

N. N.

Квантова теория на полето и елементарните частици: Лекция 8

28.11.13

Николай М. Николов

-1-

С червено са отбелязани части от лекцията, в които е имало пропуски или са приведени допълнителни сведения.

От тази лекция ще започнем да излагаме релативистичната квантова механика и релативистичната квантова теория на полето. Това е съчетание между принципите на специалната теория на относителността и принципите на квантовата физика. За целта, в тази лекция ще изложим основните принципи на специалната теория на относителността. Един от централните принципи е, че едновременността престава да има абсолютен характер, което води до нов вид относителност - тази на времето. Поради това ние ще изложим в началото една много обща теоретична схема в теория на полето, която позволява обобщения изключващи абсолютната едновременност.

1. За ролята на времето

Както в класическата, така и в квантовата механика времето играе особена роля. То е параметър на еволюцията. Математически, с всеки момент от време $t \in \mathbb{R}$, ние асоциираме в класическата механика едно множество от състояния на описваната система, като всяко състояние отговаря на пълната информация за системата в момента t , която би ни позволила да предскажем поведението ѝ във всеки друг момент. Такъв набор от данни (информация) за системата се нарича също (набор от) **начални условия** за системата. Множеството от състояния (набори от начални условия) за системата в момента t се нарича **фазово пространство** на системата (в момента t) и нека го означим с \mathcal{O}_t . Така, еволюцията на системата се описва от система от изображения

$$F_{t_2, t_1} : \mathcal{O}_{t_1} \rightarrow \mathcal{O}_{t_2},$$

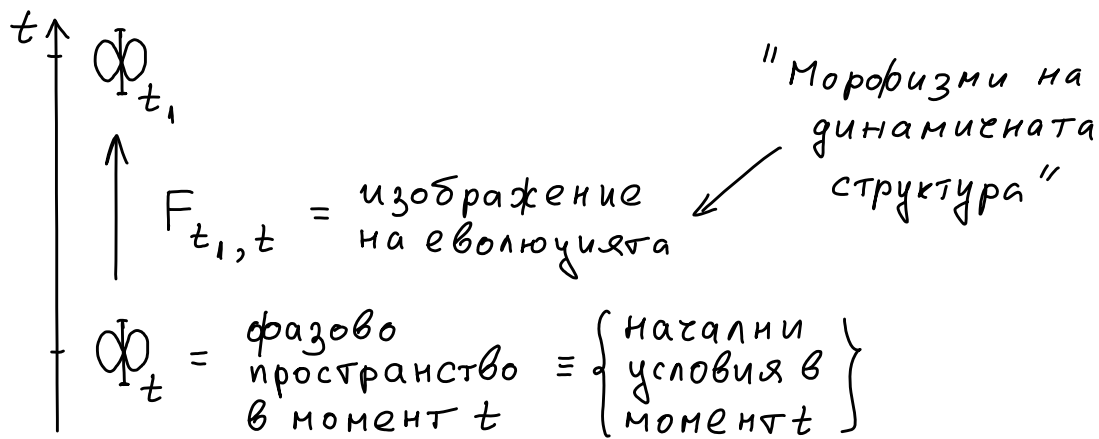
така, че ако $\varphi_1 \in \mathcal{O}_{t_1}$ е състоянието на системата в момента t_1 , то в момента t_2 системата е преминала в състояние

$$\xi_2 = F_{t_2, t_1}(\xi_1) \in \mathcal{O}_{t_2}.$$

В сила са и законите за композиция

$$F_{t_1, t_2} \circ F_{t_2, t_3} = F_{t_1, t_3}, \quad F_{t, t} = id.$$

От класическата Хамилтонова механика е известно, че фазовите пространства имат определена "динамична структура" и, че изображенията на еволюция F_{t_1, t_2} са морфизми на (т.е., съгласувани са с) тези структури.



