от мнемоничното правило: $\langle \text{bra} \, | \, \text{ket} \rangle$.

Условието за спрягане се записва като

$$\langle \phi | A^* | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | A | \phi \rangle} . \qquad \text{(Conj)}$$

2.2. В тесен контекст, ако $A_1, \ldots, A_s$ е пълна система от съвместими (т.е., комутиращи по между си) наблюдаеми и $S \subseteq \mathbb{R}^s$ е техния съвместен спектър (предполагаме, че е дискретен), то ортонормирания базис $e_{(a_1,\ldots,a_s)}$ от Следствие 1 означаваме:

$$|a_1, \ldots, a_s\rangle \equiv e_{(a_1,\ldots,a_s)} \equiv |e_{(a_1,\ldots,a_s)}\rangle$$

за $\forall\, (a_1,\ldots,a_s) \in S$.

Така например, ако $s=1$, и 0 е собствена стойност на $A \equiv A_1$, то с $|0\rangle$ означаваме съответния собствен вектор,

$$A|0\rangle = 0 \cdot |0\rangle \; (=0),$$

който от друга страна **не е нулев вектор (!), $|0\rangle \neq 0$**. С други думи, в този случай възприемаме означението $|a\rangle$ като единен символ означаващ базисен вектор в (пред-)Хилбертово пространство, индексиран със собствена стойност $a \in \mathbb{R}$ на един ермитов оператор A, $A|a\rangle = a\cdot|a\rangle$.

2.3. Аналогия с вектор-стълб и вектор-ред.

В крайно-мерния случай на $\mathcal{H} = \mathbb{C}^M$

$$|\phi\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix}, \quad \langle\phi| = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_M),$$

$$\langle\phi|A|\phi\rangle = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_M) \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{M1} & \cdots & A_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix}.$$

Може да придадем смисъл и на $|\phi\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix} (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_M)$

$$= \begin{pmatrix} x_1\bar{x}_1 & \cdots & x_1\bar{x}_M \\ \vdots & & \vdots \\ x_M\bar{x}_1 & \cdots & x_M\bar{x}_M \end{pmatrix}.$$

3. Система от квантови хармонични осцилатори

В система от единици, в която $\hbar = 1$, каноничните комутационни съотношения и хамилтонът на система от независими, хармонични квантови осцилатори се записват съответно като:

$$\left.\begin{aligned} &[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\,\delta_{j,k}\cdot\hat{1} \\ &[\hat{q}_j, \hat{q}_k] = 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k], \\ &\hat{q}_j^* = \hat{q}_j, \quad \hat{p}_j^* = \hat{p}_j, \quad j,k = 1,\dots,s, \end{aligned}\right\} \qquad (qp-CCR)$$

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\omega_j}{2}\left(\hat{q}_j^2 + \hat{p}_j^2\right). \qquad (H-qp)$$

При прехода:

$$\left|\begin{aligned} \hat{a}_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{q}_j + i\hat{p}_j\right) \\ \hat{a}_j^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{q}_j - i\hat{p}_j\right) \end{aligned}\right. , \quad j = 1,\dots,s \qquad (qp-aa^*)$$

имаме: $(qp-CCR) \Longleftrightarrow (aa^*-CCR)$ и

$(H-qp) \Longleftrightarrow (H-aa^*)$, където:

$$\left.\begin{aligned} &[\hat{a}_j, \hat{a}_k^*] = \delta_{j,k}\cdot\hat{1}, \\ &[\hat{a}_j, \hat{a}_k] = 0 = [\hat{a}_j^*, \hat{a}_k^*], \\ &(\hat{a}_j^*)^* = \hat{a}_j, \qquad j,k = 1,\dots,s, \end{aligned}\right\} \qquad (aa^*-CCR)$$

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{s} \omega_j\,\hat{a}_j^*\hat{a}_j + \mathcal{E}_0, \quad \mathcal{E}_0 = \sum_{j=1}^{s}\frac{\omega_j}{2}. \qquad (H-aa^*)$$

<u>Теорема 2.</u> Нека $\hat{a}_j$ за $j=1,\dots,s$ е система от линейни оператори в пред-Хилбертово пространство $\mathcal{H}$, които имат спрегнати оператори $\hat{a}_j^*$, т.е., $\langle \hat{a}_j \phi | \psi \rangle = \langle \phi | \hat{a}_j^* \psi \rangle \ \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$, така че се изпълняват съотношенията (aa^*-CCR). Нека да допуснем, че съществува общ собствен вектор $\Omega' \in \mathcal{H}$ за операторите

$$\hat{N}_1 := \hat{a}_1^* \hat{a}_2 , \dots , \hat{N}_s = \hat{a}_s^* \hat{a}_s$$

и нека $\mathcal{H}'$ е линейната обвивка на вектори от вида

Ω', $\hat{b}_1 \dots \hat{b}_k \Omega'$, където $\hat{b}_j \in \{\hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^*\}$ и $k=1,2,\dots$

Тогава $\mathcal{H}'$ е инвариантно подпространство за системата от оператори $\{\hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^*\}$ и в него съществува ортонормиран базис от вектори $\{ |n_1,\dots,n_s\rangle \mid n_1,\dots,n_s = 0,1,\dots\} \subseteq \mathcal{H}'$, т.е.,

$$\mathrm{Span}\{ |n_1,\dots,n_s\rangle \mid n_1,\dots,n_s = 0,1,\dots\} = \mathcal{H}' \quad \text{и}$$

$$\langle n_1,\dots,n_s | n_1',\dots,n_s' \rangle = \delta_{n_1,n_1'} \cdots \delta_{n_s,n_s'} ,$$

така че:

$$\hat{N}_j |n_1,\dots,n_s\rangle = n_j |n_1,\dots,n_s\rangle ,$$

$$\hat{a}_j |n_1,\dots,n_s\rangle = \begin{cases} 0 , & \text{ако } n_j = 0, \text{ в противен случай:} \\ \sqrt{n_j}\, |n_1,\dots,n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1},\dots,n_s\rangle , \end{cases}$$

$$\hat{a}_j^* |n_1,\dots,n_s\rangle = \sqrt{n_j+1}\, |n_1,\dots,n_{j-1}, n_j + 1, n_{j+1},\dots,n_s\rangle ,$$

за всяко $j=1,\dots,s$.

