N. N.

22.11.13

-1-

Квантова теория на полето и елементарните частици: Лекция 7

Николай М. Николов

С червено са отбелязани части от лекцията, в които е имало пропуски или са приведени допълнителни сведения.

В тази лекция ще изложим математическия апарат на "континуално" диференциално смятане, който съответства както класическото, така и квантовото описание на полеви физични системи. Конфигурационното, както и фазовото пространство на една полева система е пространство от функции (поле се описва от функция над пространсовото и времето). Обобщението на диференциалното смятане над такива безкрайно мерни пространства (които са векторни пространства или дори многообразия) е вариационното смятане.

Във връзка с тази тема естествено стигаме и до потребността от още една математическа област – теория на обобщените функции. Такива функции дават континуалния аналог на функции с дискретни индекси, като символите на Кронекер $\delta_{j,k}$, които се обобщават в прочутата "функция" на Дирак, $\delta(x-y)$, която е пример за обобщена функция.

1. Вариационно смятане

а) Вариационна производна

Нека $\mathcal{F}(\varphi)$ е функция, чийто аргумент е функция $\varphi : U \to V$, където U и V са някакви отворени подмножества в $\mathbb{R}^N$ (или дори, на подмногообразия в $\mathbb{R}^N$). Такива функции, имащи аргумент функции, се наричат функционали и се бележат с

$$\mathcal{F}\{\varphi(x)\}$$

за да се подчертае, че аргументът е цялата функция φ, а не стойността $\varphi(x)$.

Функционалът $\mathcal{F}\{\varphi(x)\}$ се нарича диференцируем в φ, ако $\mathcal{F}\{\varphi(x)+\varepsilon f(x)\}$ е диференцируема функция на реалния параметър ε в околност на $\varepsilon = 0$ за всяка гладка функция $f(x)$. Тази дефиниция се нуждае от множество уточнения, които излизат извън рамките на настоящия курс. За нас ще е единствено важно, че по такъв начин ние може да определим един линеен функционал $d\mathcal{F}(\varphi)$

$$d\mathcal{F}(\varphi)[f] := \frac{d}{d\varepsilon}\left(\mathcal{F}\{\varphi(x)+\varepsilon f(x)\}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0} \equiv \frac{d}{d\varepsilon}\Bigg|_{\varepsilon=0} \mathcal{F}\{\varphi(x)+\varepsilon f(x)\},$$

който се нарича диференциал на функционала $\mathcal{F}$ в φ. В определени случаи $d\mathcal{F}(\varphi)$ може да се представи във вида

$$d\mathcal{F}(\varphi)[f] = \int_U d^D x \sum_{A=1}^{N} \frac{\delta \mathcal{F}(\varphi)}{\delta \varphi_A(x)} f_A(x),$$

където $\varphi(x) = (\varphi_A(x))_{A=1}^N$ и $f(x) = (f_A(x))_{A=1}^N$ са гладки функции върху отворено подмножество $U \subseteq \mathbb{R}^D$, а $\dfrac{\delta \mathcal{F}(\varphi)}{\delta \varphi_A(x)}$ са също гладки функции на $x \in U$, наречени вариационни производни на $\mathcal{F}$. В по-общ случай вариационните производни могат да се въведат като обобщени функции, които ще разгледаме в точка 2.

б) Задача и уравнения на Лагранж-Ойлер

Задачата на Лагранж-Ойлер е задача за вариационен екстремум

$$dS(\varphi) = 0$$

на един функционал $S\{\varphi(x)\}$ наречен действие и имащ специалния вид:

$$S = \int_U d^D x \; L\left(\varphi(x), (\partial_{x_\mu}\varphi(x)), x\right),$$

където $\varphi(x) = (\varphi_A(x))_{A=1}^N$,

$$(\partial_{x_\mu}\varphi(x)) \equiv (\partial_{x_\mu}\varphi_A(x))_{\substack{\mu=1,\dots,D \\ A=1,\dots,N}}, \quad \partial_{x_\mu}\varphi(x) := \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_\mu},$$

а $L = L(u, (u_\mu), x)$ е функция на $u = (u_A)_{A=1}^N$, $(u_\mu) = (u_{\mu,A})$ и $x = (x_\mu)_{\mu=1}^D$ - общо $N + ND + D$ на брой реални аргументи, в част от които са заместени стойностите на φ и нейните първи производни в точката x. Функцията L се нарича Лагранжиан.