При прехода към квантова механика горните понятия се превеждат първо от геометричен към алгебричен език. В основата на този преход е характеризирането на едно пространство X с алгебрата от функции $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ над това пространство. Типът на пространството определя и типа от функции, които се разглеждат:

- топологични пространства - непрекъснати функции;
- гладки многообразия - гладки функции;
- алгебрични многообразия - алгебрични функции.

В случая на Хамилтонова динамика имаме следните съответствия:

Геометричен обект	↔	Алгебричен обект
ϕ_t	↔	$\mathcal{A}_t = \left\{ \begin{array}{l} \text{Функции} \\ \text{над } \phi_t \end{array} \right\} = C^\infty(\phi_t)$
"структура на динамика"	↔	Поасонова алгебра $(\mathcal{A}_t, \cdot, \{-, -\})$ <small>скобка на Поасон произведение</small>
F_{t_1, t_2}	↔	$\alpha_{t_1, t_2}(f) = f \circ F_{t_1, t_2}^{-1}$ - морфизми на Поасоновы алгебри.

Ще отбележим също как най-общо се третират симетриите в горната абстрактна схема.

Най-напред ще въведем понятието динамично решение. Това е такава функция

$$\xi(t), t \in \mathbb{R}, \text{ за която } \xi(t) \in \mathcal{D}_t \quad (\forall t),$$

$$F_{t_1, t_2}(\xi(t_2)) = \xi(t_1) \quad (\forall t_1, t_2).$$

Нека

$$\mathcal{D} := \left\{ (\xi(t))_{t \in \mathbb{R}} \mid \xi(t) \text{ е динамично решение} \right\}.$$

Тъй като точките $\xi \in \mathcal{D}_{t_0}$ определят еднозначно еволюция, т.е., динамично решение $\xi(t)$ с начално условие $\xi(t_0) = \xi$ за $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ (по предположение), то полугаваме система от изоморфизми

$$\mathcal{D} \cong \mathcal{D}_t : \text{функцията } \xi \mapsto \text{стойността } \xi(t).$$

По такъв начин множеството \mathcal{D} се явява инвариантно описание на фазовото пространство, не ангажирано с конкретен момент от време. От друга страна, ако отъждествим по горния начин всички фазови пространства, то динамиката ще излезне (замрзне):

$$\text{за } F_{t_1, t_2} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}, \quad F_{t_1, t_2} = id.$$

Това, което обаче остава нетривиално е възможността за симетрии в следния смисъл.

Нека $U: \Phi \rightarrow \Phi$ е трансформация на динамично решение в динамично решение: $(\xi(t))_{t \in \mathbb{R}} \mapsto ((U\xi)(t))_{t \in \mathbb{R}}$. Това индуцира трансформации за $\forall t$:

$$\tilde{U}_t: \Phi_t \rightarrow \Phi_t: \xi(t) \mapsto (U\xi)(t),$$

а на алгебричен език

$$\hat{U}_t: \mathcal{A}_t \rightarrow \mathcal{A}_t: f \mapsto f \circ \tilde{U}_t^{-1}.$$

Тази трансформация U се нарича динамична симетрия, когато индуцираните трансформации \tilde{U}_t и \hat{U}_t са морфизми от съответните типове. Теоремата на Нютон е основен източник на динамични симетрии, но в конкретни модели такива симетрии могат да се проверяват експлицитно.

Например, при **автономните** динамични системи имаме едно начално, нединамично отъждествяване

$$\Phi_t \equiv \Phi_0 \quad \forall t$$

при което $\forall \tau \in \mathbb{R}$ и \forall динамично решение $(\xi(t))_{t \in \mathbb{R}}$ имаме, че $(\xi(t+\tau))_{t \in \mathbb{R}}$ е също решение. В този случай, индуцираната трансформация

$$\tilde{U}_\tau: \Phi_t \rightarrow \Phi_t$$

съвпада просто с еволюционното изображение $\tilde{U}_\tau = F_{t, t+\tau}$.