<u>Доказателство.</u> Нека $\hat{N}_j \Omega' = n_j^{(0)} \Omega'$, за някакви
$$n_1^{(0)}, \dots, n_s^{(0)} \in \mathbb{R}.$$

Полагаме: $|n_1^{(0)}, \dots, n_s^{(0)}\rangle := \|\Omega'\|^{-1} \cdot \Omega'$ и индуктивно
$$|n_1, \dots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \dots, n_s\rangle := \frac{1}{\sqrt{n_j}} \hat{a}_j |n_1, \dots, n_s\rangle$$
за $n_j = n_j^{(0)}, n_j^{(0)} - 1, \dots$ при $\forall j = 1, \dots, s$.

Тъй като $[\hat{N}_j, \hat{a}_j] = (-1) \cdot \hat{a}_j$ (съгласно $(aa^*\text{-}CCR)$ и $\hat{N}_j = \hat{a}_j^* \hat{a}_j$), то от Лема 2 с индукция по $n_j = n_j^{(0)}, n_j^{(0)} - 1, \dots$ следва, че:
$$\hat{N}_j |n_1, \dots, n_s\rangle = n_j |n_1, \dots, n_s\rangle$$
за $n_j = n_j^{(0)}, n_j^{(0)} - 1, \dots$ при $\forall j = 1, \dots, s$.

Отново с индукция по $n_j = n_j^{(0)}, n_j^{(0)} - 1, \dots$ следва, че:
$$\left\| |n_1, \dots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \dots, n_s\rangle \right\|^2$$
$$= \frac{1}{n_j} \langle n_1, \dots, n_s | \hat{a}_j^* \hat{a}_j | n_1, \dots, n_s \rangle$$
$$\equiv \frac{1}{n_j} \langle n_1, \dots, n_s | \hat{N}_j | n_1, \dots, n_s \rangle$$
$$\equiv \frac{1}{n_j} n_j \langle n_1, \dots, n_s | n_1, \dots, n_s \rangle = 1$$
т.е. $\| |n_1, \dots, n_s\rangle \| = 1$ за $n_j = n_j^{(0)}, n_j^{(0)} - 1, \dots$ при $\forall j = 1, \dots, s$.

Следователно, $n_j^{(0)} \in \{0, 1, \dots\}$ за $\forall j = 1, \dots, s$, тъй като в противен случай бихме получили собствени вектори $|n_1, \dots, n_s\rangle$ за $\hat{N}_j$ с отрицателна собствена стойност n_j, а $\hat{N}_j = \hat{a}_j^* \hat{a}_j$ е от друга страна неотрицателен оператор.

Нека сега започнем да строим по индукция вектори в обратната посока $n_j = 0, 1, \dots$ за $\forall j = 1, \dots, s$:

$$|n_1, \dots, n_{j-1}, n_j + 1, n_{j+1}, \dots, n_s\rangle' := \frac{1}{\sqrt{n_j + 1}} \hat{a}_j^* |n_1, \dots, n_s\rangle'.$$

започвайки от вектора $|0, \dots, 0\rangle' := |0, \dots, 0\rangle$. В хода на доказателството ще покажем, че $|n_1, \dots, n_s\rangle' \equiv |n_1, \dots, n_s\rangle$ за $\forall\, n_j \leqslant n_j^{(0)}$ и $j = 1, \dots, s$.

а) Тъй като $[\hat{N}_j, \hat{a}_j^*] = (-1) \cdot \hat{a}_j^*$ (съгласно $(aa^*\text{-CCR})$ и $\hat{N}_j = \hat{a}_j^* \hat{a}_j$), то от Лема 2 с индукция по $n_j = 0, 1, \dots$ следва, че:

$$\hat{N}_j |n_1, \dots, n_s\rangle' = n_j |n_1, \dots, n_s\rangle'$$

за $n_j = 0, 1, \dots$ при $\forall j = 1, \dots, s$.

б) С индукция по $n_j = 0, 1, \dots$ показваме, че $\| |n_1, \dots, n_s\rangle' \| = 1$:

$$\begin{aligned} &\| |n_1, \dots, n_{j-1}, n_j + 1, n_{j+1}, \dots, n_s\rangle' \|^2 \\ &= \frac{1}{n_j + 1} \langle n_1, \dots, n_s | \hat{a}_j \hat{a}_j^* | n_1, \dots, n_s\rangle' \\ &\equiv \frac{1}{n_j + 1} \langle n_1, \dots, n_s | \hat{N}_j + 1 | n_1, \dots, n_s\rangle' \\ &\equiv \frac{1}{n_j + 1} (n_j + 1) \langle n_1, \dots, n_s | n_1, \dots, n_s\rangle' = 1. \end{aligned}$$

в) Проверяваме, че

$$\hat{a}_j |n_1, \ldots, n_s\rangle' = \begin{cases} 0, & \text{ако } n_j = 0, \text{ в противен случай:} \\ \sqrt{n_j}\, |n_1, \ldots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \ldots, n_s\rangle'. \end{cases}$$

Наистина, $\hat{a}_j |0, \ldots, 0\rangle' \equiv \hat{a}_j |0, \ldots, 0\rangle = 0$ – по построение.

$$\begin{aligned} \hat{a}_j |n_1, \ldots, n_s\rangle' &= \frac{1}{\sqrt{n_j}} \hat{a}_j \hat{a}_j^* |n_1, \ldots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \ldots, n_s\rangle' \\ &= \frac{1}{\sqrt{n_j}} (\hat{N}_j + 1) |n_1, \ldots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \ldots, n_s\rangle' \\ &= \frac{1}{\sqrt{n_j}} n_j |n_1, \ldots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \ldots, n_s\rangle'. \end{aligned}$$

г.) От в) с индукция по $n_j = 0, \ldots, n_j^{(0)}$ и построенията следва, че

$$|n_1, \ldots, n_s\rangle' = |n_1, \ldots, n_s\rangle$$

за $\forall\, n_j = 0, \ldots, n_j^{(0)}$ и $j = 1, \ldots, s$. $\square$

<u>Забележка.</u> От (aa^*-CCR) следва, че $\hat{N}_1, \ldots, \hat{N}_s$ е система от взаимно комутиращи ермитови оператори. От Теорема 2 следва, че тези оператори са диагонализируеми в $\mathcal{H}'$ и освен това са пълна система от съвместими наблюдаеми, чийто съвместен спектър е $\{0, 1, \ldots\}^{\times s} \subset \mathbb{R}^s$.