Вариация на $\varphi(x)$ ще наричаме всяка гладка функция

$$\varphi(x;\varepsilon)\ ,\quad \varepsilon\in(-a,a)\ ,\quad \varphi(x;0)=\varphi(x).$$

Например, $\varphi(x;\varepsilon)=\varphi(x)+\varepsilon f(x)$ от подточка а е пример за вариация. Пресмятаме:

$$\frac{d}{d\varepsilon}S\{\varphi(x;\varepsilon)\}=\frac{d}{d\varepsilon}\int_U d^D x\ L\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)$$

$$=\int_U d^D x\ \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bigg(L\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)\bigg),$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bigg(L\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)\bigg)$$ ← производна на сложна функция

$$=\sum_{A=1}^{N}\partial_{u_A}L\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)\,\partial_\varepsilon\varphi(x;\varepsilon)$$

$$+\sum_{A=1}^{N}\sum_{\rho=1}^{D}\partial_{u_{A,\rho}}L\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)\,\partial_\varepsilon\partial_{x_\rho}\varphi(x;\varepsilon)$$

$$=\sum_{\rho=1}^{D}\partial_{x_\rho}\bigg(\sum_{A=1}^{N}\partial_{u_{A,\rho}}L\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)\,\partial_\varepsilon\varphi(x;\varepsilon)\bigg)$$

$$+\sum_{A=1}^{N}\mathcal{E}_A(L)\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),(\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)\,\partial_\varepsilon\varphi(x;\varepsilon),$$

където $\partial_{u_A}=\dfrac{\partial}{\partial u_A}$, $\partial_{u_{A,\mu}}=\dfrac{\partial}{\partial u_{A,\mu}}$, $\partial_\varepsilon=\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}$ и в последното равенство сме използвали тъждеството на Лайбниц и сме въвели система от функции $\mathcal{E}_A(L)$, които ще опишем сега.

При прилагане на тъждеството на Лайбниц в първия член на последното равенство ще възникне:

$$\partial_{x_\alpha}\Big(L\big(\varphi(x), (\partial_{x^\mu}\varphi), x\big)\Big) = \partial_{x_\alpha} L\big(\varphi(x), (\partial_{x^\mu}\varphi), x\big)$$

$$+ \sum_{A=1}^{N} \partial_{u_A} L\big(\varphi(x), (\partial_{x^\mu}\varphi), x\big)\, \partial_{x_\alpha}\varphi(x)$$

$$+ \sum_{A=1}^{N}\sum_{\rho=1}^{D} \partial_{u_{A,\rho}} L\Big(\varphi(x), \big(\partial_{x_\mu}\varphi(x)\big), x\Big)\, \partial_{x_\alpha}\partial_{x_\rho}\varphi(x)$$

$$= \big(\mathcal{D}_{x_\alpha} L\big)\Big(\varphi(x), \big(\partial_{x_\mu}\varphi(x)\big), \big(\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu}\varphi(x)\big), x\Big),$$

където $\mathcal{D}_{x_\alpha} L\big(u, (u_\mu), (u_{\mu,\nu}), x\big)$

$$:= \partial_{x_\alpha} L\big(u, (u_\mu), x\big) + \sum_{A=1}^{N} \partial_{u_A} L\big(u, (u_\mu), x\big)\, u_{A,\mu}$$

$$+ \sum_{A=1}^{N}\sum_{\rho=1}^{D} \partial_{u_{A,\rho}} L\big(u, (u_\mu), x\big)\, u_{A,\rho,\alpha}$$

е функция на допълнително $N\,\dfrac{D(D+1)}{2}$ на брой променливи $u_{A,\mu,\nu} = u_{A,\nu,\mu}$, $(1 \le \mu \le \nu \le D)$ и се нарича пълна производна. Така,

$$\mathcal{E}_A(L)\big(u, (u_\mu), (u_{\mu,\nu}), x\big) = \partial_{u_A} L - \sum_{\alpha=1}^{D} \mathcal{D}_{x_\alpha}\partial_{u_{A,\alpha}} L.$$

$\mathcal{E}_A$ е линеен диференциален оператор върху L наречен оператор на Лагранж-Ойлер.