В теория на полето:

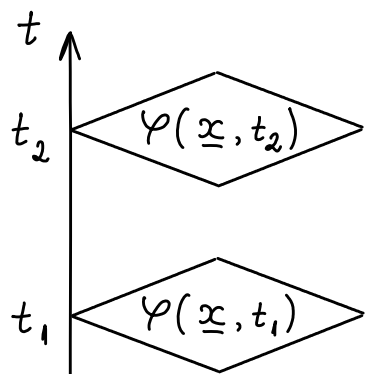
$$\Phi_t = C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^M).$$

Един елемент $\varphi \in \Phi_t$ е гладка функция $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^M$, която задава поведението в три мерното пространство \mathbb{R}^3 на всички необходими полета в даден момент от време t , така че еволюцията да бъде еднозначно определена. Например за електромагнитното поле, $M = 6$: във всеки един момент от време трябва да зададем 6 реални функции E_1, E_2, E_3 и $B_1, B_2, B_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ($E = (E_1, E_2, E_3)$ е векторът на интензитета на електричното поле в дадена точка, а $B = (B_1, B_2, B_3)$ е нарича вектор на магнитната индукция); при зададени $(E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ еволюцията е определена еднозначно.

В този случай едно динамично решение е функция

$$\varphi(\underline{x}, t), \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M,$$

където сме означили с $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ три мерен вектор.



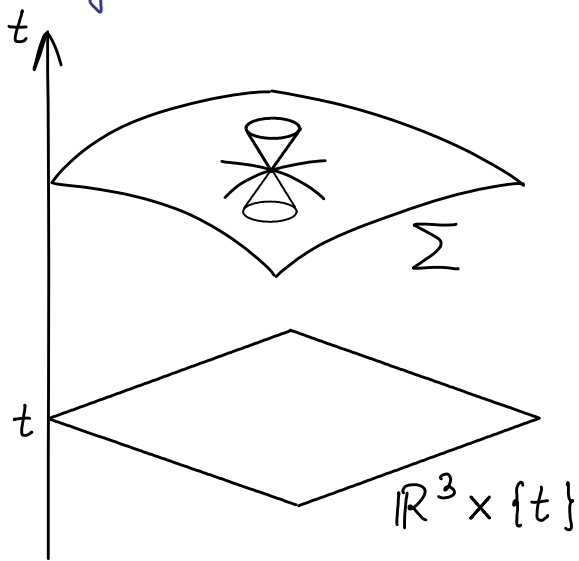
$$\underline{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \xi(t) = \varphi(\underline{x}, t)$$

Както виждаме тук фазовото пространство е безкрайно мерно векторно пространство, което създава известни затруднения при алгебричното описание. Най-общо полагаме:

$\mathcal{Q}_t =$ Някакъв клас функции над Φ_t (например полиномиални).

При един важен клас от полеве задачи еволюцията на полетата се характеризира от така наречените хиперболични частни диференциални уравнения. При тях се оказва, че началните условия могат да се задават не само върху хиперповърхности от вида $\mathbb{R}^3 \times \{t\} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, но и върху

много по-широк клас хиперповърхности $\Sigma \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ (т.е., в случая 3 мерни подмногообразия), които се наричат повърхности на Коши (Cauchy surfaces). В частност, повърхности на Коши са



пространствено подобни, т.е., са трансферзални във всяка своя точка на характеристикните конуси на хиперболичната система от частни диференциални уравнения. Ние ще се върнем отново към тези понятия по-нататък в тази лекция. Това което е важно за нас в случая е, че именно това разширяване

на възможта за задаване на началните условия е математически феномен, който стои в основата на физическата интерпретация, че едновременността престава да бъде абсолютна. Всяка хиперповърхност Σ , която е допустима за задаване на начални полеве условия може да се интерпретира като множество на "едновременност".