декартова степен s.

<u>Следствие 2</u> а) Всяка реализация на съотношенията (aa^* - CCR) в пред-Хилбертово пространство $\mathcal{H}$, при която $\mathcal{H}$ е неприводимо пространство за системата $\{\hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s\}$ и операторите $\hat{N}_1 = \hat{a}_1^* \hat{a}_1, \dots, \hat{N}_s = \hat{a}_s^* \hat{a}_s$ притежават поне един общ собствен вектор е изоморфна на реализацията в която:

$$\mathcal{H} = \mathrm{Span}\{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1, \dots, n_s \in \{0, 1, \dots\}\}$$

$$\langle n_1, \dots, n_s | n_1', \dots, n_s' \rangle = \delta_{n_1, n_1'} \cdots \delta_{n_s, n_s'},$$

$$\hat{a}_j |n_1, \dots, n_s\rangle = \begin{cases} 0, & \text{ако } n_j = 0, \text{ в противен случай:} \\ \sqrt{n_j}\, |n_1, \dots, n_{j-1}, n_j - 1, n_{j+1}, \dots, n_s\rangle, \end{cases}$$

$$\hat{a}_j^* |n_1, \dots, n_s\rangle = \sqrt{n_j + 1}\, |n_1, \dots, n_{j-1}, n_j + 1, n_{j+1}, \dots, n_s\rangle.$$

б) Всяка реализация на съотношенията (**qp** - CCR) в пред-Хилбертово пространство $\mathcal{H}$, такава че $\mathcal{H}$ е неприводимо пространство за системата $\{\hat{q}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{q}_s, \hat{p}_s\}$ и операторът $\hat{H}$ (H-qp) има поне един собствен вектор, е изоморфна на реализацията от подточка а) спрямо прехода ($qp - aa^*$). В частност, $\hat{H}$ е диагонализируем ермитов оператор със спектър

$$\hat{H} |n_1, \dots, n_s\rangle = \left(\sum_{j=1}^{s} n_j \omega_j + \varepsilon_0 \right) |n_1, \dots, n_s\rangle$$

$$\left(\varepsilon_0 = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2} \omega_j \right).$$

Указания за доказателството. а) следва непосредствено.

б) Нека $\hat{H}\Omega' = \mathcal{E}\,\Omega'$. Разгледайте векторите

$$\Omega'_{n_1,\dots,n_s} := \hat{a}_1^{\,n_1}\cdots\hat{a}_s^{\,n_s}\,\Omega'$$

и покажете, че $\hat{H}\,\Omega'_{n_1,\dots,n_s} = \left(\mathcal{E} - \sum_{j=1}^{s} n_j\omega_j\right)\cdot\Omega'_{n_1,\dots,n_s}$

(съгласно $[\hat{H},\hat{a}_j] = -\omega_j\hat{a}_j$ и Лема 2). Но $\hat{H}$ е неотрицателен оператор и следователно $\exists\, m_1,\dots,m_s \in \{0,1,\dots\}$, така че

$$\Omega'' = \hat{a}_1^{\,m_1}\cdots\hat{a}_s^{\,m_s}\,\Omega' \neq 0,$$

но $\hat{a}_j\,\Omega'' = 0 \quad \forall\, j = 1,\dots,s$ (защо?).

$\Rightarrow \quad N_j\,\Omega'' = \hat{a}_j^*\hat{a}_j\,\Omega'' = 0$ – общ собствен вектор.

Прилагаме предната подточка. $\square$

Ще отбележим още една формула, която следва директно при итерирането на формулата за действието на $\hat{a}_j^*$:

$$|n_1,\dots,n_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!\cdots n_s!}}\,(\hat{a}_1^*)^{n_1}\cdots(\hat{a}_s^*)^{n_s}\,|0,\dots,0\rangle.$$

4. Ролята на $\hbar$

В точка 3 работихме в система от единици в която $\hbar = 1$. Там $\hat{H}$ има размерност на честота ω, т.е., на 1/време. За да се трансформира в енергия,

$$\hat{H} \mapsto \hbar \hat{H}_{(\text{стар})}$$

Тогава полагаме,
$$\begin{cases} \hat{a}_j = \dfrac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\hat{q}_j + i \hat{p}_j \right) \\ \hat{a}_j^* = \dfrac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\hat{q}_j - i \hat{p}_j \right) \end{cases},$$

което заедно с
$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\hbar \cdot \delta_{j,k} \cdot \hat{1}$$
$$[\hat{q}_j, \hat{q}_k] = 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k],$$
$$\hat{q}_j^* = \hat{q}_j, \quad \hat{p}_j^* = \hat{p}_j, \quad j,k = 1,\ldots,s$$

води отново до (aa^*-CCR). $\hat{H}$ (H-aa^*) приема вида
$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{s} \hbar \omega_j \, \hat{a}_j^* \hat{a}_j + \mathcal{E}_0, \quad \mathcal{E}_0 = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2} \hbar \omega_j .$$

Физически смисъл: операторите $\hat{a}_j$, $\hat{a}_j^*$ и $\hat{N}_j = \hat{a}_j^* \hat{a}_j$ остават безразмерни и са свързани с целочислен спектър. Операторът $\hat{N}_j$ определя броя "кванти" (елементарни порции) енергия за честота ω_j. Всяка такава порция носи енергия по формулата на Планк: $\hbar\omega_j$.

Терминология: пълният набор от квантови числа $n_1, \dots, n_s$ индексиращ базиса $|n_1, \dots, n_s\rangle$ се наричат числа на запълване.

n_j = брой кванти / частици в състояние "j".

$\hat{N}_j = \hat{a}_j^* \hat{a}_j$ = оператор на броя на кванти / частици в състояние "j".

$\hat{N} = \hat{N}_1 + \dots + \hat{N}_s$ = оператор на пълния брой кванти / частици.

