Квантова теория на полето и елементарните частици: Лекция 6

Николай М. Николов

I. Комбинирани (съставни) системи

Това е допълнение към постулатите на квантовата механика, което споменахме в лекция 5.

I.1. Квантова статистика на съставни системи

I.1.a. Класическа гледна точка

В класическата статистика наблюдаемите величини съставят комутативна алгебра, която всъщност е алгебрата от функции над множеството от елементарни състояния на системата. Например, ако системата е с краен брой елементарни състояния, които номерираме като $\{1, \dots, N\}$ то една функция върху това множество се дава с редица $(f_1, \dots, f_N)$ (редицата от стойности) и умножението е поточково (покомпонентно):

$$(f_1, \dots, f_N) \cdot (g_1, \dots, g_N) = (f_1 \cdot g_1, \dots, f_N \cdot g_N).$$

Ако сега разгледаме система състояща се от две описвани независимо части, то множеството от състояния на тази съставна система е Декартовото произведение на множествата от елементарни състояния на съставящите системи. Например, елементарното състояние на една частица (материална точка) се описва от нейното положение и скорост, $(\vec{r}, \vec{v})$, поради което елементарното състояние на система от две частици ще се задава от двойка $((\vec{r}_1, \vec{v}_1), (\vec{r}_2, \vec{v}_2))$.

Ако за простота отново предположим, че двете подсистеми съставляващи комбинираната система се описват от краен брой елементарни състояния, да речем, номерирани съответно като $\{1, \dots, N\}$ и $\{1, \dots, M\}$, то съставната система ще се описва от Декартовото произведение

$$\begin{array}{ccc} (1,1) & \cdots & (1,M) \\ \vdots & & \vdots \\ (N,1) & \cdots & (N,M) \end{array}$$

Тогава една наблюдаема на съставната система се описва с таблица от числа

$$\begin{array}{ccc} h_{1,1} & \cdots & h_{1,M} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{N,1} & \cdots & h_{N,M} \end{array}$$

Това векторно пространство е изморфно на тензорното произведение на векторните пространства на наблюдаеми на двете съставящи подсистеми

$$\{f = (f_1, \dots, f_N)\} \cong \mathbb{C}^N \quad и \quad \{g = (g_1, \dots, g_M)\} \cong \mathbb{C}^M,$$

$$\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^M = \mathbb{C}^{N \times M},$$

като тензорното произведение, $f \otimes g$, на две наблюдаеми съответно от двете подсистеми съответства на таблицата

$$\begin{array}{ccc} f_1 g_1 & \cdots & f_1 g_M \\ \vdots & & \\ f_N g_1 & \cdots & f_N g_M \end{array}$$

Умножението на наблюдаеми в комбинирана система, което отново е поточково (покомпонентно) се съчетава с тензорното произведение по следния прост начин:

$$(f \otimes g) \cdot (f' \otimes g') = (f \cdot f') \otimes (g \cdot g'), \qquad (\bullet)$$

което може да се провери непосредствено. Горната формула се обобщава непосредствено за всякакъв тип асоциативни алгебри и въвежда понятието тензорно произведение на асоциативни алгебри, което ще прегледаме в следващата подточка I.1.б.

<u>Математически коментар извън курса.</u>

За запознати с теория на категориите припомняме, че категория е математическа структура аксиоматизираща съвкупности от изображения между различни множества спрямо операцията композиция. Аналогично, понятието група аскиоматизира съвкупности от обратими изображения на едно множество в себе си спрямо композицията. По такъв начин всеки "тип математическа структура" определя категория чрез съвкупността на всички морфизми между всевъзможните представители на този тип структура. Така изоморфни категории или по-финото понятие, еквивалентни категори, отговарят на "еквивалентни структури" поне от гледна точка на морфизми. Една от най-плодотворните еквивалентноси на категори е:

Категорията на локално компактни Хаусдорфови пространства	$\simeq$	Категорията на комутативни C^*-алгебри с обърната посока на стрелките (моросризмите),

което съставлява теорията Гелфанд. При тази еквивалентност пряката сума (дизюнктно обединение) и прякото (Декартовото) произведение на топологични пространства, които са напълно категорни понятия, преминават съответно в пряка сума и тензорно произведение на (комутативни) алгебри. Това е пример на превод на геометрични структури на алгебричен език (и обратното), което е широко застъпено също в алгебричната геометрия и дори в теория на числата.

Горната еквивалентност може да се счита също за начална мотивация на некомутативната геометрия, при която се търси обобщение на преведените на алгебричен език геометрични структури в некомутативни алгебри.

I.1.б Тензорни произведения на асоциативни алгебри

Припомняме от миналата лекция, че тензорно произведение на векторни пространства $V_1, \ldots, V_N$ е векторно пространство означавано с $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ и се задава с изображение

$$\otimes : V_1 \times \cdots \times V_N \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$$

със свойствата:

($\otimes$1) полилинейност: съответствието

$$(v_1, \ldots, v_N) \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$$

е линейно по всеки един от аргументите v_j при фиксиране на останалите $v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_N$.

($\otimes$2) Ако $v_{j,1}, \ldots, v_{j,n_j} \in V_j$ са линейно независими за $\forall\, j = 1, \ldots, N$, то и системата от вектори

$$v_{1,k_1} \otimes \cdots \otimes v_{N,k_N} \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_N,$$

където $k_j \in \{1, \dots, n_j\}$ за $\forall j = 1, \dots, N$ е линейно независима.

($\otimes$3) $\mathrm{Span}\,\{(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \mid v_j \in V_j,\ j = 1, \dots, N\} = V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$.

Забележки. 1) При топологични векторни пространства, условието ($\otimes$3) може да се модифицира с условието, че лявата страна е гъсто подпространство на дясната. Тогава говорим за топологично тензорно произведение, което е прието да се означава с $\hat{\otimes}$.

2) Определението ни за тензорно произведение се различава от общоприетото стандартно определение, макар че е еквивалентно на него, което ние ще приемем без доказателство. Ще приемем също на готово, че такъв обект – тензорно произведение – съществува и е единствен с точност до изоморфизъм.

Непосредствено от определението следва, че ако

$$\{e_{j,\xi} \mid \xi \in \Xi_j\} \subseteq V_j \qquad (B\text{-}j)$$

са (линейни) базиси за $\forall j = 1, \dots, N$ (може и безкрайни), то

$$\{e_{1,\xi_1} \otimes \cdots \otimes e_{N,\xi_N} \mid (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \Xi_1 \times \cdots \times \Xi_N\} \qquad (B)$$

е базис на $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$. От тук следва, че линейни тъждества или дефиниционни равенства в тензорни произведения $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ е достатъчно да се установяват само за елементи от вида

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n\,,$$

които се наричат разложими елементи, тъй като това в частност включва и базиса (B), от който равенството се разпространява върху цялото пространство $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ по (поли)линейност.

Верен е и обратния критерий, който ще приемем без доказателство:

<u>Твърдение 1</u> Нека полилинейната функция $\otimes : V_1 \times \cdots \times V_N \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ е такава, че съществуват линейни базиси $(B\text{-}j)$ за $\forall j = 1, \ldots, N$, за които (B) е линеен базис на $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ (т.е., не предполагаме условията $(\otimes 2)$ и $(\otimes 3)$). Тогава са в сила и условията $(\otimes 2)$ и $(\otimes 3)$ за тензорно произведение. $\square$

Примери за определения и тъждества зададени за разложими елементи срещнахме още в предната лекция. Поредния случай на такова определение е тензорното произведение на асоциативни алгебри.

Ако $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_N$ са асоциативни алгебри, то векторното пространство

$$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_N$$

се превръща в асоциативна алгебра спрямо следната операция на умножение определена за разложими елементи като:

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_N) \cdot (B_1 \otimes \cdots \otimes B_N) = (A_1 \cdot B_1) \otimes \cdots \otimes (A_N \cdot B_N) \qquad (\otimes - \bullet)$$

$(A_j, B_j \in \mathcal{A}_j)$. Асоциативността се установява непосредствено:

$$\big((A_1 \otimes \cdots \otimes A_N) \cdot (B_1 \otimes \cdots \otimes B_N)\big) \cdot (C_1 \otimes \cdots \otimes C_N)$$
$$= (A_1 \cdot B_1 \cdot C_1) \otimes \cdots \otimes (A_N \cdot B_N \cdot C_N)$$
$$= (A_1 \otimes \cdots \otimes A_N) \cdot \big((B_1 \otimes \cdots \otimes B_N) \cdot (C_1 \otimes \cdots \otimes C_N)\big).$$

<u>Пример от алгебрата</u>. За алгебри от полиноми е в сила:

$$\mathbb{C}[z_1] \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}[z_N] \cong \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N].$$

Ако $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$ са $*$-алгебри (виж Лекции 1 и 2), то $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_N$ се превръща в $*$-алгебра спрямо спрежението

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_N)^* := A_1^* \otimes \cdots \otimes A_N^* . \qquad (\otimes - *)$$

Обръщаме внимание, че обръщането на реда в последното равенство е по принцип **безсмислено**, понеже

$$A_N^* \otimes \cdots \otimes A_1^* \in \mathcal{A}_N \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_N .$$

По такъв начин ние различаваме векторните пространства

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_N \quad \text{и} \quad V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(N)} ,$$

ако $V_1, \dots, V_N$ са различни пространства, където σ е произволна (нееднинична) пермутация, макар че съществува естествен изоморфизъм

$$\sigma_* : V_1 \otimes \cdots \otimes V_N \xrightarrow{\cong} V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(N)} ,$$

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \longmapsto v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(N)} .$$

Долната "$*$" указва на следната "функториална ковариантност":

$$\sigma_* \circ \sigma'_* = (\sigma \circ \sigma')_* , \qquad id_* = 1 ,$$

която следва непосредствено от действието върху разложими елементи.

<u>Забележка.</u> В термини на операторите σ_* проектора на симетризация $S_N : V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n}$ въведен в Теорема 3 на Лекция 5 се записва като:

$$S_N = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \sigma_* .$$

Ако алгебрите $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$ имат единици, то всяка от тях $\mathcal{A}_j$ може да се отъждестви с подалгебра на $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_N$

$$\mathcal{A}_j \cong \widetilde{\mathcal{A}}_j := 1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_j \otimes \cdots \otimes 1 \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_N .$$

Така, $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_N = \widetilde{\mathcal{A}}_1 \cdot \cdots \cdot \widetilde{\mathcal{A}}_N$ и

$$[A, B] = 0 \quad \text{ако} \quad A \in \mathcal{A}_j,\ B \in \mathcal{A}_k \ \text{за} \ j \neq k,$$

$$\widetilde{\mathcal{A}}_j \cap \widetilde{\mathcal{A}}_k = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1} \quad (j \neq k), \quad \mathbb{1} = 1 \otimes \cdots \otimes 1 .$$

I.1.в Постулат за съставни системи

Постулира се, че асоциативната $*$-алгебра на наблюдаеми на съставна система, състояща се от подсистеми, описвани от алгебри на наблюдаеми, съответно $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N$, е тензорното им произведение:

$$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_N .$$

Тъй като предполагаме, че алгебрите от наблюдаеми съдържат единици, то можем да отъждествим всяка $\mathcal{A}_j$ с подалгебра на $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_N$, както обяснихме по-горе. В частност, ако $A \in \mathcal{A}_j$ и $B \in \mathcal{A}_k$, то $[A, B] = 0$ и следователно A и B са едновременно измерими (съвместими), което и отговаря на нашата интуиция, че подсистемите, които са комбинирани в една обща система се описват с независими наблюдаеми.

<u>Забележка</u>. Обратното не е вярно, ако $A, B \in \mathcal{A}$ и $[A, B] = 0$, т.е., ако A и B са съвместими наблюдаеми в една система, то не винаги можем да разбием системата в съставна система, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, така че $A \in \mathcal{A}_1 \otimes 1 \cong \mathcal{A}_1$ и $B \in 1 \otimes \mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}_2$. В случаите когато това е възможно, наблюдаемите A и B се наричат статистически независими. Прост контрапример за съвместими и статистически зависими наблюдаеми е A и $B = A^2$ за $A \neq \mathbb{1}$.

За съставна система $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_N$ определяме произведение $\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_N$ на състояния ω_j в $\mathfrak{A}_j$ $(j = 1, \ldots, N)$ като:

$$(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_N)(A_1 \otimes \cdots \otimes A_N) = \omega_1(A_1) \cdots \omega_N(A_N)$$

т.е., това е състояние при което средната стойност на произведение от статистически независими наблюдаеми е равна на произведението от средните им стойности взети по отделно. Непосредствено се проверява, че $\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_N$ е състояние (проверете!).

__Забележка.__ Състояния върху $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_N$, което не може да се представи като $\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_N$ се нарича сплетено (entangled). Свойствата на сплетените състояния са в основата на едно ново направление: "квантова информатика".

__Твърдение 2__ Нека $\mathcal{H}_j$ за $j = 1, \ldots, N$ са крайномерни (Хилбертови) пространства (виж Лекции 1 и 2). Тогава съществува естествен изоморфизъм

$$Op(\mathcal{H}_1) \otimes \cdots \otimes Op(\mathcal{H}_N) \cong Op(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N). \qquad (\otimes Op)$$

__Доказателство.__ В случая "естествен изоморфизъм" означава, че ще го конструираме експлицитно.

1) За всеки $A_j : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_j$, $A_j \in Op(\mathcal{H}_j)$, $j = 1, \ldots, N$ определяме линеен оператор $A_1 \otimes \cdots \otimes A_N \in Op(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N)$:

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_N)(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_N) := A_1(\phi_1) \otimes \cdots \otimes A_N(\phi_N). \qquad (\otimes A)$$

Твърдим, че така определеното изображение

$$Op(\mathcal{H}_1) \times \cdots \times Op(\mathcal{H}_N) \xrightarrow{\otimes} Op(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N).$$

изпълнява условията ни за тензорно произведение:

• полилинейноста на $A_1 \otimes \cdots \otimes A_N$ следва от полилинейноста на $A_1(\phi_1) \otimes \cdots \otimes A_N(\phi_N)$ (в $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$).