Резултатът: $\partial_{\varepsilon}\Big(L\big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),x\big)\Big)$

$$= \sum_{A=1}^{N} \mathcal{E}_A(L)\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),(\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)\,\partial_{\varepsilon}\varphi(x;\varepsilon)$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{D} \partial_{x_\rho}\Big(\sum_{A=1}^{N} \partial_{u_A} L\big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),x\big)\,\partial_{\varepsilon}\varphi_A(x;\varepsilon)\Big)$$

и следователно, $\frac{d}{d\varepsilon} S\{\varphi(x;\varepsilon)\}$

$$= \int_U d^D x \sum_{A=1}^{N} \mathcal{E}_A(L)\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),(\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)\,\partial_{\varepsilon}\varphi(x;\varepsilon),$$

ако предположим, че $\partial_{\varepsilon}\varphi(x;\varepsilon) = 0$ за $x \in$ околност на ∂U (границата на U), т.е. вариацията на φ изчезва в околност на границата на U, тъй като съгласно теоремата на Стокс:

$$\int_U d^D x\, \partial_{x^\mu} F = \int_{\partial U} d\sigma\; n^\mu \cdot \partial_{x^\mu} F.$$

В частност,

$$\frac{\delta S(\varphi)}{\delta \varphi_A(x)} = \mathcal{E}_A(L)\Big(\varphi(x),(\partial_{x_\mu}\varphi(x)),(\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu}\varphi(x)),x\Big)$$

и условието $dS(\varphi) = 0$ придобива вида:

$$\Big|\ \mathcal{E}_A(L)\Big(\varphi(x),(\partial_{x_\mu}\varphi(x)),(\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu}\varphi(x)),x\Big) = 0, \quad A = 1,\dots,N,$$

което е и системата от равнения на Лагранж-Ойлер.

2. Обобщени функции / разпределения
Generalized functions / distributions

Разпределенията обобщават линейни функционали от вида

$$f(x) \longmapsto \int_{\mathbb{R}^D} d^D x \; F(x) f(x)$$

и по такъв начин вариационните производни $\frac{\delta \mathcal{F}(\varphi)}{\delta \varphi_A(x)}$ на един функционал $\mathcal{F}\{\varphi(x)\}$, зададени от диференциала $d\mathcal{F}(\varphi)[f]$ се явяват разпределения. При извода на уравненията на Лагранж-Ойлер видяхме също, че е съвсем естествено функциите $f(x)$ (там това бяха $\varphi(x;\varepsilon) - \varphi(x;0)$) да бъдат нула в околност на границата на интеграционната област. Когато тази област е $\mathbb{R}^D$, то нула "в околност на границата" се интерпретира като "нула извън ограничено множество".

И така, аргументите на линейните функционали, които ще разглеждаме са специален вид функции наричани тест-функции. По определение тест функция е гладка функция $f : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}$, която става равна на нула извън ограничено подмножество на $\mathbb{R}^D$. Множеството от всички тест-функции е векторно подпространство на пространството от всички функции над $\mathbb{R}^D$, което се означава с

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^D) := \{ f : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ е тест-функция} \}.$$

Разпределенията обаче не се определят като произволни линейни функционали над $\mathcal{D}(\mathbb{R}^D)$, а се подчиняват на определени условия на непрекъснатост.

Въвежда се следната сходимост в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^D)$

$$f_j \xrightarrow[\text{в } \mathcal{D}]{} f \overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} \forall f_j \text{ и } f \text{ са } = 0 \text{ извън едно и също ограничено множество и} \\ \partial^n f_j \rightrightarrows \partial^n f \quad \forall n \\ \text{(равномерна сходимост на всички производни)} \end{cases}$$

По определение разпределение над $\mathbb{R}^D$ наричаме всеки непрекъснат линеен функционал
$$F : \mathcal{D}(\mathbb{R}^D) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto F[f]$$
(непрекъснатост: $f_j \xrightarrow[\text{в } \mathcal{D}]{} f \Longrightarrow F[f_j] \longrightarrow F[f]$).

Като линейни функционали, разпределенията формират векторно пространство означавано с:
$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^D) := \{ F \mid F \text{ е разпределение над } \mathbb{R}^D \}.$$

Много удобен е следния символичен запис на разпределенията като интеграли с обикновени функции:
$$f \longmapsto F[f] =: \int_{(\mathbb{R}^D)} d^D x \; F(x) \, f(x) \,,$$
където областта на "интегриране" ще изпускаме когато подразбираме, че тя е $\mathbb{R}^D$.