$\hat{N} |n_1, \dots, n_s\rangle = (n_1 + \dots + n_s) |n_1, \dots, n_s\rangle$.

$\Rightarrow$ $n = n_1 + \dots + n_s$ = пълния брой кванти / частици.

$\hat{a}_j^*$ – оператори на раждане / creation operators

$\hat{a}_j$ – оператори на унищожаване / annihilation

$\mathcal{H}_n := \mathrm{Span}\{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n = n_1 + \dots + n_s \}$

за $n = 0, 1, \dots$

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C} \cdot |0, \dots, 0\rangle$ – едно-мерно

$\mathcal{H}_n$ е собственото подпространство на $\hat{N}$ със собствено число n:

$$\mathcal{H}_n = \{ \phi \in \mathcal{H} \mid \hat{N} \phi = n \phi \}.$$

$\hat{N}$ – ермитов $\Rightarrow$ $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \dots$

т.е., $\mathcal{H}_n \perp \mathcal{H}_m$ при $n \neq m$.

Обръщаме внимание, че $\hat{a}_j^*$ изменя броя на частиците с $+1$:

$$\hat{a}_j^*(\mathcal{H}_n) \subseteq \mathcal{H}_{n+1},$$

$$\hat{a}_j^* : \quad \begin{tikzcd} \mathcal{H}_0 \oplus \arrow[dr] & \mathcal{H}_1 \oplus \arrow[dr] & \cdots \oplus \arrow[dr] & \mathcal{H}_n \oplus \arrow[dr] & \cdots \\ \mathcal{H}_0 \oplus & \mathcal{H}_1 \oplus & \cdots \oplus & \mathcal{H}_n \oplus & \cdots \end{tikzcd}$$

докато $\hat{a}_j$ изменя броя на частиците с -1:

$$\hat{a}_j(\mathcal{H}_n) \subseteq \mathcal{H}_{n-1} \quad \text{за } n > 1,$$

$$\hat{a}_j : \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{H}_0 \oplus \arrow[dl] & \mathcal{H}_1 \oplus \arrow[dl] & \cdots \oplus \arrow[dl] & \mathcal{H}_n \oplus \arrow[dl] & \cdots \arrow[dl] \\ 0 & \mathcal{H}_0 \oplus & \mathcal{H}_1 \oplus & \cdots \oplus & \mathcal{H}_n \oplus & \cdots \end{tikzcd}$$

Векторът $\Omega = |0,\dots,0\rangle$ се нарича вакуум. Това е състоянието с най-ниска енергия ($\Rightarrow$ нула кванти/частици).

5. Реализации

5.1. В $L^2(\mathbb{R})$ $(s=1)$.

Нека отново $\hbar = 1$. $\hat{q}$ = умножение по q, $\hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial q}$.

$$\Longrightarrow \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q + \frac{d}{dq}\right), \quad \hat{a}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q - \frac{d}{dq}\right).$$

Непосредствено се проверява:

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \ni \Omega(q) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{q^2}{2}}$$

$$\hat{H}\,\Omega(q) = -\frac{\omega}{\cancel{2}}\left(\frac{d}{dq}\right)^2 \Omega(q) + \frac{\omega}{\cancel{2}} q^2 \Omega(q) = \frac{\omega}{\cancel{2}}\Omega(q)$$

Нормировка:

$$\left\| e^{-\frac{q^2}{2}} \right\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \left| e^{-\frac{q^2}{2}} \right|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-q^2} = \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Векторите $\Omega_n(q) = (a^*)^n \Omega(q)$ дефинирани в миналата лекция са

$$\Omega_n(q) = (\hat{a}^*)^n \Omega(q) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{1}{4}}} h_n(q)\, e^{-\frac{q^2}{2}},$$

където: $h_n(q) = (-1)^n e^{q^2}\left(\frac{d}{dq}\right)^n e^{-q^2}$ – полиноми на Ермит (Hermit).

Извод на формулата (не е задължителен):

a) $\left(q - \frac{d}{dq}\right) \circ e^{\frac{q^2}{2}} = -e^{\frac{q^2}{2}} \circ \frac{d}{dq}$?

(Пишем "$\circ$", за да подчетаем, че става дума за композиция на оператори.)

Общо пресмятане: $\left(q - \frac{d}{dq}\right) \circ e^{\lambda q^2} - e^{\lambda q^2} \circ \left(q - \frac{d}{dq}\right) =$

$$= -\left(\frac{d}{dq} \circ e^{\lambda q^2} - e^{\lambda q^2} \circ \frac{d}{dq}\right) = -\frac{d}{dq}\left(e^{\lambda q^2}\right) = -2\lambda q e^{\lambda q^2}.$$

по правилото на Лайбниц.

$$\Longrightarrow \quad \left(q - \frac{d}{dq}\right) \circ e^{\lambda q^2} + e^{\lambda q^2} \circ \frac{d}{dq} = \underbrace{(1-2\lambda)}_{=0 \text{ при } \lambda = \frac{1}{2}} q e^{\lambda q^2}$$

б) От а) $\Longrightarrow \quad e^{-\frac{q^2}{2}} \circ \left(q - \frac{d}{dq}\right) \circ e^{\frac{q^2}{2}} = -\frac{d}{dq}.$

$$\Longrightarrow \quad e^{-\frac{q^2}{2}} \circ \left(q - \frac{d}{dq}\right)^n \circ e^{\frac{q^2}{2}}$$

$$= e^{-\frac{q^2}{2}} \circ \left(q - \frac{d}{dq}\right) \circ e^{\frac{q^2}{2}} \circ \cdots \circ e^{-\frac{q^2}{2}} \circ \left(q - \frac{d}{dq}\right) \circ e^{\frac{q^2}{2}}$$

$$= \left(e^{-\frac{q^2}{2}} \circ \left(q - \frac{d}{dq}\right) \circ e^{\frac{q^2}{2}}\right)^n = (-1)^n \left(\frac{d}{dq}\right)^n.$$