• свойства ($\otimes 2$) и ($\otimes 3$) ще покажем едновременно като докажем, съгласно твърдение 1, че базисите от оператори за $\forall j = 1, \ldots, N$:

$$\{ E^{(j)}_{k,\ell} \mid k, \ell = 1, \ldots, \dim \mathcal{H}_j \} \subseteq Op(\mathcal{H}_j),$$

$$E^{(j)}_{k,\ell}(e_{j,m}) := \delta_{m,\ell} \, e_{j,k},$$

където $\{ e_{j,\ell} \mid \ell = 1, \ldots, \dim \mathcal{H}_j \} \subseteq \mathcal{H}_j$ - базис, определят базис $\{ E^{(1)}_{k_1,\ell_1} \otimes \cdots \otimes E^{(N)}_{k_N,\ell_N} \mid k_j, \ell_j = 1, \ldots, \dim \mathcal{H}_j, \ j = 1, \ldots, N \}$ в $Op(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N)$.

Нека $A \in Op(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N)$ и A се определя от матрица:

$$A(e_{1,\ell_1} \otimes \cdots \otimes e_{N,\ell_n}) = \sum_{k_1,\ldots,k_N} A_{k_1,\ldots,k_N;\ell_1,\ldots,\ell_N} \, e_{1,k_1} \otimes \cdots \otimes e_{N,k_N}.$$

Тогава проста проверка ни дава, че A се разлага еднозначно като:

$$A = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_N \\ \ell_1,\ldots,\ell_N}} A_{k_1,\ldots,k_N;\ell_1,\ldots,\ell_N} \, E^{(1)}_{k_1,\ell_1} \otimes \cdots \otimes E^{(N)}_{k_N,\ell_N}.$$

Следователно $E^{(1)}_{k_1,\ell_1} \otimes \cdots \otimes E^{(N)}_{k_N,\ell_N}$ задават базис.

2.) Остава да проверим, че установения линеен изоморфизъм ($\otimes Op$) е изоморфизъм на $*$-алгебри.

2а) Защо е морфизъм на умножението, т.е., композицията:

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) \circ (B_1 \otimes \cdots \otimes B_N) = (A_1 \circ B_1) \otimes \cdots \otimes (A_N \circ B_N), \quad (\otimes - \circ)$$

което се съгласува с определението $(\otimes - \bullet)$ на умножение в тензорно произведение на асоциативни алгебри. Проверката е непосредствена:

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)\big((B_1 \otimes \cdots \otimes B_N)(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_N)\big)$$
$$= \big(A_1(B_1(\phi_1))\big) \otimes \cdots \otimes \big((A_N(B_N(\phi_N))\big)$$
$$= (A_1 \circ B_1) \otimes \cdots \otimes (A_N \circ B_N)(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_N).$$

2б) Защо е морфизъм на $*$-операцията? Определението $(\otimes - *)$ трябва да се съгласува с определението за спрягане в Хилбертово пространство:

$$\langle \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_N \,|\, (A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N)\rangle$$
$$= \langle (A_1^* \otimes \cdots \otimes A_N^*)(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_N) \,|\, \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N \rangle.$$

Проверка: $\langle \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_N \,|\, (A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N)\rangle$

$$= \langle \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_N \,|\, A_1(\psi_1) \otimes \cdots \otimes A_N(\psi_N)\rangle$$
$$= \langle \phi_1 | A_1(\psi_1)\rangle \cdots \langle \phi_N | A_N(\psi_N)\rangle$$
$$= \langle A_1^*(\phi_1) | \psi_1 \rangle \cdots \langle A_N^*(\phi_N) | \psi_N \rangle$$
$$= \langle A_1^*(\phi_1) \otimes \cdots \otimes A_N^*(\phi_N) \,|\, \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N \rangle.$$
$$= \langle (A_1^* \otimes \cdots \otimes A_N^*)(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_N) \,|\, \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N \rangle. \quad \square$$

Последното твърдение може да се обобщи и за произволни Хилбертови пространства, като се използват обаче специални топологични тензорни произведения (на алгебри на Фон Нойман, които обобщават $Op(\mathcal{H})$).

Горното Твърдение 2 обосновава частната форма на постулата за комбинирани системи, която ние приехме в миналата лекция: ако една съставна система се състои от N подсистеми, всяка от които независимо се описва с Хилбертово пространство на състоянията $\mathcal{H}_j$ за $j=1,\dots,N$, то съставната система се описва с Хилбертово пространство на състоянията: $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$.

I.2. Динамика на съставни системи

<u>Твърдение 3.</u> Нека за $\forall j = 1,\dots,N$, $U_j(t)$ са автономни оператори на еволюция в (пред-)Хилбертово пространство $\mathcal{H}_j$ породени от Хамилтониан H_j. Тогава

$$U(t) = U_1(t) \otimes \cdots \otimes U_N(t)$$

са автономни оператори на еволюция в $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ с Хамилтониан

$$H = H_1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes H_2 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes H_N .$$

С други думи, ако

$$U_j(t_1)\, U_j(t_2) = U_j(t_1 + t_2), \quad U_j(t)^* = U_j(t)^{-1}, \quad U_j(0) = 1$$

(автономна квантова динамична система),

$$H_j = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} U_j(t) \Big|_{t=0}, \quad U_j(t) = e^{iH_j t}$$

(взаимовръзка с Хамилтониана), то същото и за $U(t)$ и H:

$$U(t_1)\, U(t_2) = U(t_1 + t_2), \quad U(t)^* = U(t)^{-1}, \quad U(0) = 1 \quad \text{и}$$

$$H = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} U(t) \Big|_{t=0}, \quad U(t) = e^{iHt}.$$

<u>Доказателство.</u> Свойствата

$$\mathcal{U}(t_1)\,\mathcal{U}(t_2) = \mathcal{U}(t_1+t_2)\,, \quad \mathcal{U}(t)^* = \mathcal{U}(t)^{-1}\,, \quad \mathcal{U}(0) = 1$$

следват от общите тъждества установени в точки 2а и 2б на доказателството на Твърдение 2.

Равенствата

$$H = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t)\Big|_{t=0} \quad \text{и} \quad \mathcal{U}(t) = e^{iHt}$$

са еквивалентни при наличие на горните свойства на $\mathcal{U}(t)$, както установихме в частта за квантови динамики в Лекция 3.

Ще покажем, че

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t)\Big|_{t=0} = H_1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes H_2 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes H_N .$$

Това следва от тъждеството на Лайбниц за тензорни произведения:

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathcal{U}_1(t) \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}_N(t)\Big) = \sum_{r=1}^{N} \mathcal{U}_1(t) \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}_{r-1}(t) \otimes \frac{d\mathcal{U}_r}{dt}(t) \otimes \mathcal{U}_{r+1}(t) \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}_N(t).$$

(без доказателство на последното, макар че то от своя страна е следствие от полилинейността: $\mathcal{U}_1(t') \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}_N(t') - \mathcal{U}_1(t) \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}_N(t)$
$$= \sum_{r=1}^{N} \mathcal{U}_1(t') \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}_{r-1}(t') \otimes \big(\mathcal{U}_r(t') - \mathcal{U}_r(t)\big) \otimes \mathcal{U}_{r+1}(t) \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}_N(t).\ )$$

$\square$

<u>Физическа интерпретация.</u> Еволюционният оператор $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_1(t) \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}_N(t)$ в Хилбертовото пространство на състоянията $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ на една съставна система съответства на квантова еволюция, при която всяка от подсистемите еволюира независимо от останалите с еволюционен оператор $\mathcal{U}_j(t)$ в $\mathcal{H}_j$ за $j = 1, \dots, N$. С други думи, подсистемите не взаимодействат по между си. При това, Хамилтонианът $H_j \in Op(\mathcal{H}_j) =: \mathcal{A}_j$ на j-тата подсистема, който съответства на оператора на енергията на j-тата подсистема, може да се отъждестви с наблюдаема в комбинираната система по вече въведеното правило:

позиция $j = 1, \dots, N$

$$\mathcal{A}_j \cong \widetilde{\mathcal{A}}_j := 1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_j \otimes \cdots \otimes 1 \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_N .$$

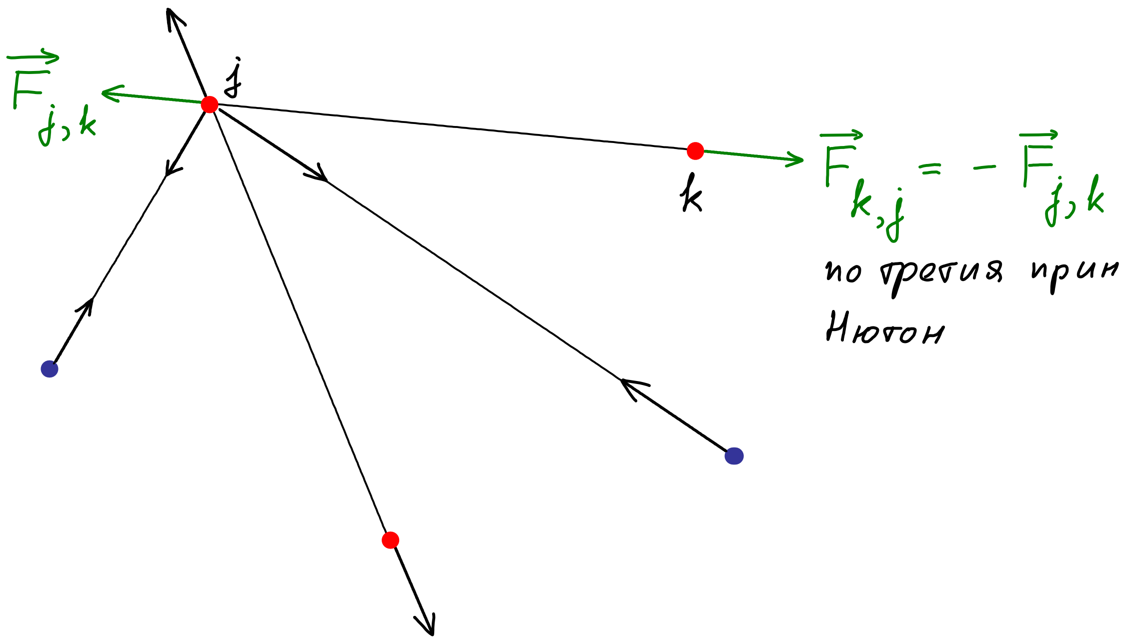
$$\begin{array}{ccc} \cup\!\!\!\!| & & \cup\!\!\!\!| \\ H_j & \longleftrightarrow & \widetilde{H}_j := 1 \otimes \cdots \otimes H_j \otimes \cdots \otimes 1 \end{array}$$

Така пълният Хамилтониан (енергия) на системата придобива вида $H = \widetilde{H}_1 + \cdots \widetilde{H}_N$ и има смисъла на сума от енергиите на отделните подсистеми. Тази адитивност също отразява липсата на взаимодействие между подсистемите.

I.3. Съставни взаимодействия

I.3.a В класическата механика

Нека за мотивация разгледаме физическия пример на система от точкови заряди, които си взаимодействат електростатично



по третия принцип на Нютон

Съгласно принципа за суперпозиция пълната електростатична сила, действаща на j-тия заряд е векторна сума от бинарни сили:

$$\vec{F}_j = \sum_{k \neq j} \vec{F}_{j,k} .$$

Електростатичните сили са потенциални сили, което означава, че съществува функция на положенията $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ на частиците:

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \text{ – наречена потенциална енергия}$$

така, че

$$\vec{F}_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \vec{\nabla}_{r_j} V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

$\left(\vec{\nabla}_{r_j} = \text{градиент по } \vec{r}_j \right)$.

От своя страна, бинарните електростатични сили също са потенциални и следователно:

$$\vec{F}_{j,k}(\vec{r}_j, \vec{r}_k) = \vec{\nabla}_{r_j} V_{j,k}(\vec{r}_j, \vec{r}_k)$$

Ако припишем обща потенциална енергия на взаимодействието между j-тата и k-тата частици

$$V_{j,k}(\vec{r}_j, \vec{r}_k) = V_{k,j}(\vec{r}_j, \vec{r}_k)$$

то от третия принцип на Нютон заключаваме също, че

$$\left(\vec{\nabla}_{r_j} + \vec{\nabla}_{r_k}\right) V_{j,k}(\vec{r}_j, \vec{r}_k) = \vec{F}_{j,k} + \vec{F}_{k,j} = 0$$

т.е.,

$$V_{j,k} = V_{j,k}(\vec{r}_j - \vec{r}_k).$$

В частност, системата е транслационно инвариантна

$$\vec{F}_j(\vec{r}_1 + \vec{r}, \dots, \vec{r}_N + \vec{r}) = \vec{F}_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

и пълната потенциална енергия на системата може да се избере, с точност до адитивна константа, равна на

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{1 \le j < k \le N} V_{j,k}(\vec{r}_j - \vec{r}_k).$$

<u>Забележка.</u> Вярно е и обратното: ако предположим, че системата е транслационно инвариантна и бинарните сили са потенциални, то пълната потенциална енергия може да се избере в горния вид.