Примери. 1) Делта функция на Дирак.
$$f \longmapsto \delta[f] := f(0) = \int d^D x \; \delta(x) \, f(x) \,.$$

2) Всяка функция $F \in C^\infty(\mathbb{R}^D)$ (т.е., гладка) и дори локално интегрируема функция задава разпределение, като символичният запис става действителен:

$$F[f] := \int d^D x \;\; F(x)\, f(x) .$$

В горните два примера непрекъснатостта на линейните функционали следва непосредствено от основни теореми на реалния анализ.

Определяме: за отворено подмножество $U \subseteq \mathbb{R}^D$,

F е нула в U $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $F[f] = 0 \;\; \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^D)$ такава, че $f(x) = 0$ за $\forall x$ извън U и в околност на неговата граница.

(т.е., $\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^D)$, която е $= 0$ в отворено множество съдържащо $\mathbb{R}^D \setminus U$). Полагаме,

$$\operatorname{supp} F := \mathbb{R}^D \setminus \bigcup \{ U \mid U \underset{\text{отв.}}{\subseteq} \mathbb{R}^D , \; F \text{ е нула в } U \},$$

което е затворено подмножество на $\mathbb{R}^D$ наречено носител на F.
За гладка функция F се доказва, че:

$$\operatorname{supp} F = \overline{F^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} .$$

Непосредствено следва, че $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$.

По такъв начин можем да преформулираме:

$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^D) \iff f$ е гладка функция с компактен носител.

Операции над разпределения.

0) Линейни комбинации – както отбелязахме $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^D)$ е векторно пространство.

1) Ако $h \in C^\infty(\mathbb{R}^D)$ (h е гладка функция) и $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^D)$, то е определено разпределение

$$(h \cdot F)[f] := F[hf]$$

– умножение на разпределение по гладка функция. При символичния запис тази операция изглежда почти "тавтология":

$$\int d^D x \; \big(h(x) \cdot F(x)\big) \cdot f(x) = \int d^D x \; F(x) \cdot \big(h(x) \cdot f(x)\big).$$

Въпреки простото определение, условието за непрекъснатост изисква не съвсем тривиалната проверка, че

$$f_j \xrightarrow[\mathcal{B}\mathcal{D}]{} f \implies h f_j \xrightarrow[\mathcal{B}\mathcal{D}]{} hf.$$

<u>Забележка</u>. При проверката на последното свойство играе роля и условието, че носителите на $\forall f_j$ и f са равномерно ограничени.

<u>Пример</u> $(h \cdot \delta)[f] = \delta[hf] = h(0) f(0) = h(0)\, \delta[f]$.
$\implies h \cdot \delta = h(0)\, \delta$, записвано още като $h(x)\, \delta(x) = h(0)\, \delta(x)$.

2) Производна на разпределение

$$(\partial_{x_\mu} F)[f] := -F[\partial_{x_\mu} f], \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^D).$$

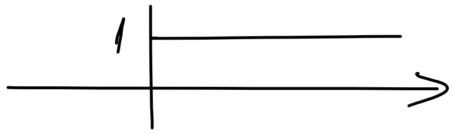
При символичния интегрален запис:

$$\int d^D x \, \left(\partial_{x_\mu} F(x)\right) f(x) = - \int d^D x \; F(x)\, \partial_{x_\mu} f \,,$$

което в случая когато $F(x)$ е гладка функция съответства на закона за интегриране по части, тъй като $f(x)$ е равна на нула на безкрайност (или по-точно, извън ограничено множество). Непрекъснатостта в общия случай следва от $f_j \xrightarrow[\text{в } \mathcal{D}]{} f \implies \partial_{x_\mu} f_j \xrightarrow[\text{в } \mathcal{D}]{} \partial_{x_\mu} f$.

<u>Пример:</u> а) Нека $\theta(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ е характеристичната функция на интервала $(0, \infty)$.

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \in (0,\infty) \\ 0, & \text{ако } x \notin (0,\infty) \end{cases} ,$$



,

$$\theta[f] = \int_{\mathbb{R}} dx \;\theta(x) f(x) = \int_0^\infty dx\, f(x) .$$

$$\implies \quad (\partial_x \theta)[f] = -\theta[\partial_x f] = -\int_0^\infty dx\, \partial_x f(x)$$

$$= -f(\infty) + f(0) = f(0) = \delta[f] .$$

$$\implies \quad \partial_x \theta = \delta \quad \text{или още,} \quad \partial_x \theta(x) = \delta(x) .$$

б) $(\partial_{x_\mu} \delta)[f] = -\delta[\partial_{x_\mu} f] = -\partial_{x_\mu} f(0)$.