в) Оттук: $(\hat{a}^*)^n e^{-\frac{q^2}{2}} = \left(q - \frac{d}{dq}\right)^n e^{-\frac{q^2}{2}}$

$$= \left(q - \frac{d}{dq}\right)^n \circ e^{\frac{q^2}{2}} \left(e^{-q^2}\right)$$

$$= e^{\frac{q^2}{2}} \circ e^{-\frac{q^2}{2}} \circ \left(q - \frac{d}{dq}\right)^n \circ e^{\frac{q^2}{2}} \left(e^{-q^2}\right)$$

$$= (-1)^n e^{\frac{q^2}{2}} \left(\frac{d}{dq}\right)^n e^{-q^2} = h_n(q)\, e^{-\frac{q^2}{2}}. \quad \square$$

Заключение. Пред-Хилбертовото пространство $\mathcal{H}^{(0)}$, в което се реализират съотношенията (aa^*-CCR) при $s=1$ е изоморфно на

$$\mathcal{H}^{(0)} = \mathbb{C}[q]\cdot e^{-\frac{q^2}{2}} \equiv \left\{ f(q)\, e^{-\frac{q^2}{2}} \;\middle|\; f(q) - \text{полином} \right\} \subset L^2(\mathbb{R})$$

От функционалния анализ: $\overline{\mathcal{H}^{(0)}} = L^2(\mathbb{R})$, т.е., $\mathcal{H}^{(0)}$ е гъсто в $L^2(\mathbb{R})$.

С други думи: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n!}}\Omega_n =: |n\rangle \right\}_{n=0}^{\infty}$ – ортонормиран базис в $\mathcal{H}$.
(пълнота)

Ако се върнем към означенията на Следствие 2:

$\mathcal{H}^{(0)}$ там беше означено с $\mathcal{H}$, т.е. $\mathcal{H} := \mathbb{C}[q]\cdot e^{-\frac{q^2}{2}}$

а тогава, самото попълнение на $\mathcal{H}$ до Хилбертово пространство означават с $\overline{\mathcal{H}} = L^2(\mathbb{R})$.

При $s>1$:

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}[q_1,\dots,q_s]\, e^{-\frac{q_1^2}{2}-\dots-\frac{q_s^2}{2}} \underset{\text{гъсто}}{\subset} L^2(\mathbb{R}^s)$$

тъй като

$$\hat{a}_j\, e^{-\frac{q_1^2}{2}-\dots-\frac{q_s^2}{2}} \equiv \left(q_j + \frac{\partial}{\partial q_j}\right) e^{-\frac{q_1^2}{2}-\dots-\frac{q_s^2}{2}} = 0$$

$$\forall j = 1,\dots,s.$$

5.2. Чисто алгебрична реализация

s = 1.) $\mathcal{H} = \mathbb{C}[z]$, $\Omega = 1$, $\Omega_n = z^n$

$\hat{a} = \frac{d}{dz}$, $\hat{a}^* = z$, $\hat{a}^* \hat{a} = z \frac{d}{dz}$ – оператор на Ойлер

Скаларно произведение:

$$\langle f(z) \mid g(z) \rangle = \bar{f}\left(\frac{d}{dz}\right) g(z) \Big|_{z=0},$$

където $\bar{f}$ е полинома с комплексно спрегнати коефициенти на f.

Наистина: достатъчно е да се провери:

$$\langle \Omega_n \mid \Omega_m \rangle = \langle z^n \mid z^m \rangle = \left(\frac{d}{dz}\right)^n z^m \Big|_{z=0} = n!\, \delta_{n,m}.$$

s > 1.) $\mathcal{H} = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_s]$, $\Omega = 1$.

$\hat{a}_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$, $\hat{a}_j^* = z_j$, $j = 1, \dots, s$.

$$|n_1, \dots, n_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! \cdots n_r!}} (\hat{a}_1^*)^{n_1} \cdots (\hat{a}_s^*)^{n_s}\, \Omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n_1! \cdots n_r!}} z_1^{n_1} \cdots z_s^{n_s}.$$

$\hat{N} = \sum_{j=1}^{s} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ – операторът на Ойлер

– дава общата степен на хоменност.

6. Частичкова интерпретация (Particle intergpretation)

Нека разгледаме едночастичното подпространство

$$\mathcal{H}_1 = \mathrm{Span}\{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1 + \dots + n_s = 1 \}$$
$$= \mathrm{Span}\{ |\omega_1\rangle, \dots, |\omega_s\rangle \},$$

където

$$|\omega_j\rangle := |0, 0, \dots, \underset{\uparrow \atop j}{1}, 0, \dots 0\rangle = \hat{a}_j^* \overbrace{|0, \dots, 0\rangle}^{\Omega}$$

– състояние с един квант в състояние "ω_j".

В тази точка ще изведем пряка връзка между подпространствата $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_n$ (с $n>1$ частици).

6.1. Отстъпление: операции над Хилбертови пространства.

1) (Ортогонална) пряка сума: $\mathcal{H} := \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}''$

по определение $\forall \phi \in \mathcal{H}$ се записва: $\phi = \underset{\in}{\phi'} + \underset{\in}{\phi''}$ еднозначно.

Скаларно произведение:

$$\langle \phi_1' \oplus \phi_1'' \mid \phi_2' \oplus \phi_2'' \rangle := \langle \phi_1' \mid \phi_2' \rangle' + \langle \phi_1'' \mid \phi_2'' \rangle''$$

Физическа интерпретация: "обединение на състояния"

Операцията пряка сума може да се итерира краен или безкраен брой пъти и да се интерпретира като пространства от редици:

$$\bigoplus_{r=1}^{s} \mathcal{H}_r = \left\{ (\phi_r)_{r=1}^{s} \,\middle|\, \phi_r \in \mathcal{H}_r \right\},$$

$$\bigoplus_{r=1}^{\infty} \mathcal{H}_r = \left\{ (\phi_r)_{r=1}^{\infty} \,\middle|\, \phi_r \in \mathcal{H}_r \text{, с допълнително условие} \right\},$$

$$\alpha (\phi_r)_r + \beta (\psi_r) = (\alpha \phi_r)_r + (\beta \psi_r)_r \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}),$$

$$\langle (\phi_r)_r \,|\, (\psi_r) \rangle = \sum_r \langle \phi_r | \psi_r \rangle,$$

където допълнителното условие по-горе, в зависимост от контекста бива:

- алгебрична пряка сума: $\phi_r \neq 0$ само за краен брой r. Това води до пред-Хилбертови пространства.
- Хилбертова пряка сума: $\|(\phi_r)_{r=1}^{\infty}\|^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \|\phi_r\|^2 < \infty$. Това води до Хилбертово пространство, ако $\forall \mathcal{H}_r$ са Хилбертови.