В електростатиката направените по-горе предположения са изпълнени и

$$V_{j,k}(\vec{r}_j - \vec{r}_k) = -\frac{k_e q_j q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|}$$

където q_j и q_k са електричните заряди съответно на j-тата и k-тата частици, а k_e е електростатичната константа.

Пълната енергия на система от точкови заряди е:

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2m_j} - \sum_{1 \leq j < k \leq N} \frac{k_e q_j q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|},$$

където $\vec{p}_j = m_j \dot{\vec{r}}_j$ са импулсите на частиците.

I.3.5 В квантовата механика

В квантовата механика горният Хамилтониан се превръща в оператора на Шрьодингер:

$$\hat{H} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m_j}\left(\vec{\nabla}_{r_j}\right)^2 - \sum_{1 \leq j < k \leq N} \frac{k_e q_j q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|},$$

който стои в основата на цялата химия и биология.

От обща гледна точка на теорията на съставни системи горният Хамилтониан има следната структура:

$$H : \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$$

$$H = \sum_{j=1}^{N} \widetilde{H}_j + \sum_{1 \le j < k \le N} \widetilde{V}_{(j,k)}$$

където $\widetilde{H}_j : \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$

и $\widetilde{V}_{(j,k)} : \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$

са (ермитови) оператори от следния вид:

$$\widetilde{H}_j = 1 \otimes \cdots \otimes H_j \otimes \cdots \otimes 1 ,$$

$$\widetilde{V}_{(j,k)} = \tau(j,k)_*^{-1} \circ \Big(V_{j,k} \otimes \underset{\substack{\downarrow \\ \text{в } \mathcal{H}_1}}{1} \otimes \cdots \otimes \underset{\substack{\downarrow \\ \text{в } \mathcal{H}_j}}{\cancel{1}} \otimes \cdots \otimes \underset{\substack{\downarrow \\ \text{в } \mathcal{H}_k}}{\cancel{1}} \otimes \cdots \otimes \underset{\substack{\downarrow \\ \text{в } \mathcal{H}_N}}{1} \Big) \circ \tau(j,k)_* ,$$

където $H_j : \mathcal{H}_j \longrightarrow \mathcal{H}_j$ и $V_{(j,k)} : \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_k$ са (ермитови) оператори, $\tau(j,k)$ е пермутацията:

$$\tau(j,k) : \begin{pmatrix} 1, \ldots, j-1, j, j+1, \ldots, k-1, k, k+1, \ldots, N \\ j, k, 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, N \end{pmatrix}.$$

Операторите $\widetilde{H}_j$ вече срещахме в точка I.2, а що се отнася до $\widetilde{V}_{(j,k)}$, то тяхното действие може се запише още така:

$$\widetilde{V}_{(j,k)}(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_j \otimes \cdots \otimes \phi_k \otimes \cdots \otimes \phi_N)$$

$$V_{(j,k)}(\phi_j \otimes \phi_k) = \sum_{\alpha} \psi'_{\alpha} \otimes \psi''_{\alpha} ,$$

т.е. $\widetilde{V}_{(j,k)}$ действат върху j-тия и k-тия тензорни множители, така както се предписва от $V_{(j,k)} : \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_k$.

Забележки 1.) В примера на оператора на Шрьодингер

$$-\sum_{j=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m_j} \left(\vec{\nabla}_{r_j}\right)^2 - \sum_{1 \leq j < k \leq N} \frac{k_e\, q_j\, q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} ,$$

$\mathcal{H}_j = L^2(\mathbb{R}^3)$, $\forall j = 1, \ldots, N$ и

$$\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N = L^2(\mathbb{R}^3)^{\otimes N} \cong L^2(\mathbb{R}^{3N}),$$

където последното равенство е в сила в смисъл на тензорно произведение на Хилбертови пространства (вид топологично тензорно произведение).

2.) Добки в пълния Хамилтониан от тип $\widetilde{V}_{(j,k)}$ се наричат двy-частични взаимодействия. Възможно е да се разглеждат и M-частични взаимодействия

$$\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_M \leq N} \widetilde{V}_{(j_1,\ldots,j_M)} : \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N ,$$

$$\widetilde{V}_{(j_1,\ldots,j_M)} = \tau_*^{-1} \circ \Big(V_{(j_1,\ldots,j_M)} \otimes \overbrace{\underset{\downarrow\, \text{в } \mathcal{H}_1}{1} \otimes \cdots \otimes \underset{\downarrow\, \text{в } \mathcal{H}_{j_1}}{\cancel{1}} \otimes \cdots \otimes \underset{\downarrow\, \text{в } \mathcal{H}_{j_M}}{\cancel{1}} \otimes \cdots \otimes \underset{\downarrow\, \text{в } \mathcal{H}_N}{1}}^{\text{пропускаме } j_1, \ldots, j_s} \Big) \circ \tau_* ,$$

където: $V_{(j_1,\dots,j_M)} : \mathcal{H}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{j_M} \longrightarrow \mathcal{H}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{j_M}$,

$$\tau : \begin{pmatrix} 1, \dots, j_1 - 1, j_1, j_1 + 1, \dots, j_M - 1, j_M, j_M + 1, \dots, N \\ j_1, \dots, j_M, 1, \dots, j_1 - 1, j_1 + 1, \dots, j_M - 1, j_M + 1, \dots, N \end{pmatrix}.$$

II. Вторично квантуване

II. 1. Постулат за тъждественост на частиците

Нека $\mathcal{H}_1$ е Хилбертово пространство описващо състоянията на една частица. Тогава $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$ е Хилбертовото пространство описващо състоянията на N различими частици. Ако $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(N)) \in \mathcal{S}_N$ е пермутация, то обръщаме внимание, че въведените преди оператори

$$\sigma_* : \mathcal{H}_1^{\otimes N} \longrightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes N} : \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_N \longmapsto \phi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(N)}.$$

са унитарни защото:

$$\begin{aligned} &\langle \sigma_* (\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_N) \mid \sigma_* (\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_N) \rangle \\ &= \langle \phi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(N)} \mid \psi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\sigma(N)} \rangle \\ &= \langle \phi_{\sigma(1)} \mid \psi_{\sigma(1)} \rangle \cdots \langle \phi_{\sigma(N)} \mid \psi_{\sigma(N)} \rangle \\ &= \langle \phi_1 \mid \psi_1 \rangle \cdots \langle \phi_N \mid \psi_N \rangle \\ &= \langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_N \mid \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_N \rangle. \end{aligned}$$

Така, сумарно операторите σ_* имат свойствата

$$(\sigma_1)_* \circ (\sigma_2)_* = (\sigma_1 \circ \sigma_2)_* , \quad (\mathrm{id})_* = 1 ,$$
$$(\sigma_*)^* = (\sigma^{-1})_* = (\sigma_*)^{-1}$$

(защо?). Унитарните оператори σ_* представят квантови трансформации, които съответстват на операция на разместване на частиците съгласно пермутацията σ. Така, едно общо състояние, зададено от вектор $\Theta \in \mathcal{H}_1^{\otimes N}$, ще отговаря на различими частици дотолкова доколкото $\sigma_*(\Theta)$ задават различни състояния при различни $\sigma \in \mathcal{S}_N$. Напротив, състояние отговарящо на неразличими частици се описва от такъв вектор $\Theta \in \mathcal{H}_1^{\otimes N}$, за който $\forall \sigma_* \in \mathcal{S}_N$, $\sigma_*(\Theta)$ и Θ задават едно и също състояние и следователно $\sigma_*(\Theta) = \lambda(\sigma)\,\Theta$ за $\lambda(\sigma) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (виж Лекции 1 и 2).

<u>Твърдение 4.</u> а) Операторите

$$S_N = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \sigma_* : \mathcal{H}_1^{\otimes N} \longrightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes N} ,$$

$$A_N = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sigma_* : \mathcal{H}_1^{\otimes N} \longrightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes N} ,$$

където $\mathrm{sgn}(\sigma) = \pm 1$ означава четността на пермутацията σ, са ортогонални проектори, $S_N^* = S_N$ и $S_N^2 = S_N$, и $A_N^* = A_N$ и $A_N^2 = A_N$, които са взаимно ортогонални, т.е. $A_N S_N = 0 = S_N A_N$.

б) Ако $0 \neq \Theta \in \mathcal{H}_1^{\otimes N}$ е такъв, че $\sigma_*(\Theta) = \lambda(\sigma)\Theta$ за $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_N$, където $\lambda(\sigma) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то

$$\Theta \in S_N(\mathcal{H}_1^{\otimes N}) + A_N(\mathcal{H}_1^{\otimes N}).$$

<u>Доказателство.</u> а) Остава да покажем, че $A_N^* = A_N$, $A_N^2 = A_N$ и $A_N S_N = 0 = S_N A_N$.

$$A_N^* = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} sgn(\sigma)\cdot(\sigma_*)^* = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} sgn(\sigma)\cdot(\sigma^{-1})_*$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} sgn(\sigma^{-1})\cdot\sigma_* = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} sgn(\sigma)\cdot\sigma_* = A_N$$

(използвано е, че $sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma)$),

$$A_N^2 = \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N}\sum_{\eta \in S_N} \underbrace{sgn(\sigma)\, sgn(\eta)}\, \sigma_* \eta_*$$

$$= \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N}\sum_{\eta \in S_N} \overbrace{sgn(\underbrace{\sigma\eta}_{\sigma'})}\,(\sigma\eta)_*$$

$$= \left(\frac{1}{N!}\right)^{\cancel{2}} \cancel{\sum_{\eta \in \mathfrak{S}_N}}\sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_N} sgn(\sigma')\,\sigma'_* = A_N,$$

$$S_N A_N = \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N}\sum_{\eta \in S_N} sgn(\eta)\,\underbrace{\sigma_* \eta_*}_{\sigma'_*}$$

$$= \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_N} \sigma'_* \underbrace{\sum_{\eta \in S_N} sgn(\eta)}_{=0} = 0$$

$$A_N S_N = \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \sum_{\sigma \in S_N} \sum_{\eta \in S_N} \mathrm{sgn}(\sigma) \underbrace{\sigma_* \eta_*}_{\eta'_*}$$

$$= \left(\frac{1}{N!}\right)^2 \sum_{\eta' \in S_N} \eta'_* \sum_{\sigma \in S_N} \mathrm{sgn}(\sigma) = 0 .$$

б) Тази част ще приемем без доказателство.

Тя следва от теоремата на Юнг за разбиване на представянето на симетричната група S_N в $\mathcal{H}_1^{\otimes N}$ на неприводими представяния. Те се класифицират от така наречените диаграми на Юнг и едномерните неприводими представяния лежат точно в

$$S_N(\mathcal{H}_1^{\otimes N}) + A_N(\mathcal{H}_1^{\otimes N}) . \qquad \square$$

<u>Постулат.</u> В една система от N тъждествени частици се реализира точно една от следните две възможности:

а) Чистите състояния се описват вектори лежащи в напълно симетричното подпространство $S_N(\mathcal{H}_1^{\otimes N})$. Такъв тип частици се наричат бозони / bosons и казваме още че те отговарят на статистика на Бозе-Айнщайн / Bose-Einstein.

б) Чистите състояния се описват вектори лежащи в напълно антисиметричното подпространство $A_N(\mathcal{H}_1^{\otimes N})$. Такъв тип частици се наричат фермиони / fermions и казваме още че те отговарят на статистика на Ферми-Дирак / Fermi-Dirac.

Коментари. а) В теорията на елементарните частици се приема, че фундаменталните елементарни частици, които съответстват в прекия смисъл на материя са фермиони: такива са например електроните, кварките. Причината за това е едно следствие от антисиметризацията: две фермионни (идентични) частици не могат да се намират в едно и също едночастично състояние, понеже:

$$A_N(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_N) = 0 \text{ ако } \phi_j = \phi_k \text{ за някои } j \text{ и } k.$$

Това се нарича принцип на Паули (за забраната) / Pauli exclusion principle. Това е основната причина за нетривиалния строеж на електронната обвивка на атомите, където електроните последователно заемат различни състояния (с нарастваща енергия). От тук именно следват и разнообразните химични свойства на атомите.

б) Фундаменталните елементарни частици, които са бозони се считат за преносители на взаимодействията. Такива са фотоните.

в) Устойчиво свързано състояние на няколко фундаментални елементарни частици при определени условия може приближено да се описва като една елементарна частица. Такива частици наричаме съставни и "нефундаментални". Например, такива са атомните ядра и дори самите атоми. В случай, че съставната частица е изградена от четен брой фермиони, то може да се покаже, че тя ще се описва по статистика на Бозе-Айнщайн. Такива "композитни бозони" са например ядрата на ^{4}He (хелий), които се наричат още α-частици.

II.2. Пространство на Фок и представяне с оператори на раждане и унищожаване

II.2.a Бозони

Нека $\mathcal{H}_1$ е едночастично Хилбертово пространство

$\mathcal{H}_N := S_N\left(\mathcal{H}_1^{\otimes N}\right)$ е Хилбертовото пространство на състоянията на N идентични бозона.

$\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}\cdot\Omega$ – вакуумно пространство

$$\mathcal{H} := \Gamma(\mathcal{H}_1) := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_N \oplus \cdots$$

Така, Хилбертовото пространството $\mathcal{H} \equiv \Gamma(\mathcal{H}_1)$ отговаря за система състояща се от неопределен / произволен брой бозони и се нарича бозонно пространство на Фок / bosonic Fock space.