<u>Свойство.</u> $\operatorname{supp} \partial_{x_\mu} F \subseteq \operatorname{supp} F$, $\operatorname{supp} h F \subseteq \operatorname{supp} F$.
Наистина: ако $f(x) = 0$ във вътрешността на $\mathbb{R}^D \setminus \operatorname{supp} F$, то и $\partial_{x_\mu} f(x) = 0 = h(x) f(x)$ там. $\Rightarrow F[\partial_{x_\mu} f] = 0 = F[hf]$.

В частност, $\operatorname{supp} \partial_{x_\mu} \delta = \{0\}$.

<u>Теорема</u> (без доказателство).

Ако $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^D)$ е такава, че $\operatorname{supp} F = \{0\}$, то

$$F = c \cdot \delta + \sum_{n=1}^{N} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n = 1}^{D} c_{\mu_1, \dots, \mu_n} \cdot \partial_{x_{\mu_1}} \cdots \partial_{x_{\mu_n}} \delta ,$$

$c, c_{\mu_1, \dots, \mu_n} \in \mathbb{R}$. Тоест, всяко разпределение с носител в нулата е крайна линейна комбинация на делта функцията и нейните производни.

<u>Проблемът за умножаване на разпределения.</u>

Макар и да можем да умножаване разпределение по гладка функция умножението само на разпределения не е определено в общия случай. Ще приведем един от основните примери за противоречията до които водят разглежданията на такива произведения.

За целта, ще въведем първо още един пример на разпределение:

$$\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) ,$$

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)[f] := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} dx \, \frac{1}{x} f(x) .$$

Без доказателство ще отбележим, че горната граница съществува за $\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (това обикновено се учи в курсовете по анализ) и е непрекъсната по f в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, така че наистина определя разпределение.

$$\left(x \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x}\right)[f] = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)[xf] = \int dx \; x \cdot \frac{1}{x} f(x) = 1[f]$$

т.е., $x \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$. Но тогава:

$$\Big(\underbrace{\delta(x) \cdot x}_{0}\Big) \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = 0 \neq \delta = \delta(x) \cdot \Big(\underbrace{x \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x}}_{1}\Big)$$

– противоречие с асоциативността.

До противоречия водят и изрази като $\delta(x)^2$, $\theta(x) \cdot \delta(x)$ и дори $\theta(x)^2$. Проблемът за умножение на разпределения е в сърцевината на проблема с разходимостите в квантовата теория на полето.

Преминаваме към следващата:

Операция 3) Субституция.

За $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^D)$ и $g : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^D$ - гладка и обратима е определена: $F(g(x)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^D)$ по формулата

$$\int d^D x \; F(g(x)) \, f(x) = \int d^D y \left| \frac{\partial g^{-1}}{\partial x}(y) \right| F(y) \, f(g^{-1}(y)),$$

т.е. имитираме смяна на променливите. Това в записа с линейни функционали се дава с равенството:

$$(F \circ g)[f] := F\left[\left| \frac{\partial g^{-1}}{\partial x} \right| \cdot (f \circ g^{-1}) \right],$$

$\left| \frac{\partial g^{-1}}{\partial x} \right|$ – якобианът на $x \mapsto g^{-1}(x)$.

За коректността на горното определение е необходимо да се провери, че ако $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^D)$ то и $f \circ g^{-1} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^D)$ (което е равносилно на това, че g е собствено изображение / proper map, т.е., че изобразява компактно множество в компактно); също така и непрекъснатостта $f_j \xrightarrow[\mathcal{D}]{} f \implies f_j \circ g^{-1} \xrightarrow[\mathcal{D}]{} f \circ g^{-1}$ (отбелязваме без доказателства).

Операция 4) Тензорно произведение на разпределения или още, произведение на разпределения зависещи от **независими аргументи**.

Нека $F_1(x_1) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{D_1})$ и $F_2(x_2) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{D_2})$, то

$$F_1(x_1)\, F_2(x_2) \equiv (F_1 \otimes F_2)(x_1, x_2)$$

се определя от равенството

$$\int d^{D_1}x_1\, d^{D_2}x_2 \quad F(x_1) F(x_2)\, f_1(x_1) f_2(x_2)$$
$$:= \left(\int d^{D_1}x_1 \; F_1(x_1) f_1(x_1)\right)\left(\int d^{D_2}x_2 \; F_2(x_2) f_2(x_2)\right),$$

т.е., теоремата на Фубини става дефиниция.