Ако $A_r : \mathcal{H}_r \to \mathcal{H}_r$ са линейни оператори, то

$$\bigoplus_r A_r : \bigoplus_r \mathcal{H}_r \to \bigoplus_r \mathcal{H}_r \; : (\phi_r)_r \mapsto (A\phi_r)_r$$

което в случай на безкрайни преки суми е винаги безпроблемно единствено при алгебрични преки суми.

По-общо, система $A_{r_1,r_2} : \mathcal{H}_{r_1} \to \mathcal{H}_{r_2}$ дефинира блочен оператор

$$(A_{r_1,r_2}) : \bigoplus_r \mathcal{H}_r \to \bigoplus_r \mathcal{H}_r \; : (\phi_r)_r \mapsto (\psi_r)_r,$$

$$\psi_r = \sum_{r'} A_{r,r'} (\phi_{r'}),$$

където в случай на безкрайни редици е нужно отново да се добави условие за финитност или сходимост.

2) Обединение на две физически системи (независими измервания)

Нека имаме две независими физични системи, в които независимо се измерват някакви наблюдаеми:

$$\hat{H}' \text{ в } \mathcal{H}', \quad \hat{H}'|\varepsilon_j'\rangle = \varepsilon_j'|\varepsilon_j'\rangle, \ j=1,2,\dots$$
$$\hat{H}'' \text{ в } \mathcal{H}'', \quad \hat{H}''|\varepsilon_k''\rangle = \varepsilon_k''|\varepsilon_k''\rangle, \ k=1,2,\dots$$

Обединяването на информацията от двете измервания води до комбинирано състояние

$$|\varepsilon_j', \varepsilon_k''\rangle \equiv |\varepsilon_j'\rangle|\varepsilon_k''\rangle \equiv |\varepsilon_j'\rangle \otimes |\varepsilon_k''\rangle$$

(алтернативни означения).

Това задава ортонормиран базис на така нареченото тензорно произведение $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$.

Ние ще определим абстрактно тензорното произведение $V \otimes W$ на две векторни пространства V и W, като векторно пространство снабдено с изображение:

$$\begin{aligned} \otimes : V \times W &\longrightarrow V \otimes W \\ v, w &\longmapsto v \otimes w \end{aligned},$$

което изпълнява следните три свойства:

($\otimes$1) билинейност

$$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \otimes w = \alpha_1 v_1 \otimes w + \alpha_2 v_2 \otimes w,$$
$$v \otimes (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 v \otimes w_1 + \alpha_2 v \otimes w_2.$$

($\otimes$2) Ако $v_1, \dots, v_k \in V$ и $w_1, \dots, w_\ell \in W$ са линейно независими системи, то $\{v_i \otimes w_j \mid i=1,\dots,k, j=1,\dots,\ell\}$ е линейно независима.

($\otimes$3) $\mathrm{Span}\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\} = V \otimes W$.

Тензорното произведение на две пред-Хилбертови пространства, $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$ се определя допълнително със следното скаларно произведение

$$\langle \phi_1' \otimes \phi_1'' \mid \phi_2' \otimes \phi_2'' \rangle = \langle \phi_1' \mid \phi_2' \rangle' \langle \phi_1'' \mid \phi_2'' \rangle''$$

(Физически, това отговаря на умножение на вероятности за преход в съответствие със закона за вероятност на независими събития.)

В заключение обръщаме внимание, че крайни тензорни произведения $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ могат да се определят или с пряко обобщение на горните определения, или с краен брой итерации на бинарното тензорно произведение: $(\cdots(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \otimes \cdots) \otimes \mathcal{H}_n$.

Безкрайните тензорни произведения, макар че са възможни за определяне са много по-деликатни за конструиране, в сравнение да речем, с преките суми.

Допълнителни сведения и конструкции свързани с тензорни произведения са приведени в лекция 6.

6.3. Теорема 3.

Нека $\mathcal{H}_1$ е пред-Хилбертово пространство

$$\mathcal{H}_1^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_{n}.$$

Нека $S_n : \mathcal{H}_1^{\otimes n} \to \mathcal{H}_1^{\otimes n}$: $S_n(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n)$

$$:= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)},$$

където $\mathcal{S}_n$ е множеството на всички пермутации $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.

Тогава S_n е ортогонален проектор: $\begin{cases} S_n^* = S_n, \\ S_n^2 = S_n. \end{cases}$

Нека $\mathcal{H}_n := S_n(\mathcal{H}_1^{\otimes n})$ и ако $\{|\omega_j\rangle\}_j \underset{\text{базис}}{\subseteq} \mathcal{H}_1$, то

$$\hat{a}_j^* \Psi_n := \sqrt{n+1}\, S_{n+1}(|\omega_j\rangle \otimes \Psi_n) \in \mathcal{H}_{n+1} \quad (\forall j) \text{ и нека}$$

$$\mathcal{H}_0 := \mathbb{C} \cdot \Omega, \quad \hat{a}_j^* \Omega := |\omega_j\rangle \quad (\forall j).$$

Тогава, ако $\hat{a}_j := (\hat{a}_j^*)^*$ $(\forall j)$ и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \cdots$, то $\{\hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \hat{a}_2, \hat{a}_2^*, \dots\}$ изпълнява (aa^*-CCR) и тази реализация е изоморфна на неприводимата реализация описана в Следствие 2 а) като:

$$(\hat{a}_1^*)^{n_1} \cdots (\hat{a}_s^*)^{n_s}\, \Omega = \sqrt{n!}\, S_n\left(|\omega_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes |\omega_s\rangle^{\otimes n_s}\right),$$

$$|n_1, \dots, n_s\rangle = \binom{n}{n_1, \dots, n_s}^{1/2} S_n\left(|\omega_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes |\omega_s\rangle^{\otimes n_s}\right),$$

$$n = n_1 + \cdots + n_s, \quad \binom{n}{n_1, \dots, n_s} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_s!}.$$

Доказателство 1) Защо $S_n^* = S_n$?

$$\langle \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n \,|\, S_n(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n)\rangle$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \langle \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n \,|\, \psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(n)}\rangle$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^{n} \langle \phi_j \,|\, \psi_{\sigma(j)}\rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^{n} \langle \phi_{\sigma(j)} \,|\, \psi_j\rangle$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \langle \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)} \,|\, \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n\rangle$$

$$= \langle S_n(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) \,|\, \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n\rangle .$$

(Разпространява се по линейност - виж в лекция 6 допълнително за този аргумент.)