Нека $h : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ и $V : \mathcal{H}_1^{\otimes M} \longrightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes M}$ са произволни (ермитови) оператори, така че

$$\eta_* \circ V = V \circ \eta_* , \quad \forall \eta \in \mathcal{S}_M .$$

Нека за $1 \leqslant j \leqslant N$ и $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_M \leqslant N$ $(M \leqslant N)$ положим

$$H_{(N)} := \sum_{j=1}^{N} \widetilde{h}_j \quad \text{и} \quad V_{(N)} := \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_M \leqslant N} \widetilde{V}_{(j_1, \ldots, j_M)} ,$$

където $\widetilde{h}_j : \mathcal{H}_1^{\otimes N} \longrightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes N}$ и $\widetilde{V}_{(j_1,\ldots,j_M)} : \mathcal{H}_1^{\otimes N} \longrightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes N}$

са построени както в точка I.3.б. за $h_j \equiv h$ и $V_{j_1,\ldots,j_M} = V$.

Тогава, $\sigma_* \circ H_{(N)} = H_{(N)} \circ \sigma_*$ и $\sigma_* \circ V_{(N)} = V_{(N)} \circ \sigma_*$

за $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_N$, тъй като $\sigma_* \circ \tilde{h}_j = \tilde{h}_{\sigma(j)} \circ \sigma_*$,

$$\sigma_* \circ \tilde{V}_{(j_1,\dots,j_M)} = \tilde{V}_{(\sigma(j_1),\dots,\sigma(j_M))} \circ \sigma_*,$$

където за $\forall$ M-торка различни $j_1,\dots,j_M$ полагаме:

$\tilde{V}_{(j_1,\dots,j_M)} := \tilde{V}_{(j_{\eta(1)},\dots,j_{\eta(M)})}$ за такова $\eta \in \mathfrak{S}_M$,

за което $j_{\eta(1)} < \dots < j_{\eta(M)}$ (подреждаме j-тата в нарастващ ред).

Проверете горните равенства!

Тъй като $\sigma_* \circ H_{(N)} = H_{(N)} \circ \sigma_*$ и $\sigma_* \circ V_{(N)} = V_{(N)} \circ \sigma_*$

за $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_N$, то $\mathcal{H}_N = S_N(\mathcal{H}_1^{\otimes N})$ е инвариантно подпространство

за $H_{(N)}$ и $V_{(N)}$. Пряката сума на ограниченията:

$$H_{(N)}\restriction_{\mathcal{H}_N} : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{H}_N \quad \text{и} \quad V_{(N)}\restriction_{\mathcal{H}_N} : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{H}_N$$

означаваме съответно с:

$$\mathfrak{g}(h) := \bigoplus_{N=0}^{\infty} H_{(N)}\restriction_{\mathcal{H}_N} : \Gamma(\mathcal{H}_1) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{H}_1),$$

$$\mathfrak{g}(V) := \bigoplus_{N=0}^{\infty} V_{(N)}\restriction_{\mathcal{H}_N} : \Gamma(\mathcal{H}_1) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{H}_1),$$

където сме положили $H_{(0)} = 0$ и $V_{(N)} = 0$ за $N < M$.

<u>Забележка.</u> По такъв начин като Хамилтониани, $\mathscr{H}(h)$ и $\mathscr{H}(V)$ обединяват динамики за различен брой бозонни частици, при които броя на частиците се запазва. Затова и Хамилтонианите, както и породените от тях еволюционни оператори са преки суми

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \Gamma(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{H} & = & \mathcal{H}_0 & \oplus & \mathcal{H}_1 & \oplus & \cdots & \oplus & \mathcal{H}_N & \oplus & \cdots \\ \downarrow & = & \downarrow & \oplus & \downarrow & \oplus & \cdots & \oplus & \downarrow & \oplus & \cdots \\ \Gamma(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{H} & = & \mathcal{H}_0 & \oplus & \mathcal{H}_1 & \oplus & \cdots & \oplus & \mathcal{H}_N & \oplus & \cdots \end{array}$$

<u>Теорема 1.</u> Нека $\{e_j\}_{j=1}^{s}$ е ортонормиран базис на $\mathcal{H}_1$, където $s = \dim \mathcal{H}_1$ (може и $s = \infty$) и нека

$$h(e_j) = \sum_{k=1}^{s} h_{k,j}\, e_k ,$$

$$V(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_M}) = \sum_{k_1,\dots,k_M = 1}^{s} V_{k_1,\dots,k_M;\, j_1,\dots,j_M}\, e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_M}$$

са матричните разлагания на въведените по-горе h и V.

Нека въведем и операторите на раждане и унищожаване, $\{a_j^*\}_{j=1}^{s}$ и $\{a_j\}_{j=1}^{s}$ асоциирани с ортонормирания базис $\{e_j\}_{j=1}^{s}$, както в Теорема 3 от Лекция 5. Тогава са в сила представянията:

$$\mathscr{H}(h) = \sum_{j,k=1}^{s} h_{j,k}\, a_j^* a_k ,$$

$$\mathscr{H}(V) = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_M,\\ k_1,\dots,k_M = 1}}^{s} V_{j_1,\dots,j_M;\, k_1,\dots,k_M}\, a_{j_1}^* \cdots a_{j_M}^* a_{k_1} \cdots a_{k_M} .$$

Обърнете внимание, че до сега индексите j, k и т.н. приемаха стойности от 1 до N докато в теоремата и по-нататък – от 1 до $s = \dim \mathcal{H}_1$.

<u>Доказателство.</u> От Теорема 3 на Лекция 5:

$$a^*_{j_1} \cdots a^*_{j_N} \Omega = \sqrt{N!}\, S_N (e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_N})$$

и тогава: $\displaystyle\sum_{j,k} h_{j,k}\, a^*_j a_k \big(S_N(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_N})\big)$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{j,k} h_{j,k}\, a^*_j a_k \left(a^*_{j_1} \cdots a^*_{j_N} \Omega\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{j,k} h_{j,k}\, a^*_j \left[a_k, a^*_{j_1} \cdots a^*_{j_N}\right] \Omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{r=1}^{N} \sum_{j,\cancel{k}} \underset{\substack{\parallel \\ j_r}}{h_{j,k}}\, a^*_{j_1} \cdots a^*_{j_{r-1}} a^*_j \underbrace{[a_k, a^*_{j_r}]}_{\delta_{k,j_r}} a^*_{j_{r+1}} \cdots a^*_{j_N} \Omega$$

$$= \sum_{r=1}^{N} S_N \Big(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_{r-1}} \otimes \Big(\sum_j h_{j,j_r} e_j\Big) \otimes e_{j_{r+1}} \otimes \cdots \otimes e_{j_N}\Big)$$

$$= S_N\big(H_{(N)}(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_N})\big) = \mathscr{S}(h)\big(S_N(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_N})\big),$$

където при прехода между втория и третия ред сме използвали че $a_k \Omega = 0$, а между третия и четвъртия – правилото на Лайбниц. Аналогично процедираме с $\mathscr{S}(V)$, което само ще скицираме:

$$\sum_{\substack{j'_1, \ldots, j'_M, \\ k_1, \ldots, k_M = 1}}^{S} V_{j'_1, \ldots, j'_M; k_1, \ldots, k_M}\, a^*_{j'_1} \cdots a^*_{j'_M} a_{k_1} \cdots a_{k_M} \big(S_N(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_N})\big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\substack{j'_1, \ldots, j'_M, \\ k_1, \ldots, k_M = 1}}^{S} V_{j'_1, \ldots, j'_M; k_1, \ldots, k_M}\, a^*_{j'_1} \cdots a^*_{j'_M} a_{k_1} \cdots a_{k_M} a^*_{j_1} \cdots a^*_{j_N} \Omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\substack{j'_1,\dots,j'_M,\\ k_1,\dots,k_M=1}}^{S} V_{j'_1,\dots,j'_M;k_1,\dots,k_M} a^*_{j'_1}\cdots a^*_{j'_M} [a_{k_1}\cdots a_{k_M}, a^*_{j_1}\cdots a^*_{j_N}]\Omega$$

Оттук, прилагаме равенството, което се извежда с индукция по M.

$$[a_{k_1}\cdots a_{k_M}, a^*_{j_1}\cdots a^*_{j_N}]\Omega =$$

$$= \sum_{1\le r_1<\dots<r_M\le N} \frac{1}{M!} \sum_{\eta\in S_M} \delta_{k_{\eta(1)},j_{r_1}} \cdots \delta_{k_{\eta(M)},j_{r_M}}$$

$$\times\ a^*_{j_1}\cdots \cancel{a^*_{j_{r_1}}}\cdots \cancel{a^*_{j_{r_M}}}\cdots a^*_{j_N}\Omega .$$

Замествайки в преработваното равенство съкращаваме $\sum_{\eta\in S_M}$ с $\frac{1}{M!}$ поради симетрията на $a^*_{j'_1}\cdots a^*_{j'_M}$, както и на V:

$$V_{j_{\eta(1)},\dots,j_{\eta(M)};k_{\eta(1)},\dots,k_{\eta(M)}} = V_{j_1,\dots,j_M;k_1,\dots,k_M} .$$

Окончателно:

$$\sum_{\substack{j'_1,\dots,j'_M,\\ k_1,\dots,k_M=1}}^{S} V_{j'_1,\dots,j'_M;k_1,\dots,k_M}\, a^*_{j'_1}\cdots a^*_{j'_M} a_{k_1}\cdots a_{k_M}\big(S_N(e_{j_1}\otimes\dots\otimes e_{j_N})\big)$$

$$= S_N\Big[\sum_{1\le r_1<\dots<r_M\le N}\ \sum_{j'_1,\dots,j'_M=1}^{S} V_{j'_1,\dots,j'_M;j_{r_1},\dots,j_{r_M}}$$

позиции: r_1 r_M

$$e_{j_1}\otimes\dots\otimes \underset{}{e_{j'_1}}\otimes\dots\otimes e_{j'_M}\otimes\dots\otimes e_{j_N}\Big]$$

$$= S_N\big(V_{(N)}(e_{j_1}\otimes\dots\otimes e_{j_N})\big) = \mathcal{J}(V)\big(S_N(e_{j_1}\otimes\dots\otimes e_{j_N})\big).$$

$\square$

Конструкцията в Теорема 1 може да се обобщи за оператори

$$V : \mathcal{H}_{M_1} \longrightarrow \mathcal{H}_{M_2} .$$

Ако V има матрични елементи:

$$V\left(S_{M_1}\left(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_{M_1}}\right)\right)$$

$$= \sqrt{\frac{M_2!}{M_1!}} \sum_{k_1,\dots,k_{M_2}=1}^{s} V_{k_1,\dots,k_{M_2};j_1,\dots,j_{M_1}} S_{M_2}\left(e_{k_1}\otimes\cdots\otimes e_{k_{M_2}}\right),$$

където за $\forall \sigma \in \mathcal{S}_{M_2}$ и $\eta \in \mathcal{S}_{M_1}$:

$$V_{k_{\sigma(1)},\dots,k_{\sigma(M_2)};j_{\eta(1)},\dots,j_{\eta(M_1)}} = V_{k_1,\dots,k_{M_2};j_1,\dots,j_{M_1}}, \text{ то}$$

$$\gamma(V) = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_{M_1}\\ k_1,\dots,k_{M_2}=1}}^{s} V_{k_1,\dots,k_{M_2};j_1,\dots,j_{M_1}} a^*_{k_1}\cdots a^*_{k_{M_2}} a_{j_1}\cdots a_{j_{M_1}}$$

и $\gamma(V) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ има свойствата:

$$\gamma(V)\left(\mathcal{H}_{M_1}\right) \subseteq \mathcal{H}_{M_2}, \quad \gamma(V)\restriction_{\mathcal{H}_{M_1}} = V,$$

и с точност до общ множител $\gamma(V)\left(S_N\left(\phi_1\otimes\cdots\otimes\phi_N\right)\right)$ действа последователно за $1 \leq r_1 < \cdots < r_{M_1} \leq N$ върху $\phi_{r_1},\dots,\phi_{r_{M_1}}$, преобразувайки ги в $V\left(S_{M_1}\left(\phi_{r_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{r_{M_1}}\right)\right)$ с последваща обща симетризация

$$S_N\left(V\left(S_{M_1}\left(\phi_{r_1}\otimes\cdots\otimes\phi_{r_{M_1}}\right)\right)\otimes\phi_1\otimes\cdots\otimes\cancel{\phi_{r_1}}\otimes\cdots\otimes\cancel{\phi_{r_M}}\otimes\cdots\otimes\phi_N\right).$$

В частност, при $M_1 \neq M_2$ $\gamma(V)$ не запазва броя на частиците:

$$\gamma(V)\left(\mathcal{H}_N\right) \subseteq \mathcal{H}_{N+M_2-M_1} .$$

<u>Забележка.</u> От формулата $a^*_{j_1} \cdots a^*_{j_N} \Omega = \sqrt{N!}\, S_N(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_N})$ следва, че ортогонален (но не нормиран) базис на $\mathcal{H}_N$ е:

$$\{ S_N(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_N}) \mid 1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_N \leqslant s \}.$$

Един пример: ако $h = 1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$, то

$$\mathcal{E}(1) = \hat{N} = \sum_{j=1}^{s} a_j^* a_j$$

– оператора на броя на частиците.

II.2.5 Фермиони

Ще приведем аналозите на формулите за бозони в случая на фермиони без подробни изводи (те следват абсолютно същата схема както при бозони).

Нека $\mathcal{H}_1$ отново е едночастично Хилбертово пространство

$\mathcal{H}_N^F := A_N\left(\mathcal{H}_1^{\otimes N}\right)$ е Хилбертовото пространство на състоянията на N идентични фермиона.

$\mathcal{H}_0^F := \mathbb{C} \cdot \Omega$ – вакуумно пространство

$$\mathcal{H}^F := \Gamma^F(\mathcal{H}_1) := \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N^F .$$

Хилбертовото пространство $\mathcal{H}^F$ отговаря за система състояща се от неопределен / произволен брой фермиони и се нарича фермионно пространство на Фок / fermionic Fock space.