В тази операция се основаваме на една теорема от функционалния анализ:

Теорема. (без доказателство) Векторното пространство

$$\mathrm{Span}\left\{ f_1 \otimes f_2 \;\middle|\; f_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{D_1}) \text{ и } f_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{D_2}) \right\}$$
$$\cong \mathcal{D}(\mathbb{R}^{D_1}) \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{D_2}),$$

където $(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) := f_1(x_1) f_2(x_2)$ е гъсто в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{D_1} \times \mathbb{R}^{D_2})$, относно сходимостта в $\mathcal{D}$.

Забележка. Горната теорема е пример за топологично тензорно произведение: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{D_1}) \hat{\otimes} \mathcal{D}(\mathbb{R}^{D_2}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{D_1} \times \mathbb{R}^{D_2})$.

Една комбинация от предходните две операции ни дава:

$$F(x-y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D), \text{ за } \forall F(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^D).$$

Определяме го по формулите:

$$\int d^D x\, d^D y\ F(x-y)\, f(x,y) := \int d^D x\, d^D y\ F(x,y)\, f(x+y,y)$$

или още $F(x-y) := (F \otimes 1) \circ g$ за $g(x,y) = (x-y, y)$.

Обръщаме внимание, че тук не необходимо $\operatorname{supp} F$ да бъде компактен, както е в следващата

Операция 5) Ако $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^D)$, $\operatorname{supp} F$ е ограничено (и $\Rightarrow$ е компактно) и $h \in C^\infty(\mathbb{R}^D)$, то можем да определим

$$F[h] =: \int d^D x\ F(x)\, h(x) \quad \text{и в частност}$$

$$F[1] =: \int d^D x\ F(x),$$

като положим $F[h] := F[f]$ за такава $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^D)$, за която

$$h\big|_{\operatorname{supp} F} = f\big|_{\operatorname{supp} F}.$$

Еднозначност: ако $h\big|_{\operatorname{supp} F} = f_1\big|_{\operatorname{supp} F}$, то $F[h] = F[f] = F[f_1]$, понеже от $(f - f_1)\big|_{\operatorname{supp} F} = 0$ следва, че $F[f - f_1] = 0$.

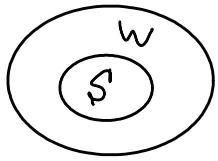
Съществуване: достатъчно е да се намери $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^D)$ такава, че $\chi\big|_{\mathrm{supp}\, F} = 1$ и да положим $f = \chi h$.

За съществуването на χ използваме следната:

<u>Теорема</u> (без доказателство)

Ако $S \subseteq \mathbb{R}^D$ е компактно, $W \subseteq \mathbb{R}^D$ е отворено, $S \subset W$, то $\exists\, \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^D)$, така че:

$\chi\big|_S = 1$, $\chi\big|_{\mathbb{R}^D \setminus W} = 0$.



Операция 6) Частично насищане / интегриране на разпределение.

Нека $F(x,y)$ е разпределение по x и y, т.е., $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D)$.

Тогава $\int d^D y\, F(x,y) f(y)$ е разпределение по x:

$$\int d^D x \left(\int d^D y\, F(x,y) f(y) \right) f_1(x) := \int d^D x\, d^D y\, F(x,y) f_1(x) f(y).$$

Операция 7) Конволюция на разпределения.

Ако $F_1(x_1) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^D)$ и $F_2(x_2) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^D)$, то

$$(F_1 \bullet F_2)(x) := \int d^D x_1\, F_1(x - x_1)\, F(x_1),$$ което

върху тест функции дава

$$\int d^D x \left(\int d^D x_1\, F_1(x - x_1)\, F_2(x_1) \right) f(x) = \int d^D x\, d^D y\, F_1(x)\, F_2(y)\, f(x+y).$$

Всъщност това е комбинация от няколко предходни операции:

$$(F_1 \bullet F_2)[f] = \big((F_1 \otimes F_2)\circ g\big)[f \otimes 1],$$

където $g : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D : (x, y) \mapsto (x-y, y)$. Така, забелязваме, че в дясната страна $f \otimes 1$ не е тест функция понеже $\operatorname{supp} 1 = \mathbb{R}^D$ не е компактен. Следователно трябва да използваме конструкцията от операция 5, за което ни е нужно $F_1 \otimes F_2$ да има компактен носител. Последното от своя страна се осигурява, ако поискаме **supp F_1 и supp F_2 да са компактни.**