2.) Защо $S_n^2 = S_n$? $\quad S_n^2(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) =$

$$= \frac{1}{n!^2} \sum_{\sigma, \eta \in \mathfrak{S}_n} \phi_{\sigma(\eta(1))} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(\eta(n))}$$

$$= \frac{1}{n!^2} \underbrace{\sum_{\eta \in \mathfrak{S}_n}}_{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)} = S_n(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n),$$

където преходът към последния ред става със смяна на сумационните индекси $(\sigma, \eta) \mapsto (\sigma\eta, \eta)$.

(Разпространява се по линейност.)

3.) Определяме $\hat{b}_{n,j}\left(|\omega_{j_1}\rangle \otimes \cdots \otimes |\omega_{j_n}\rangle\right)$

$$:= \delta_{j,j_1} \; |\omega_{j_2}\rangle \otimes \cdots \otimes |\omega_{j_n}\rangle$$

за $n = 1, 2, \dots$ и $\forall j$. Така, $\hat{b}_{n,j} : \mathcal{H}_1^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes (n-1)}$.

Твърдим, че за $\hat{b}^*_{n,j} : \mathcal{H}_1^{\otimes (n-1)} \longrightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes n}$ имаме:

$$b^*_{n,j}\left(|\omega_{j_2}\rangle \otimes \cdots \otimes |\omega_{j_n}\rangle\right) = |\omega_j\rangle \otimes |\omega_{j_2}\rangle \otimes \cdots \otimes |\omega_{j_n}\rangle.$$

Наистина, нека за по-кратко

$$|\omega_{j_1}\rangle \otimes \cdots \otimes |\omega_{j_n}\rangle =: |\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_n}\rangle.$$

$$\equiv |\omega_{j_1}\rangle \cdots |\omega_{j_n}\rangle$$

Тогава (в съответствие формула (Conj) от стр. 8):

$$\langle \omega_{j_2'}, \dots, \omega_{j_n'} | \hat{b}_{n,j} | \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_n}\rangle$$

$$= \delta_{j,j_1} \langle \omega_{j_2'}, \dots, \omega_{j_n'} | \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_n}\rangle$$

$$= \delta_{j,j_1} \delta_{j_2', j_2} \cdots \delta_{j_n', j_n} = \overline{\delta_{j,j_1} \delta_{j_2', j_2} \cdots \delta_{j_n', j_n}}$$

$$= \overline{\langle \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_n} | \omega_j, \omega_{j_2'}, \dots, \omega_{j_n'}\rangle}$$

$$= \langle \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_n} | \hat{b}^*_{n,j} | \omega_{j_2'}, \dots, \omega_{j_n'}\rangle.$$

4.) Нека $\hat{a}_{n,j} := \lambda_n \mathcal{S}_{n-1} \circ \hat{b}_{n,j} \circ \mathcal{S}_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n-1}$,
за $\forall j$ и някакви $\lambda_n \in \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Тогава $\hat{a}^*_{n,j} = \overline{\lambda}_n \left(\mathcal{S}_{n-1} \circ \hat{b}_{n,j} \circ \mathcal{S}_n\right)^*$

$$= \lambda_n \mathcal{S}_n \circ \hat{b}^*_{n,j} \circ \mathcal{S}_{n-1} : \mathcal{H}_{n-1} \longrightarrow \mathcal{H}_n .$$

Твърдим, че

$$\hat{a}^*_{n,j} \circ \hat{a}_{n,k} - \hat{a}_{n+1,k} \circ \hat{a}^*_{n+1,j} = \delta_{j,k} \hat{1} : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n \qquad (*1)$$

ако $\lambda_n = \sqrt{n}$.

Проверка: трябва да се покаже, че:

$$\lambda_n^2 \mathcal{S}_n \circ \hat{b}^*_{n,j} \circ \mathcal{S}_{n-1} \circ \hat{b}_{n,k} \circ \mathcal{S}_n |\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_n}\rangle$$
$$- \lambda_{n+1}^2 \mathcal{S}_n \circ \hat{b}_{n+1,k} \circ \mathcal{S}_{n+1} \circ \hat{b}^*_{n+1,j} \circ \mathcal{S}_n |\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_n}\rangle$$
$$= \delta_{j,k} \mathcal{S}_n |\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_n}\rangle . \qquad \text{(Check)}$$

<u>Лема 3.</u> (a) $\forall \phi_1, \dots, \phi_{n+1} \in \mathcal{H}$, $\forall j_1, \dots, j_{n+1}$

$$\mathcal{S}_{n+1}\Big(\phi_1 \otimes \mathcal{S}_n\big(\phi_2 \otimes \cdots \otimes \phi_{n+1}\big)\Big) = \mathcal{S}_{n+1}\big(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_{n+1}\big),$$

$$\mathcal{S}_{n+1}\Big(\hat{b}^*_{j_1} \mathcal{S}_n\big(|\omega_{j_2}\rangle \cdots |\omega_{j_{n+1}}\rangle\big)\Big) = \mathcal{S}_{n+1}\Big(|\omega_{j_1}\rangle |\omega_{j_2}\rangle \cdots |\omega_{j_{n+1}}\rangle\Big).$$

(b) $\forall j, j_1, \dots, j_n$: $\mathcal{S}_{n-1}\Big(\hat{b}_j \mathcal{S}_n\big(|\omega_{j_1}\rangle \cdots |\omega_{j_n}\rangle\big)\Big)$

пропуска се

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \delta_{j,j_r} \mathcal{S}_{n-1}\Big(|\omega_{j_1}\rangle \cdots \cancel{|\omega_{j_r}\rangle} \cdots |\omega_{j_n}\rangle\Big).$$

Доказателство на Лема 3. (a)

Първо, $S_n(\phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)}) = S_n(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n))$ за $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ (пермутация).