Обръщаме специално внимание на факта, че

$$s = \dim \mathcal{H}_1 < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}_N^F = 0 \quad \text{при} \quad N > s$$

и тогава $\dim \mathcal{H}^F < \infty$. Всъщност, ако $\{e_j\}_{j=1}^s$ е ортонормиран базис в $\mathcal{H}_1$, то

сравнете с бозонния случай !

$$\left\{ A_N(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_N}) \;\middle|\; 1 \leq j_1 < \cdots < j_N \leq s \right\}$$

е ортогонален (но не нормиран) базис на $\mathcal{H}_N^F$. Така, получаваме базис на $\mathcal{H}^F$ индексиран с подмножествата $\{j_1, \ldots, j_N\}$ на множеството $\{1, \ldots, s\}$ (на празното множество съответства Ω).

$$\Longrightarrow \quad \dim \mathcal{H}^F = 2^{\dim \mathcal{H}_1} .$$

$$c_j^*\left(A_N(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_N})\right) := \sqrt{N+1}\; A_{N+1}(e_j\otimes e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_N})$$

$$c_j := (c_j^*)^*. \qquad \Longrightarrow \qquad c_j\left(A_N(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_N})\right)$$

$$= \sqrt{N}\sum_{r=1}^{N} \delta_{j,j_r}\,(-1)^{r+1}\, A_{N-1}(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_{r-1}}\otimes \cancel{e_{j_r}}\otimes e_{j_{r+1}}\otimes\cdots\otimes e_{j_N}).$$

$$\Longrightarrow \quad [c_j, c_k]_+ = 0 = [c_j^*, c_k^*]_+$$

$$[c_j, c_k^*]_+ = \delta_{j,k} \quad (j,k=1,\dots,s).$$

Последните релации се наричат канонични антикомутационни съотношения / canonical anticommutation relations (CAR). (Да припомним: $[A,B]_+ := AB+BA$ се нарича антикомутатор.)

Нека $h, V, H_{(N)}$ и $V_{(N)}$ са както на стр. 25 с единствената разлика:

$$\eta_* \circ V = \operatorname{sgn}(\eta)\cdot V\circ \eta_*, \quad \forall \eta\in \mathcal{S}_M,$$

т.е., V е антисиметричен. Тогава $H_{(N)}(\mathcal{H}_N^F)\subseteq \mathcal{H}_N^F$ и $V_{(N)}(\mathcal{H}_N^F)\subseteq\mathcal{H}_N^F$ и за

$$\mathcal{H}^F(h) := \bigoplus_{N=0}^{\infty} H_{(N)}\restriction_{\mathcal{H}_N^F} : \mathcal{H}^F \longrightarrow \mathcal{H}^F,$$

$$\mathcal{H}^F(V) := \bigoplus_{N=0}^{\infty} V_{(N)}\restriction_{\mathcal{H}_N^F} : \mathcal{H}^F \longrightarrow \mathcal{H}^F, \qquad \text{имаме:}$$

$$\mathcal{H}^F(h) = \sum_{j,k=1}^{s} h_{j,k}\, c_j^* c_k,$$

$$\mathcal{H}^F(V) = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_M,\\ k_1,\dots,k_M=1}}^{s} V_{j_1,\dots,j_M;k_1,\dots,k_M}\, c_{j_1}^*\cdots c_{j_M}^*\, c_{k_1}\cdots c_{k_M}.$$

II.3 Съответствие на вторичното квантуване

Нека за един унитарен оператор $u : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ разгледаме

$$u^{\otimes N} : \mathcal{H}_1^{\otimes N} \longrightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes N}.$$

(т.е., $u^{\otimes N}(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_N) = u(\phi_1) \otimes \cdots \otimes u(\phi_N)$). Тъй като

$$S_N \circ u^{\otimes N} = u^{\otimes N} \circ S_N \quad \text{и} \quad A_N \circ u^{\otimes N} = u^{\otimes N} \circ A_N$$

(защо?), то $u^{\otimes N}(\mathcal{H}_N) \subseteq \mathcal{H}_N$ и $u^{\otimes N}(\mathcal{H}_N^F) \subseteq \mathcal{H}_N^F$.

Полагаме:

$$\Gamma(u) := \bigoplus_{N=0}^{\infty} u^{\otimes N} \restriction_{\mathcal{H}_N} : \Gamma(\mathcal{H}_1) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{H}_1),$$

$$\Gamma^F(u) := \bigoplus_{N=0}^{\infty} u^{\otimes N} \restriction_{\mathcal{H}_N^F} : \Gamma^F(\mathcal{H}_1) \longrightarrow \Gamma^F(\mathcal{H}_1).$$

Получаваме "функториално" съответствие в следния смисъл:

Хилбертово пространство		Хилбертово пространство
$\mathcal{H}_1$	$\longmapsto$	$\Gamma(\mathcal{H}_1)$

Унитарни трансформации и композиции		Унитарни трансформации и композиции

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_1' \arrow[d, "u'"] \arrow[dd, bend right=60, "u"'] \\ \mathcal{H}_1'' \arrow[d, "u''"] \\ \mathcal{H}_1''' \end{tikzcd} \quad \longmapsto \quad \begin{tikzcd} \Gamma(\mathcal{H}_1') \arrow[d, "\Gamma(u')"] \arrow[dd, bend right=60, "\Gamma(u)"'] \\ \Gamma(\mathcal{H}_1'') \arrow[d, "\Gamma(u'')"] \\ \Gamma(\mathcal{H}_1''') \end{tikzcd},$$

където свойството $\Gamma(u') \circ \Gamma(u'') = \Gamma(u' \circ u'')$ следва от

$$(u')^{\otimes N} \circ (u'')^{\otimes N} = (u' \circ u'')^{\otimes N} \quad (\forall N).$$

Също така:
$$\Gamma(e^{ith}) = e^{it\,\gamma(h)},$$

което следва от вида на Хамилтониана, който изведохме в точка I.2 за еволюционна система $u(t)^{\otimes N}$.

Съответствие Γ^F с напълно аналогични на горните свойства получаваме и във фермионния случай.

Произхода на термина "вторично квантуване" идва от прехода от "първично" Хилбертово пространство $\mathcal{H}_1$ описващо една квантова частица към "вторичното" $\Gamma(\mathcal{H}_1)$ описващо система от неограничен брой идентични копия на частицата.

III. Нормални произведения и диаграми

Нека имаме система от бозонни оператори на раждане и унищожаване
$$[a_j, a_k] = 0 = [a_j^*, a_k^*] \quad , \quad [a_j, a_k^*] = \delta_{j,k} \cdot 1$$
$j, k = 1, \dots, s$. Да си припомним, че горните комутационни съотношения имат реализация, като диференциални оператори (Лекция 5):
$$a_j \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial z_j} \quad , \quad a_j^* \longleftrightarrow z_j \qquad (j, k = 1, \dots, s).$$
Едно произведение $b_1 \cdots b_n$ от оператори на раждане и унищожаване казваме, че е в **нормална форма** или също така е, че е **нормално произведение**, ако е от вида $a_{j_1}^* \cdots a_{j_\ell}^* a_{k_1} \cdots a_{k_m}$ $(\ell + m = n)$, т.е., ако операторите на унищожаване следват операторите на раждане. При горното представяне с диференциални оператори нормалните произведения изглеждат така:
$$a_{j_1}^* \cdots a_{j_\ell}^* a_{k_1} \cdots a_{k_m} \longleftrightarrow z_{j_1} \cdots z_{j_\ell} \frac{\partial}{\partial z_{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial z_{k_m}},$$
а пример за не-нормално произведение е $a_j a_k^* \longleftrightarrow \dfrac{\partial}{\partial z_{k_m}} \circ z_j$.

Поради комутационните съотношения $[a_j, a_k] = 0 = [a_j^*, a_k^*]$ взаимният ред между операторите на раждане и взаимният ред между операторите на унищожаване в едно нормално произведение $a_{j_1}^* \cdots a_{j_\ell}^* a_{k_1} \cdots a_{k_m}$ е несъществен. От друга страна, поради комутационните съотношения $[a_j, a_k^*] = \delta_{j,k}$ всяко произведение $b_1 \cdots b_n$ от оператори на раждане и унищожаване може да се приведе в линейна кобинация от нормални произведения.

Например, $\quad a_j^* a_j a_k^* = a_j \delta_{j,k} + a_j^* a_k^* a_j$.

Ще направим предварително коментар защо нормалните произведения играят важна роля в пространството на Фок.

- В точка II.2 видяхме, че вторично квантуваните оператори $\mathscr{S}(h)$ и $\mathscr{S}(V)$ са именно в нормална форма.

- Нормалната форма може да се разглежда като "стандартизиран" вид на операторите действащи във Фоковото пространство.

- Нормалната форма е удобна за смятане на матрични елементи и амплитуди на разсейване, както ще обясним в точка III.4.

III.1 Нормалните произведения като полилинейни операции и Викови сдвоявания. Теорема на Вик

Нека разгледаме малко по-обща ситуация в която имаме система от оператори $\{c_j', c_j''\}_{j\in\mathcal{J}}$, такива че

$$[c_j', c_k'] = 0 = [c_j'', c_k''] \quad \text{и} \quad [c_j', c_k''] = w_{j,k}\cdot 1$$

за $\forall j, k \in \mathcal{J}$. Ако $b_\ell \in \{c_j', c_j''\}_{j\in\mathcal{J}}$, за $\ell = 1,\dots,m$, то определяме

$$N(1) = 1, \quad N(b_\ell) = b_\ell,$$

$$N(b_1\cdots b_m) := b_{\sigma(1)}\cdots b_{\sigma(m)}$$

за такава пермутация $\sigma\in\mathcal{S}_m$, за която в редицата $b_{\sigma(1)},\dots,b_{\sigma(m)}$ са изредени първо операторите $\in\{c_j'\}_{j\in\mathcal{J}}$ и после следват операторите $\in\{c_j''\}_{j\in\mathcal{J}}$. Пермутацията σ не е еднозначно определена, тъй като не фиксира реда между $\{c_j'\}_{j\in\mathcal{J}}$ и реда между $\{c_j''\}_{j\in\mathcal{J}}$, но независимо от това произведението $N(b_1\cdots b_m) := b_{\sigma(1)}\cdots b_{\sigma(m)}$ е еднозначно определено и не зависи от произвола в избора на σ, тъй като $[c_j', c_k'] = 0 = [c_j'', c_k'']$.

<u>Забележка.</u> Нека означим с $\mathcal{W}$ векторното пространство породено от операторите $\{c_j', c_j''\}_{j\in\mathcal{J}}$, т.е.,

$$\mathcal{W} = \mathrm{Span}\{c_j', c_j''\}_{j\in\mathcal{J}}$$

($\mathrm{Span}\, S$ означава множеството от крайни линейни комбинации на елементи от множеството S). Тогава операциите N определят редица от полилинейни операции $N_m : \mathcal{W}\times\cdots\times\mathcal{W} \longrightarrow Op(\mathcal{H})$,

$$N_m\Big(\sum_{\alpha_1}\lambda_{1,\alpha_1}b_{1,\alpha_1},\dots,\sum_{\alpha_m}\lambda_{m,\alpha_m}b_{m,\alpha_m}\Big)$$
$$=\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}\lambda_{1,\alpha_1}\cdots\lambda_{m,\alpha_m}N(b_{1,\alpha_1}\cdots b_{m,\alpha_m}),$$

където $\lambda_{1,\alpha_1},\dots,\lambda_{m,\alpha_m}$ са числа, а $b_{1,\alpha_1},\dots,b_{m,\alpha_m}\in\{c'_j,c''_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ както по-горе. При това обръщане внимание, че определението на N_m като полилинейна функция е коректно дори когато операторите $\{c'_j,c''_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ са линейно зависими (без доказателство, но ще споменем че това може да се получи в следствие на рекурсивни формули, които свеждат N_m до $N_{m-1},\dots,N_2$ и обикновени произведения).

<u>Следствие.</u> $N(b_1\cdots b_m)=N(b_{\sigma(1)}\cdots b_{\sigma(m)})\ \forall\sigma\in S_m$.

Определяме сега един билинеен функционал, който се нарича Виково сдвояване и се означава с

$$\overbrace{b_1\,b_2}\quad\text{за}\quad b_1,b_2\in\{c'_j,c''_j\}_{j\in\mathcal{J}}.$$

Полагаме:
$$\overbrace{c'_j\,c'_k}=0=\overbrace{c''_j\,c''_k}=\overbrace{c'_j\,c''_k},\qquad \overbrace{c''_j\,c'_k}=-w_{j,k}$$
за $\forall j,k\in\mathcal{J}$. Така получаваме билинеен функционал
$$\mathcal{W}\times\mathcal{W}\longrightarrow\mathbb{C}.$$

В случая когато $\exists$ векор $\Omega\in\mathcal{H}$ такъв, че $c''_j\Omega=0\ \forall j\in\mathcal{J}$ то получаваме явно билинейна формула:

$$\overbrace{b_1\,b_2}=\langle\Omega\,|\,b_1b_2\Omega\rangle.$$

И накрая ще определим композиции от двете въведени операции

$$N(\cdots b'_{j_1}\cdots b'_{k_1}\cdots b'_{j_2}\cdots)\cdots N(\cdots b''_{l_1}\cdots b''_{k_2}\cdots)\cdots N(\cdots b'''_{m_1}\cdots b'''_{m_2}\cdots b'''_{l_2}\cdots)$$

$$:= b'_{j_1} b'_{j_2}\, b'_{k_1} b''_{k_2}\, b''_{l_1} b'''_{l_2}\, b'''_{m_1} b'''_{m_2} \cdots$$

$$\times N(\cdots \cancel{b'_{j_1}}\cdots \cancel{b'_{k_1}}\cdots \cancel{b'_{j_2}}\cdots)\cdots N(\cdots \cancel{b''_{l_1}}\cdots \cancel{b''_{k_2}}\cdots)\cdots N(\cdots \cancel{b'''_{m_1}}\cdots \cancel{b'''_{m}}\cdots \cancel{b'''_{l_2}}\cdots)$$

т.е., сдвоените елементи се изтриват от аргументите на нормалните произведения, а Виковите сдвоявания умножават останалия израз от нормални произведения.