Ако комбинираме конволюцията с операция "$x-y$", то ще получим:

$$(F_1 \bullet F_2)(x-z) = \int d^D y \; F_1(x-y)\, F_2(y-z) \text{ или още,}$$

$$\int d^D x\, d^D z \left(\int d^D y \; F_1(x-y)\, F_2(y-z)\right) f(x,z)$$

$$= \int d^D x\, d^D y \; F_1(x)\, F_2(y) \int d^D z \; f(x+y+z, z).$$

Забележки: 1) $\operatorname{supp}(F_1 \otimes F_2) = (\operatorname{supp} F_1) \times (\operatorname{supp} F_2)$.

2) Обикновено конволюцията се означава като $F_1 * F_2$ или $F_1 \circ F_2$, но тук сме избрали по-рядкото и по-неутрално означение $F_1 \bullet F_2$.

С това изчерпваме нашия обзор по операции над обобщени функции. Основната идея, която "пропагандираме" тук е, че можем да използваме символичния интегрален запис $F[f] =: \int d^D x \; F(x)\, f(x)$ и да работим с правилата на интегралното смятане, които в случая на разпределения се превръщат в дефиниции на операции над разпределения.

Примери: 1) Тензорно произведение

$$\delta(x,y,z) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

По общо, ако $\delta_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ е делта-функцията над $\mathbb{R}^n$, то

$$\delta_n \otimes \delta_m = \delta_{n+m}.$$

2) Пример на субституция: $x \mapsto \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^D$:

$$\delta(\lambda x) = \lambda^{-D}\,\delta(x).$$

Проверка: $\int d^D x\ \delta(\lambda x) f(x) = \int d^D x\ \lambda^{-D}\,\delta(x)\, f(\lambda^{-1} x)$

$= \lambda^{-D} f(0) = \lambda^{-D}\,\delta[f].$

3) $\int d^D y\ \delta(x-y) f(y) = f(x)$

– това е комбинация от операция 6 и субституция "$x-y$":

$$\int d^D x\, d^D y\ \delta(x-y) f(y) f_1(x) = \int d^D x\ \delta(x) \int d^D y\ f(y) f_1(x+y)$$

$$= \int d^D y\ f(y) f_1(y) = f[f_1]$$

4) $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$ е компактен така, че става за пример с конволюция:

$$\int d^D y\ \delta(x-y) F(y) = F(x).$$

Както в предходния пример:

$$\int d^D x \left(\int d^D y\ \delta(x-y) F(y) \right) f(x+y) = \int d^D x\, d^D y\ \delta(x)\, F(y)\, f(x+y)$$

$$= \int d^D y\ F(y) f(y) = F[f].$$

От тук още: $\int d^D y \; \delta(x-y) F(y-z) = F(x-z)$.

От тези примери виждаме, че $\delta(x-y)$ обобщава символа на Кронекер $\delta_{j,k}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k} f_k = f_j$$

5) Нека $F(x,y) = h(x)\,\delta(x-y) - \sum_{\mu=1}^{D} h_\mu(x)\,\partial_{x_\mu}\delta(x-y)$

тогава имаме:

$$\int dy \; F(x,y) f(y) = h(x) f(x) + \sum_{\mu=1}^{D} h_\mu(x)\,\partial_{x_\mu} f(x),$$

т.е., частичното насищане на $F(x,y)$ с тест-функция f е равносилно на прилагане на линеен частен диференциален оператор върху f.

3. Формално вариационно смятане

Идеята е да обобщим формули и правила от диференциалното смятане с краен брой променливи като:

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \delta_{j,k} \, ,$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\Big(F_k\big(G(q)\big)\Big) = \sum_{\ell} \frac{\partial F_k}{\partial q_\ell}\big(G(q)\big)\,\frac{\partial G_\ell}{\partial q_j}(q) \, ,$$