Оттук, $S_{n+1}(\phi_1 \otimes S_n(\phi_2 \otimes \cdots \otimes \phi_{n+1}))$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} S_{n+1}(\phi_1 \otimes \phi_{\sigma(1)+1} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)+1})$$

$$= \frac{1}{n!}\, n!\, S_{n+1}(\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \cdots \otimes \phi_{n+1})$$

(b) $S_{n-1}(\hat{b}_j\, S_n(|\omega_{j_1}\rangle \cdots |\omega_{j_n}\rangle)) =$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} S_{n-1}(\hat{b}_j(|\omega_{j_{\sigma(1)}}\rangle \cdots |\omega_{j_{\sigma(n)}}\rangle))$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{r=1}^{n} \sum_{\eta} S_{n-1}(\hat{b}_j(|\omega_{j_r}\rangle |\omega_{j_{\eta(1)}}\rangle \cdots |\omega_{j_{\eta(n)}}\rangle))$$

(където, η пробягва $\forall$ биекции на $\{1,\dots,n\} \setminus \{r\}$ в себе си)

$$= \frac{(n-1)!}{n!} \sum_{r=1}^{n} \delta_{j,j_r}\, S_{n-1}(|\omega_{j_1}\rangle \cdots \cancel{|\omega_{j_r}\rangle} \cdots |\omega_{j_n}\rangle).$$

Продължаваме с доказателството на Теорема 3 и (Check):

$$S_n \circ \hat{b}^*_{n,j} \circ S_{n-1} \circ \hat{b}_{n,k} \circ S_n |\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_n}\rangle$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \delta_{k,j_r}\, S_n(\hat{b}^*_{n,j}(S_{n-1}(|\omega_{j_1}\rangle \cdots \cancel{|\omega_{j_r}\rangle} \cdots |\omega_{j_n}\rangle)))$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \delta_{k,j_r}\, S_n(|\omega_j\rangle |\omega_{j_1}\rangle \cdots \cancel{|\omega_{j_r}\rangle} \cdots |\omega_{j_n}\rangle)$$

$$S_n \circ \hat{b}_{n+1,k} \circ S_{n+1} \circ \hat{b}^*_{n+1,j} \circ S_n |\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_n}\rangle$$
$$= S_n \left(\hat{b}_{n+1,k} \left(S_{n+1} \left(|\omega_j\rangle |\omega_{j_1}\rangle \cdots |\omega_{j_n}\rangle \right)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} \delta_{j,k} S_n \left(\cancel{|\omega_j\rangle} |\omega_{j_1}\rangle \cdots |\omega_{j_n}\rangle \right)$$
$$+ \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^{n} \delta_{k,j_r} S_n \left(|\omega_j\rangle |\omega_{j_1}\rangle \cdots \cancel{|\omega_{j_r}\rangle} \cdots |\omega_{j_n}\rangle \right)$$

След заместване на горните две равенства в лявата сорана на (Check) следват съкращения и се възпроизвежда дясната сорана.

Аналогично на (*1), използвайки Лема 3, се доказва и:

$$\hat{a}^*_{n+1,j} \circ \hat{a}^*_{n,k} - \hat{a}^*_{n+1,k} \circ \hat{a}^*_{n,j} = 0 : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+2} \qquad (*2)$$
$$\hat{a}_{n-1,j} \circ \hat{a}_{n,k} - \hat{a}_{n-1,k} \circ \hat{a}_{n,j} = 0 : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n-2} \qquad (*3)$$

Достатъчно е докажем (*2), понеже (*3) е спрегнато на него.

$$S_{n+2} \circ \hat{b}^*_{n+2,k} \circ S_{n+1} \circ \hat{b}^*_{n+1,j} \circ S_n |\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_n}\rangle$$
$$= S_{n+2} \left(|\omega_k\rangle |\omega_j\rangle |\omega_{j_1}\rangle \cdots |\omega_{j_n}\rangle \right)$$
$$= S_{n+2} \left(|\omega_j\rangle |\omega_k\rangle |\omega_{j_1}\rangle \cdots |\omega_{j_n}\rangle \right)$$
$$= S_{n+2} \circ \hat{b}^*_{n+2,j} \circ S_{n+1} \circ \hat{b}^*_{n+1,k} \circ S_n |\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_n}\rangle .$$

Така, полагайки $\hat{a}_j \big|_{\mathcal{H}_n} := \hat{a}_{n,j}$ и $\hat{a}^*_j \big|_{\mathcal{H}_n} = \hat{a}^*_{n+1,j}$. приведените конструкции на $\hat{a}_{n,j}$ и $\hat{a}^*_{n,j}$ заедно с доказаните равенства (*1)-(*3) водят до (CCR - aa*).

Остана да проверим

$$(\hat{a}_1^*)^{n_1} \cdots (\hat{a}_s^*)^{n_s}\, \Omega \overset{?}{=} \sqrt{n!}\, S_n \left(|\omega_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes |\omega_s\rangle^{\otimes n_s} \right),$$

или още, $\hat{a}_{j_1}^* \cdots \hat{a}_{j_n}^*\, \Omega \overset{?}{=} \sqrt{n!}\, S_n \left(|\omega_{j_1}\rangle \cdots |\omega_{j_n}\rangle \right)$.

Това следва от конструкцията:

$$\hat{a}_{j_1}^* S_{n-1} |\omega_{j_2}\rangle \cdots |\omega_{j_n}\rangle = \sqrt{n}\, S_n \left(\hat{b}_{n,j_1}^* \left(S_{n-1} \left(|\omega_{j_2}\rangle \cdots |\omega_{j_n}\rangle \right) \right) \right)$$
$$= \sqrt{n}\, S_n \left(|\omega_{j_1}\rangle |\omega_{j_2}\rangle \cdots |\omega_{j_n}\rangle \right))$$

с индукция по n и Лема 3 (а).

Равенството:

$$|n_1, \ldots, n_s\rangle = \binom{n}{n_1, \ldots, n_s}^{1/2} S_n \left(|\omega_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes |\omega_s\rangle^{\otimes n_s} \right),$$

следва от вече остановена връзка (виж. стр. 16). $\square$