<u>Теорема на Вик.</u> В сила е следното равенство, с което се привежда произведение от нормални произведения в нормална форма

$$N(b'_1\cdots)\cdots N(b''_1\cdots)\cdots N(b'''_1\cdots)$$

$$= \sum N\Big((\cdots b'_{j_1}\cdots b'_{k_1}\cdots b'_{l_1}\cdots)\cdots(\cdots b''_{m_1}\cdots b''_{k_2}\cdots)\cdots(\cdots b'''_{m_2}\cdots b'''_{l_2}\cdots b'''_{j_2}\cdots)\Big),$$

където сумата в дясната страна на равенството е по всички възможни сдвоявания между елементи участващи в различни нормални произведения в лявата страна на равенството. В частност, сумата започва с празното сдвояване, т.е., нормалното произведение

$$N\big((b'_1\cdots)\cdots(b''_1\cdots)\cdots(b'''_1\cdots)\big)$$

без сдвоявания и завършва с членове съдържащи максимален брой сдвоявания.

<u>Примери.</u> 1.) $b'b''b''' \equiv N(b')N(b'')N(b''')$

$$= N(b'b''b''') + N(b'b''b''') + N(b'b''b''') + N(b'b''b''')$$

$$= N(b'b''b''') + \langle\Omega|b'b''\Omega\rangle b''' + \langle\Omega|b'b'''\Omega\rangle b'' + \langle\Omega|b''b'''\Omega\rangle b'.$$

2.) $N(b'_1b'_2b'_3)N(b''_1b''_2)N(b'''_1b'''_2b'''_3) = N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3)$

$$+ N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) + N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) + N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3)$$

$$+ N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) + N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) + N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3)$$

$$+ N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) + N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) + N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3)$$

$$+ N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) + N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) + N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3)$$

$$+ N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) + N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) + N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3)$$

$$+ N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) + N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) + N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3)$$

$$+ N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) + N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) + N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3)$$

$+ N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) +$ още $240 - 1$ двойни сдвоявания

$+ N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) +$ още $1116 - 1$ тройни сдвоявания

$+ N(b'_1b'_2b'_3b''_1b''_2b'''_1b'''_2b'''_3) +$ още $528 - 1$ четворни сдвоявания,

където броят $\nu_\ell(n_1,\dots,n_m)$ на ℓ-кратни сдвоявания между групи от $n_1,\dots,n_m$ елементи се изчислява рекурсивно по формулите:

$$\nu_\ell(n_1,\dots,n_m) = \sum_{1\le j<k\le m} n_j n_k\, \nu_{\ell-1}(n_1,\dots,n_j-1,\dots,n_k-1,n_m),$$

$$\nu_\ell(n_1,\dots,n_j,\dots,n_m) = \nu_\ell(n_1,\dots,n_{j-1},n_{j+1},\dots,n_m) \text{ ако } n_j = 0,$$

$$\nu_0(n_1,\dots,n_m) = 1, \quad \nu_\ell(n) = 0 \text{ ако } \ell > 0.$$

$$\Big(\Rightarrow \nu_1(n_1,\dots,n_m) = \sum_{1\le j<k\le m} n_j n_k,$$

$$\nu_\ell(n_1,\dots,n_m) = \nu_\ell(n_{\sigma(1)},\dots,n_{\sigma(m)}) \quad \forall \sigma\in\mathcal{S}_m.\Big)$$

Рекурсивната формула за $v_\ell(n_1,\dots,n_m)$ изразява отделянето на 1 сдвояване между групите "j" и "k", което може да се извърши по $n_j\cdot n_k$ начина след което остават сдвояванията $v_{\ell-1}(n_1,\dots,n_j-1,\dots,n_k-1,\dots,n_m)$.

$$v_1(3,2,3) = 3\cdot 2 + 3\cdot 2 + 3\cdot 3 = 21,$$
$$v_1(2,1,3) = 2\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 3 = 11,$$
$$v_1(2,2,2) = 3\cdot 2\cdot 2 = 12,$$
$$v_2(3,2,3) = 6\,v_1(2,1,3) + 9\,v_1(2,2,2) + 6\,v_1(3,1,2)$$
$$= 2.6.11 + 9.12 = 12\cdot 20 = 240,$$
$$v_2(2,1,3) = 2\,v_1(1,0,3) + 6\,v_1(1,1,2) + 3\,v_1(2,0,2)$$
$$= 2(3+0+0) + 6(1+2+2) + 3(0+4+0) = 48,$$
$$v_2(2,2,2) = 3.4\,v_1(1,1,2) = 3\cdot 4\cdot 5 = 60,$$
$$v_2(1,0,3) = v_2(1,3) = 3\,v_1(0,2) = 3\,v_1(2) = 0,$$
$$v_2(2,0,2) = 4\,v_1(1,1) = 4,$$
$$v_2(1,1,2) = 2,$$
$$v_3(3,2,3) = 6\,v_2(2,1,3) + 9\,v_2(2,2,2) + 6\,v_2(3,1,2)$$
$$= 2.6.48 + 9.60 = 4\cdot 9\cdot(16+15) = 1116,$$
$$v_3(2,1,3) = 2\,v_2(1,0,3) + 6\,v_2(1,1,2) + 3\,v_2(2,0,2)$$
$$= 2\cdot 0 + 6\cdot 2 + 3\cdot 4 = 26,$$
$$v_3(2,2,2) = 3.4.\,v_2(1,1,2) = 3\cdot 4\cdot 2 = 24,$$
$$v_4(3,2,3) = 6\,v_3(2,1,3) + 9\,v_3(2,2,2) + 6\,v_3(3,1,2)$$
$$= 2.6.26 + 9.24 = 2\cdot 6\cdot(26+18) = 2\cdot 6\cdot 44 = 528.$$

<u>Забележка.</u> Означението v_ℓ за брой на Викови сдвоявния не се използва по-нататък в лекцията.

Доказателство на теоремата на Вик.

Нека запишем едно произведение от нормални произведения във вида

$$N(b_{1,1}\cdots b_{1,m_1})\,N(b_{2,1}\cdots b_{2,m_2})\cdots N(b_{k,1}\cdots b_{k,m_k})$$

Ще следваме индукция по общия брой $m_1+\cdots+m_k$. Когато този брой е $=1$ твърдението е тривиално изпълнено (без сдвоявания). Освен това, ако $k=1$, то теоремата е отново тривиално изпълнена. Нека $m_1+\cdots+m_k>1$ и $k>1$. Налице са следните два случая:

а) всички $b_{1,1},\dots,b_{1,m_1}\in\{c_j'\}_{j\in J}$. $\Rightarrow$ $N(b_{1,1}\cdots b_{1,m_1}) = b_{1,1}\cdots b_{1,m_1}$ и съгласно индукционното предположение:

$$N(b_{1,1}\cdots b_{1,m_1})\,N(b_{2,1}\cdots b_{2,m_2})\cdots N(b_{k,1}\cdots b_{k,m_k})$$

$$= b_{1,1}\cdots b_{1,m_1}\,N(b_{2,1}\cdots b_{2,m_2})\cdots N(b_{k,1}\cdots b_{k,m_k})$$

$$= b_{1,1}\cdots b_{1,m_1}\sum N\big((b_{2,1}\cdots b_{2,m_2})\cdots N(b_{k,1}\cdots b_{k,m_k})\big)$$

$$= \sum N\big((b_{1,1}\cdots b_{1,m_1})\cdots(b_{k,1}\cdots b_{k,m_k})\big),$$

където сумите в третия и четвъртия ред са по всички възможни сдвоявания между елементи участващи в различни групи (оградени със скоби). При прехода към четвъртия ред са добавени нулеви сдвоявания,

$$\overbracket{b_{1,\ell}\, b_{j,\ell'}} = 0, \quad \text{тъй като} \quad b_{1,\ell}\in\{c'\}_{j\in J}.$$

б) Нека поне един $b_{1,\ell}\in\{c_j''\}_{j\in J}$ и $k>1$. Тъй като нормалните произведения са симетрични спрямо пермутации на аргументите, то без ограничение на общността може да считаме, че $b_{1,m_1}\in\{c_j''\}_{j\in J}$.

$$\Rightarrow\quad N(b_{1,1}\cdots b_{1,m_1}) = N(b_{1,1}\cdots b_{1,m_1-1})\,b_{1,m_1} \quad \text{и тогава:}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N} :=\ & N(b_{1,1}\cdots b_{1,m_1})\, N(b_{2,1}\cdots b_{2,m_2})\cdots N(b_{k,1}\cdots b_{k,m_k}) \\
=\ & N(b_{1,1}\cdots b_{1,m_1-1})\, b_{1,m_1}\left(b_{2,\sigma_2(1)}\cdots b_{2,\sigma_2(m_2)}\right)\cdots\left(b_{k,\sigma_k(1)}\cdots b_{k,\sigma_k(m_k)}\right) \\
=\ & N(b_{1,1}\cdots b_{1,m_1-1})\left[b_{1,m_1}, \left(b_{2,\sigma_2(1)}\cdots b_{2,\sigma_2(m_2)}\right)\cdots\left(b_{k,\sigma_k(1)}\cdots b_{k,\sigma_k(m_k)}\right)\right] \\
&+ N(b_{1,1}\cdots b_{1,m_1-1})\left(b_{2,\sigma_2(1)}\cdots b_{2,\sigma_2(m_2)}\right)\cdots\left(b_{k,\sigma_k(1)}\cdots b_{k,\sigma_k(m_k)}\right) b_{1,m_1} \\
=\ & N(b_{1,1}\cdots b_{1,m_1-1})\left[b_{1,m_1}, \left(b_{2,\sigma_2(1)}\cdots b_{2,\sigma_2(m_2)}\right)\cdots\left(b_{k,\sigma_k(1)}\cdots b_{k,\sigma_k(m_k)}\right)\right] \\
&+ N(b_{1,1}\cdots b_{1,m_1-1})\, N(b_{2,1}\cdots b_{2,m_2})\cdots N(b_{k,1}\cdots b_{k,m_k})\, b_{1,m_1},
\end{aligned}
$$

където $\sigma_j \in \mathfrak{S}_{m_j}$ е такава, че $N(b_{j,1}\cdots b_{j,m_j}) = b_{j,\sigma_j(1)}\cdots b_{j,\sigma_j(m_j)}$.
По-нататък, използваме тъждеството на Лайбниц:

$$
[A, B_1\cdots B_m] = \sum_{j=1}^{m} B_1\cdots B_{j-1}\,[A, B_j]\,B_{j+1}\cdots B_m ,
$$

както и $[b_{1,m_1}, b_{j,\ell}] = \overbracket{b_{1,m_1}\, b_{j,\ell}} \cdot 1$, понеже $b_{1,m_1} \in \{C_j''\}_{j\in J}$
и така преобразуваме $\mathcal{N}$ във вида:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{\overset{= m_2+\cdots+m_k}{m}} N(b_{1,1}\cdots b_{1,m_1-1})\, \overbracket{b_{1,m_1}\left(b_{2,\sigma_2(1)}\cdots b_{2,\sigma_2(m_2)}\right)\cdots}^{\text{позиция } j}\left(b_{k,\sigma_k(1)}\cdots b_{k,\sigma_k(m_k)}\right) \\
&+ N(b_{1,1}\cdots b_{1,m_1-1})\, N(b_{2,1}\cdots b_{2,m_2})\cdots N(b_{k,1}\cdots b_{k,m_k})\, b_{1,m_1} \\
=\ & \sum_{j=1}^{m} N(b_{1,1}\cdots b_{1,m_1-1}\, \overbracket{b_{1,m_1})\, N(b_{2,1}\cdots b_{2,m_2})\cdots}^{j}\, N(b_{k,1}\cdots b_{k,m_k}) \\
&+ N(b_{1,1}\cdots b_{1,m_1-1})\, N(b_{2,1}\cdots b_{2,m_2})\cdots N(b_{k,1}\cdots b_{k,m_k})\, b_{1,m_1}
\end{aligned}
$$

$$= \sum{}' N(b_{1,1} \cdots b_{1,m_1-1}\, b_{1,m_1})\, N(b_{2,1} \cdots b_{2,m_2}) \cdots N(b_{k,1} \cdots b_{k,m_k})$$

$$+ \sum{}'' N(b_{1,1} \cdots b_{1,m_1-1})\, N(b_{2,1} \cdots b_{2,m_2}) \cdots N(b_{k,1} \cdots b_{k,m_k})\, b_{1,m_1}$$

$$= \sum N\big((b_{1,1} \cdots b_{1,m_1}) \cdots (b_{k,1} \cdots b_{k,m_k})\big),$$ където:

- $\sum'$ е сумата по всевъзможните сдвоявания между елементи от различни групи, сред които присъства елемента b_{1,m_1}.
- $\sum''$ и $\sum$ са суми по всевъзможните сдвоявания между елементи от различни групи, оградени в нормалното произведение.
- $\sum' + \sum'' = \sum$ изразява факта, че $\sum''$ е тази част от $\sum$, в която b_{1,m_1} не е сдвоен.