във формули за вариационни производни на функционали като:

$$\frac{\delta \varphi_A(x)}{\delta \varphi_B(y)} = \delta_{A,B}\,\delta(x-y) \, ,$$

$$\frac{\delta}{\delta \varphi_B(y)}\, h\big(\varphi(x)\big) = \sum_{A} \frac{\partial h}{\partial u}\big(\varphi(x)\big)\,\frac{\delta \varphi_A(x)}{\delta \varphi_B(y)} \, ,$$

$$\frac{\delta}{\delta \varphi_B(y)}\Big(F_A\big\{G\{\varphi(x)\}\big\}\Big)$$

$$= \sum_{E}\int dz\,\frac{\delta F_A}{\delta \varphi_E(z)}\big\{G\{\varphi(x)\}\big\}\,\frac{\delta G_E(z)}{\delta \varphi_B(y)}\{\varphi(x)\} \, ,$$

където $h(u)$, $u=(u_A)$ е гладка функция, а

$$F(\varphi) = \big(F_A\{\varphi(x)\}\big) \, , \quad G(z) = \big(G_A(z)\{\varphi(x)\}\big)$$

са функционали (от различен тип).

а) Обосноваване

Нека $\mathcal{F}(x)(\varphi) := \varphi(x)$ - това е така наречения "остойностяващ" функционал (evaluation functional). Всъщност, това е фамилия от функционали, параметризирана с точките $x \in \mathbb{R}^D$. За простота, нека $\varphi(x)$ има само една компонента (няма да има индекс A). Тогава,

$$d\mathcal{F}(x)(\varphi)[f] = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathcal{F}(x)(\varphi + \varepsilon f)$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} (\varphi(x) + \varepsilon f(x)) = f(x)$$

$$= \int d^D y \; \delta(x-y) f(y) \;, \quad \text{т.е.,}$$

$$\frac{\delta \mathcal{F}(x)}{\delta \varphi(y)}(\varphi) = \delta(x-y)$$

От друга страна, функционалът $\mathcal{F}(x)$ е аналог на координатните функции $\xi_j(q) = q_j$ върху $\mathbb{R}^n (\ni q = (q_j))$, където горното равенство има аналога:

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial q_k}(q) \equiv \frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \delta_{j,k} \, .$$

Ето защо, ако означим $\mathcal{F}(x) = \varphi(x)$, разглеждайки $\varphi(x)$ като координатен функционал, получаваме:

$$\frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(y)} = \delta(x-y) \, .$$

Нека въведем още функционалите $G_\mu(x)$:

$$G_\mu(x)(\varphi) = \partial_{x_\mu} \varphi(x) \, .$$

С аналогично пресмятане получаваме:

$$dG_\mu(x)(\varphi)[f] = \partial_{x_\mu} f(x). \Rightarrow \frac{\delta G_\mu(x)}{\delta\varphi(y)}(\varphi) = \partial_{x_\mu}\delta(x-y).$$

Тъй като $G_\mu(x) = \partial_{x_\mu}\mathcal{F}(x)$ - производна по параметъра x, то можем да запишем $G_\mu(x) = \partial_{x_\mu}\varphi(x)$ и от тук:

$$\frac{\delta\, \partial_{x_\mu}\varphi(x)}{\delta\varphi(y)} = \partial_{x_\mu}\delta(x-y) = \partial_{x_\mu}\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)}.$$

По такъв начин могат да се обосноват и останалите формули от стр. 20, но ние няма да го правим тук, а ще ги следваме като формални континуални аналози на формули от обичайния анализ.

б) Извод на оператора на Лагранж-Ойлер с правилата на формалното вариационно смятане.

Това ще направим за илюстрация.

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\int d^D y\, L\left(\varphi(y),(\partial_{x_\mu}\varphi),y\right) = \int d^D y\, \frac{\delta L\left(\varphi(y),(\partial_{x_\mu}\varphi),y\right)}{\delta\varphi(x)}$$

$$= \int d^D y\left(\frac{\partial L}{\partial u}(y)\,\frac{\delta\varphi(y)}{\delta\varphi(x)} + \frac{\partial L}{\partial u_\mu}(y)\,\frac{\delta\,\partial_{x_\mu}\varphi(y)}{\delta\varphi(x)}\right)$$

$$= \int d^D y\left(\frac{\partial L}{\partial u}(y)\,\delta(x-y) + \frac{\partial L}{\partial u_\mu}\,\partial_{y^\mu}\delta(x-y)\right)$$

$$= \int d^D y\left(\frac{\partial L}{\partial u} - \mathcal{D}_{y^\mu}\frac{\partial L}{\partial u_\mu}\right)\delta(x-y) = \mathcal{E}(L)(x),$$

където $L(y) := L\left(\varphi(y),(\partial_{y_\mu}\varphi(y)),y\right)$.