$\square$

III.2. Привеждане на S-матрицата в нормална форма. Хронологични произведения.

Припомняме от лекция 3, че за две автономни квантови динамични системи с Хамилтониани

$$H_0 \quad \text{и} \quad H = H_0 + V$$

въведохме оператор на разсейване, наричан още S-матрица, и изведохме негово представяне в ред по теория на пертурбациите

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \int_{\tau_1 > \cdots > \tau_n} d\tau_1 \cdots d\tau_n \, V(\tau_1) \cdots V(\tau_n) \,,$$

$$V(t) = e^{-iH_0 t} \, V \, e^{iH_0 t} \,.$$

Въвеждаме хронологични произведения:

$$T\big(V(t_1) \cdots V(t_n)\big) = V\big(t_{\eta(1)}\big) \cdots V\big(t_{\eta(n)}\big)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} V\big(t_{\sigma(1)}\big) \cdots V\big(t_{\sigma(n)}\big) \, \theta\big(t_{\sigma(1)} - t_{\sigma(2)}\big) \cdots \theta\big(t_{\sigma(n-1)} - t_{\sigma(n)}\big) \,,$$

където $\eta \in S_n$ е такава че $t_{\eta(1)} \geq \cdots \geq t_{\eta(n)}$ и $\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{ако } t \geq 0 \\ 0 & \text{ако } t < 0 \end{cases}$

и тогава:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d\tau_1 \cdots d\tau_n \, T\big(V(\tau_1) \cdots V(\tau_n)\big) \,,$$

тъй като $T\big(V(\tau_1) \cdots V(\tau_n)\big) = T\big(V(\tau_{\sigma(1)}) \cdots V(\tau_{\sigma(n)})\big)$ за $\forall \sigma \in S_n$ и така горния интеграл се свежда до $n!$ еднакви израза.

Нека сега предположим, че пълният Хамилтониан H е зададен с некомутативно-полиномиален израз от оператори $q'_1, \dots, q'_s$, $p'_1, \dots, p'_s$, които изпълняват канонични комутационни съотношения,

$$[q'_j, q'_k] = 0 = [p'_j, p'_k], \quad [q'_j, p'_k] = i\,\delta_{j,k}\,\mathbb{1}$$

И нека H_0 е квадратичната част на H, за която предполагаме, че може да се приведе в осцилаторна форма

$$H_0 = \sum_{j=1}^{s} \frac{\omega_j}{2}\left(q_j^2 + p_j^2\right) = \sum_{j=1}^{s} \omega_j\, a_j^* a_j + \mathcal{E}_0,$$

където $q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$ са оператори получени от $q'_1, \dots, q'_s$, $p'_1, \dots, p'_s$ с линейна канонична трансформация, т.е., те отново изпълняват

$$[q_j, q_k] = 0 = [p_j, p_k], \quad [q_j, p_k] = i\,\delta_{j,k}\,\mathbb{1};$$

$a_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q_j + i p_j\right)$ и $a_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q_j + i p_j\right)$ са съответните оператори на раждане и унищожаване; $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} \omega_j$.

По такъв начин всеки от изходните оператори $q'_1, \dots, q'_s$, $p'_1, \dots, p'_s$ се изразява с линейна комбинация от операторите $a_1^*, \dots, a_s^*, a_1, \dots, a_s$ и замествайки ги в V получаваме отново некомутативен полиномиален израз, но от $a_1^*, \dots, a_s^*, a_1, \dots, a_s$. След привеждане в нормална форма V придобива най-общо вида

$$V = \sum_{\nu} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_{L_\nu} \\ k_1, \dots, k_{M_\nu} = 1}}^{s} V^{(\nu)}_{j_1, \dots, j_{L_\nu}; k_1, \dots, k_{M_\nu}}\, a_{j_1}^* \cdots a_{j_{L_\nu}}^*\, a_{k_1} \cdots a_{k_{M_\nu}},$$

където сумата по ν е крайна.

Тъй като $e^{-iH_0t}(A_1\cdots A_n)e^{iH_0t}$ $= e^{-iH_0t}A_1e^{iH_0t}\cdots e^{-iH_0t}A_ne^{iH_0t}$, то

$$V(t) = e^{-iH_0t}\,V\,e^{iH_0t}$$

$$= \sum_{\nu}\ \sum_{\substack{j_1,\dots,j_{L_\nu}\\ k_1,\dots,k_{M_\nu}=1}}^{s} V^{(\nu)}_{j_1,\dots,j_{L_\nu};k_1,\dots,k_{M_\nu}}\, a^*_{j_1}(t)\cdots a^*_{j_{L_\nu}}(t)\,a_{k_1}(t)\cdots a_{k_{M_\nu}}(t),$$

където $a_j^*(t) = e^{-iH_0t}a_j^*e^{iH_0t}$ и $a_j(t) = e^{-iH_0t}a_je^{iH_0t}$.

<u>Лема.</u> $a_j^*(t) = e^{-i\omega_j t}a_j^*$, $a_j(t) = e^{i\omega_j t}a_j$.

<u>Доказателство.</u> От Лекция 4 знаем, че

$$A(t) = e^{-itH_0}Ae^{itH_0} \iff \left|\begin{array}{l} A(t) = -i[H_0, A(t)] \\ A(0) = A. \end{array}\right.$$

и също така $[H_0, A(t)] = e^{-itH_0}[H_0, A]e^{itH_0}$. От друга страна, $[H_0, a_j^*] = \omega_j a_j^*$ и $[H_0, a_j] = -\omega_j a_j$. По такъв начин имаме

$$\left|\begin{array}{l} \frac{d}{dt}a_j^*(t) = -i\omega_j a_j^*(t) \\ a_j^*(0) = a_j^* \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left|\begin{array}{l} \frac{d}{dt}a_j(t) = i\omega_j a_j(t) \\ a_j(0) = a_j. \end{array}\right.$$

Но тези условия се изпълняват от $e^{-i\omega_j t}a_j^*$ и $e^{i\omega_j t}a_j$, съответно. Така лемата следва от единствеността на решенията. $\square$

Забележка. Аналогично се установява и тъждеството:

$$\underbrace{e^{tA} B e^{-tA}}_{\overbrace{Ad(tA)(B)}^{\shortparallel}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [\underbrace{A, [A, \ldots [A}_{n}, B] \ldots]]$$

$$Ad(tA)(B) = e^{t\, ad(A)(B)}$$

$t = 1$ или формален ред по t

$$ad(A)(B) := [A, B]$$

Действително: $\frac{d}{dt}\left(e^{tA} B e^{-tA} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [\underbrace{A, [A, \ldots [A}_{n}, B] \ldots]]\right) = 0$

и освен това: $\left(e^{tA} B e^{-tA} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [\underbrace{A, [A, \ldots [A}_{n}, B] \ldots]]\right)\Bigg|_{t=0} = 0.$

И така, $a_j^*(t)$ и $a_j(t)$ просто са пропорционални на a_j^* и a_j, съответно. Замествайки $V(t)$ в реда за S ние искаме да приведем резултата в нормална форма.

Хронологична теорема на Вик.

Нека $b_{1,1},\dots,b_{1,m_1},\dots,b_{k,1},\dots,b_{k,m_k}\in\{\hat{a}_j^*,\hat{a}_j\}_{j=1}^s$ и $b_{j,\ell}(t)=e^{-itH_0}\,b_{j,\ell}\,e^{itH_0}$. Тогава:

$$T\Big(N\big(b_{1,1}(t_1)\cdots b_{1,m_1}(t_1)\big)\cdots N\big(b_{k,1}(t_k)\cdots b_{k,m_k}(t_k)\big)\Big)$$

$$=\sum N\Big(\big(b_{1,1}(t_1)\cdots b_{1,m_1}(t_1)\big)\cdots\big(b_{k,1}(t_k)\cdots b_{k,m_k}(t_k)\big)\Big),$$

където подобно на предходната теорема в дясната страна на равенството стои сума по всички възможни сдвоявания между елементи от различни групи, с единствена разлика в определението на елементарните сдвоявания, които в случая се наричат хронологични сдвоявания и се определят по формулата:

$$\begin{aligned}\overbracket{b'(t')\,b''}(t'') &:= \langle\Omega\,|\,T\big(b'(t')\,b''(t'')\,\Omega\big\rangle\\ &= \langle\Omega\,|\,b'(t')\,b''(t'')\,\Omega\rangle\,\theta(t'-t'')\\ &+\langle\Omega\,|\,b''(t'')\,b'(t')\,\Omega\rangle\,\theta(t''-t')\end{aligned}$$

където $b'(t)=e^{-itH_0}\,b'\,e^{itH_0}$, $b''(t)=e^{-itH_0}\,b''\,e^{itH_0}$ и $b',b''\in\{\hat{a}_j^*,\hat{a}_j\}_{j=1}^s$.

Забележка. Експлицитно:

$$\overbracket{a_{j_1}(t_1)\,a}_{j_2}(t_2)=0=\overbracket{a^*_{j_1}(t_1)\,a}{}^*_{j_2}(t_2)$$

$$\begin{aligned}\overbracket{a_{j_1}(t_1)\,a}{}^*_{j_2}(t_2) &= \overbracket{a^*_{j_2}(t_2)\,a}_{j_1}(t_1)=\\ &=\delta_{j_1,j_2}\,\theta(t_1-t_2)\,e^{i\omega_{j_1}(t_1-t_2)}\\ &=:G(j_1,t_1;j_2,t_2).\end{aligned}$$

Доказателство на теоремата.

Нека $\eta \in S_k$ е такава, че $t_{\eta(1)} \geq \cdots \geq t_{\eta(k)}$ и тогава:

$$T\Big(N\big(b_{1,1}(t_1)\cdots b_{1,m_1}(t_1)\big)\cdots N\big(b_{k,1}(t_k)\cdots b_{k,m_k}(t_k)\big)\Big)$$

$$= N\big(b_{\eta(1),1}(t_{\eta(1)})\cdots\big)\cdots N\big(b_{\eta(k),1}(t_{\eta(k)})\cdots\big)$$

$$= \sum N\Big(\big(b_{\eta(1),1}(t_{\eta(1)})\cdots\big)\cdots\big(b_{\eta(k),1}(t_{\eta(k)})\cdots\big)\Big)^{w},$$

където в последното равенство сме приложили първата теорема на Вик и сумата е по всички възможни Викови сдвоявания:

$$\overbracket{b_{\eta(j),\ell}(t_{\eta(j)})\; b_{\eta(j'),\ell'}}^{\,w}(t_{\eta(j')})$$

$$= \langle \Omega \,|\, b_{\eta(j),\ell}(t_{\eta(j)})\, b_{\eta(j'),\ell'}(t_{\eta(j')})\,\Omega\rangle,$$

$1 \leq j < j' \leq k$. Но $t_{\eta(j)} \geq t_{\eta(j')}$ и следователно:

$$\overbracket{b_{\eta(j),\ell}(t_{\eta(j)})\; b_{\eta(j'),\ell'}}(t_{\eta(j')})$$

$$= \langle \Omega \,|\, T\big(b_{\eta(j),\ell}(t_{\eta(j)})\, b_{\eta(j'),\ell'}(t_{\eta(j')})\big)\,\Omega\rangle,$$

$$= \langle \Omega \,|\, b_{\eta(j),\ell}(t_{\eta(j)})\, b_{\eta(j'),\ell'}(t_{\eta(j')})\,\Omega\rangle,$$

$$= \overbracket{b_{\eta(j),\ell}(t_{\eta(j)})\; b_{\eta(j'),\ell'}}^{\,w}(t_{\eta(j')}),$$

т.е. хронологичното и Виковото сдвояване съвпадат в този случай.
И така, получаваме:

$$T\left(N\left(b_{1,1}(t_1)\cdots b_{1,m_1}(t_1)\right)\cdots N\left(b_{k,1}(t_k)\cdots b_{k,m_k}(t_k)\right)\right)$$

$$= \sum N\left(\left(b_{\eta(1),1}(t_{\eta(1)})\cdots\right)\cdots\left(b_{\eta(k),1}(t_{\eta(k)})\cdots\right)\right)$$

$$= \sum N\left(\left(b_{1,1}(t_1)\cdots\right)\cdots\left(b_{k,1}(t_k)\cdots\right)\right),$$

където последното равенство е именно това, което се твърди в хронологичната теорема на Вик и прехода към това равенство следва от симетрията спрямо пермутации на аргументите, както на нормалното произведение, така и на хронологичното сдвояване:

$$b'(t')\, b''(t'') = \langle \Omega | T(b'(t')\, b''(t''))\, \Omega \rangle$$

$$= \langle \Omega | T(b''(t'')\, b'(t'))\, \Omega \rangle = b''(t'')\, b'(t'). \qquad \square$$

III. 3. Диаграмно изобразяване на членовете на S-матрицата. Правила на Файнман

Прилагайки хронологичната теорема на Вик към получените в предната точка формули за развитието на S-матрицата

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d\tau_1 \cdots d\tau_n \, T\big(V(\tau_1) \cdots V(\tau_n)\big),$$

$$V(t) = \sum_{\nu} \sum_{\substack{j_1,\dots,j_{L_\nu} \\ k_1,\dots,k_{M_\nu}=1}}^{s} V^{(\nu)}_{j_1,\dots,j_{L_\nu};k_1,\dots,k_{M_\nu}} a^*_{j_1}(t) \cdots a^*_{j_{L_\nu}}(t)\, a_{k_1}(t) \cdots a_{k_{M_\nu}}(t),$$

получаваме:

(S-normal)

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d\tau_1 \cdots d\tau_n$$

$$\times \sum_{\forall} V^{(\nu_1)}_{j_{1,1},\dots;k_{1,1},\dots} \cdots V^{(\nu_n)}_{j_{n,1},\dots;k_{n,1},\dots}$$

$$\times N\Big(\big(a^*_{j_{1,1}}(\tau_1) \cdots a_{k_{1,1}}(\tau_1) \cdots\big) \cdots \big(a^*_{j_{n,1}}(\tau_n) \cdots a_{k_{n,1}}(\tau_n) \cdots\big)\Big),$$

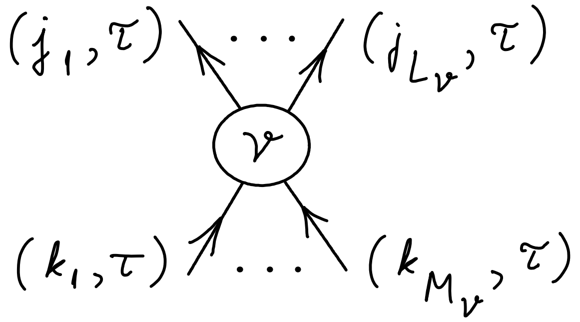
където $\sum_{\forall}$ означава сумиране по всички индекси и сдвоявания между елементи на различни групи. Последната формула е очевидно доста обемиста, но в нея има заложена проста комбинаторика свързана с всички възможни сдвоявания. За да се направи по нагледна тази комбинаторика ние ще направим взаимно-еднозначно съответствие между членовете в развитието (S-normal) и определени декорирани графи наричани диаграми на Файнман.

Feynman diagrams.

Идеята за това съответствие е да съпоставим на всеки моном

$$V^{(v)}_{j_1,\dots,j_{L_v};k_1,\dots,k_{M_v}} a^*_{j_1}(\tau)\cdots a^*_{j_{L_v}}(\tau)\, a_{k_1}(\tau)\cdots a_{k_{M_v}}(\tau)$$

по един вертекс декориран, т.е. надписан, по следния начин



,

т.е., надписваме го с индексите и променливите присъстващи в монома, като на входящите линии приписваме индексите на операторите на унищожаване, а на изходящите линии – на операторите на раждане. За всяко ненулево сдвояване свързваме съответните входове/изходи на различните вертекси, които съответстват на различните групи между които е станало сдвояването. Тъй като

$$\overline{a_{j_1}(t_1)\, a_{j_2}}(t_2) = 0 = \overline{a^*_{j_1}(t_1)\, a^*_{j_2}}(t_2),$$

то връзките ще бъдат само между вход и изход.

Правилата по които се конструират Файнмановите диаграми съответстващи на членовете в (S-normal) се наричат правила на Файнман / Feynman rules. Ние ще ги изложим тук в принципен вид, но в конкретни модели те могат да придобият по-специфична форма.

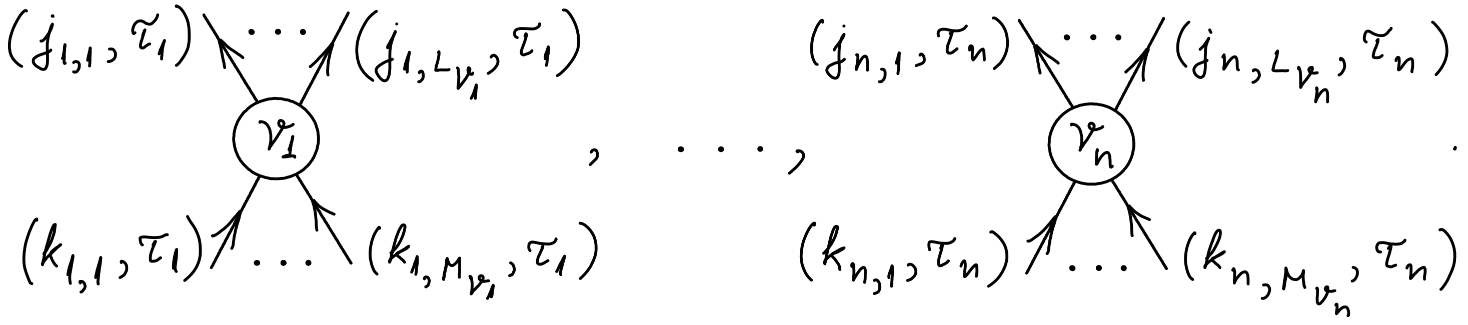
A.) Строене на диаграми.

A.1.) За всяко $n = 2, 3, \dots$ ($n = 1$ е тривиален) образуване множеството на всички наредени n-торки $(v_1, \dots, v_n)$ от индекси на базисните членове $V^{(v)}$ в разлагането на V в нормална форма

$$V = \sum_{v} V^{(v)},$$

$$V^{(v)} = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_{L_v} \\ k_1, \dots, k_{M_v} = 1}}^{S} V^{(v)}_{j_1, \dots, j_{L_v}; k_1, \dots, k_{M_v}} a^*_{j_1} \cdots a^*_{j_{L_v}} a_{k_1} \cdots a_{k_{M_v}} .$$

A.2) На всяка наредена n-торка $(v_1, \dots, v_n)$ съпоставяме наредена n-торка от декорирани вертекси



Предписаната редица от индекси ще означим с

$$\xi(v_1, \dots, v_n) \quad (=: \xi)$$

$$:= (j_{1,1}, \dots, j_{1,L_{v_1}}, k_{1,1}, \dots, k_{1,M_{v_1}}, \dots, j_{n,1}, \dots, j_{n,L_{v_n}}, k_{n,1}, \dots, k_{n,M_{v_n}}),$$

$$\xi(v_1, \dots, v_n) \in \Xi_{(v_1, \dots, v_n)} := \{1, \dots, S\}^{\times \left(\sum_{\alpha=1}^{n} (L_{v_\alpha} + M_{v_\alpha}) \right)},$$

като тя пробягва крайното индексно множество $\Xi_{(v_1,\dots,v_n)}$, което има $s(L_{v_1}+M_{v_1}+\dots+L_{v_n}+M_{v_n})$ на брой елемента.

A.3.) За дадена наредена n-торка $(v_1,\dots,v_n)$ и съпоставената на нея наредена n-торка от декорирани вертекси образуваме множеството $\mathcal{T}_{(v_1,\dots,v_n)}$ на всички възможни свързвания на съпоставените вертекси с линии които свързват вход на произволен вертекс с изход на различен от него вертекс. По такъв начин $\mathcal{T}_{(v_1,\dots,v_n)}$ е множество от декорирани графи, които наричаме още Файнманови диаграми.

Обръщаме внимание на това, че поради декорацията на входовете и изходите на вертексите те са различими, както и самите вертекси (т.е., говорим за наредени n-торки). В последствие, поради сумирането и интегрирането по декорациите индекси може да се окаже, че различни декорирани диаграми от $\mathcal{T}_{(v_1,\dots,v_n)}$ дават еднакви приноси в S-матрицата. Това може допълнително да се отчете, като се факторизира множеството $\mathcal{T}_{(v_1,\dots,v_n)}$ по определени правила на симетрия (еквивалентност), но ние това няма да правим в тези лекции.

Б.) Аналитичен израз съответстващ на диаграма.

На всяка Файнманова диаграма $\Gamma \in \mathcal{T}_{(v_1,\dots,v_n)}$ съпоставяме два типа функции,

$$G(\Gamma)_\xi(\tau_1,\dots,\tau_n) \in \mathbb{C} \text{ и } A(\Gamma)_\xi(\tau_1,\dots,\tau_n) \in Op(\mathcal{H})$$

$$\text{при } \xi \in \Xi_{(v_1,\dots,v_n)} \text{ и } \tau_1,\dots,\tau_n \in \mathbb{R}.$$

Тази съпоставка е такава, че (S-normal) придобива вида

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v_1, \ldots, v_n} \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}_{(v_1, \ldots, v_n)}} \int d\tau_1 \cdots d\tau_n \sum_{\xi \in \Xi_{(v_1, \ldots, v_n)}} \frac{i^n}{n!}$$

$$\times G(\Gamma)_\xi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \cdot A(\Gamma)_\xi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

Означенията в горната формула може допълнително да се опростят, ако се въведат

$$\mathcal{T}_n = \bigcup_{v_1, \ldots, v_n} \mathcal{T}_{(v_1, \ldots, v_n)}$$ – $\Bigg\{$ множеството от всички n-точкови файнманови диаграми

$\Xi_\Gamma := \Xi_{(v_1, \ldots, v_n)}$, ако $\Gamma \in \mathcal{T}_{(v_1, \ldots, v_n)}$ е индексното множество съответстващо на диаграмата Γ. Тогава:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}_n} \int d\tau_1 \cdots d\tau_n \sum_{\xi \in \Xi_\Gamma} G(\Gamma)_\xi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \cdot A(\Gamma)_\xi(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

Ето правилата по които се строят:

$$G(\Gamma)_\xi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \quad \text{и} \quad A(\Gamma)_\xi(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

5.1.) Функциите $G(\Gamma)_\xi(\tau_1,\dots,\tau_n)$ се наричат Файнманови амплитуди /Feynman amplitudes/ или още, Файнманови ядра /kernels/. Понякога обаче под Файнманова амплитуда се разбира частта от амплитуда на разсейване (матричен елемент на S-матрицата – виж Лекция 3), която съответства на члена в развитието (S-normal) отговарящ за диаграмата Γ.

Функциите $G(\Gamma)_\xi(\tau_1,\dots,\tau_n)$ се строят по следното правило. Нека с $Edge(\Gamma)$ означим множеството от линии (edges) на диаграмата Γ. На линия $e\in Edge(\Gamma)$ съответства декорация

$$e:\quad \overset{\text{изход}}{(j_{\alpha,\beta},\tau_\alpha)} \longrightarrow \overset{\text{вход}}{(k_{\alpha';\beta'},\tau_{\alpha'})}$$

и полагаме:

$$G_e := G(k_{\alpha';\beta'},\tau_{\alpha'};j_{\alpha,\beta},\tau_\alpha)$$

$$\equiv \delta_{j_{\alpha,\beta},k_{\alpha';\beta'}}\cdot\theta(\tau_{\alpha'}-\tau_\alpha)\cdot e^{i\omega_{j_{\alpha,\beta}}(\tau_{\alpha'}-\tau_\alpha)}$$

$$= \overbracket{a^*_{j_{\alpha,\beta}}(\tau_\alpha)\, a_{k_{\alpha';\beta'}}}(\tau_{\alpha'}) = \overbracket{a_{k_{\alpha';\beta'}}(\tau_{\alpha'})\, a^*_{j_{\alpha,\beta}}}(\tau_\alpha)$$

Тогава, ако $\Gamma\in\mathcal{T}_{(v_1,\dots,v_n)}$ имаме:

$$G(\Gamma)_\xi(\tau_1,\dots,\tau_n) := \left(\prod_{e\in Edge(\Gamma)} G_e\right)$$

$$\times\left(V^{(v_1)}_{j_{1,1},\dots;k_{1,1},\dots}\cdots V^{(v_n)}_{j_{n,1},\dots;k_{n,1},\dots}\right).$$

Б.2) Операторните функции $A(\Gamma)_\xi(\tau_1,\dots,\tau_n)$ се строят, като нормално произведение от оператори на раждане и унищожаване, като на всеки не свързан вход на вертекс с декорация

$$v_\alpha \longleftarrow (k_{\alpha,\beta},\tau_\alpha) \qquad \longrightarrow \qquad a_{k_{\alpha,\beta}}(\tau_\alpha);$$

на не свързан изход на вертекс:

$$v_\alpha \longrightarrow (j_{\alpha,\beta},\tau_\alpha) \qquad \longrightarrow \qquad a^*_{j_{\alpha,\beta}}(\tau_\alpha).$$

С това изчерпваме описанието на правилата на Файнман. Непосредствено се убеждаваме, че въведените правила описват всички членове в развитието (S-normal).

III. 4. Заключителни бележки

• За амплитудите на разсейване

Асимптотично състояние на m свободни частици се описва в пространството на Фок от вектор

$$a^*_{j_1} \cdots a^*_{j_m} |0\rangle$$

записан в означения на Дирак. Ако $a^*_{j'_1} \cdots a^*_{j'_{m'}} |0\rangle$ е друго асимптотично състояние, то амплитудата на разсейване между двете състояния е: $$\langle 0| \, a_{j'_1} \cdots a_{j'_{m'}} \, S \, a^*_{j_1} \cdots a^*_{j_m} |0\rangle .$$

Приносът към тази амплитуда на члена отговарящ на диаграма Γ е:

$$\int d\tau_1 \cdots d\tau_n \sum_{\xi \in \Xi_\Gamma} G(\Gamma)_\xi (\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

$$\times \langle 0| \, a_{j'_1} \cdots a_{j'_{m'}} \, A(\Gamma)_\xi (\tau_1, \ldots, \tau_n) \, a^*_{j_1} \cdots a^*_{j_m} |0\rangle ,$$

където матричният елемент на втория ред се пресмята от теоремата на Вик и се дава от напълно сдвоената част (поради присъствието на вакуум от ляво и от дясно). Така,

$$\langle 0| \, a_{j'_1} \cdots a_{j'_{m'}} \, A(\Gamma)_\xi (\tau_1, \ldots, \tau_n) \, a^*_{j_1} \cdots a^*_{j_m} |0\rangle$$

се свежда до произведение от делта символи и експоненти $\exp(i\omega_j(\tau - \tau'))$. Това е главната техническа причина, поради която нормалните произведения са важни при пресмятане на S-матрицата.

• Илюстрация на идеите в точка III на конкретен модел, както и допълнителни бележки относно сходимостта на получените интеграли и безкрайни редове ще бъдат изложени в отделни приложения.