И така, при хиперболичните полеве системи, за които сега споменахме можем да въведем по-широк клас фазови пространства

$$\Phi_{\Sigma} = C^{\infty}(\Sigma, \mathbb{R}^M),$$

където $\Sigma \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ е повърхност на Коши, т.е., е хиперповърхност допустима за задаване на начални условия.

От алгебрична гледна точка имаме :

$\mathcal{A}_\Sigma =$ Някакъв клас функции над \mathcal{D}_Σ (например полиномиални), което е Пуасонова алгебра. Така Σ става обобщение на "момент от време t " при хиперболичните полски системи.

Изображението на еволюция става :

началното условие φ_{Σ_1} индуцира динамично решение

$$\mathcal{D}_{\Sigma_1} \ni \varphi_{\Sigma_1} : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}^M \quad \mapsto \quad \varphi(\underline{x}, t)$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{D}_{\Sigma_2} \ni$$

$$\varphi_{\Sigma_2} := \varphi(\underline{x}, t) \Big|_{(\underline{x}, t) \in \Sigma_2}$$

рестриктираме
решението върху Σ_2

с това се индуцира изображение :

$$F_{\Sigma_2, \Sigma_1} : \mathcal{D}_{\Sigma_1} \longrightarrow \mathcal{D}_{\Sigma_2}$$

което обобщава $F_{t_2, t_1} : \mathcal{D}_{t_1} \rightarrow \mathcal{D}_{t_2}$, а също и алгебричния му еквивалент :

$$\alpha_{\Sigma_2, \Sigma_1} : \mathcal{A}_{\Sigma_1} \longrightarrow \mathcal{A}_{\Sigma_2}$$

По същия начин става и със симетриите : ако

$$U : \{ \varphi(\underline{x}, t) - \text{динамично решение} \} \rightarrow \{ \varphi(\underline{x}, t) - \text{динамично решение} \}$$

то имаме :

началното условие φ_Σ индуцира динамично решение

$$\mathcal{D}_\Sigma \ni \varphi_\Sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^M \quad \mapsto \quad \varphi(\underline{x}, t)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\mathcal{D}_\Sigma \ni (\mathcal{U}\varphi)(\underline{x}, t) \Big|_{(\underline{x}, t) \in \Sigma}$$

рестриктираме трансформираното решение отново върху Σ

което индуцира трансформация

$$\tilde{\mathcal{U}} : \mathcal{D}_\Sigma \longrightarrow \mathcal{D}_\Sigma$$

и оттам $\alpha_\Sigma : \mathcal{A}_\Sigma \longrightarrow \mathcal{A}_\Sigma : f \mapsto f \circ \tilde{\mathcal{U}}^{-1}$.

Пример за такива трансформации \mathcal{U} са Лоренцовите преобразувания на полета, които най-общо имат вида :

$$(\mathcal{U}_\Lambda \varphi)(\underline{x}, t) = \pi(\Lambda) \cdot \varphi(\Lambda^{-1}(\underline{x}, t))$$

където $\Lambda : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ е линейна биекция, а $\pi(\Lambda)$ е $M \times M$ матрица (зависеща от Λ), която действа върху полевите стойности.

Изложената по-горе схема (при $\Sigma_t = \mathbb{R}^3 \times \{t\}$) носи името **3+1 формализъм**.

2. Специална теория на относителността

2.1. Конвенции

- Декартовото произведение $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ на три мерното пространство \mathbb{R}^3 с времевата ос \mathbb{R} наричаме **пространство-време**. Точките (\underline{x}, t) на пространство-времето ($\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ и $t \in \mathbb{R}$) се наричат **събития**. Удобно е да се обърне редът на декартовите множители и времето да се запише като нулева координата на събитие

$$x^0 = ct, \quad \underline{x} = (x^1, x^2, x^3),$$

където c е **скоростта на светлината**. Така събитията се параметризират с 4 координати

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^\mu) \equiv (x^0, \underline{x}), \quad \underline{x} = (x^k),$$

където компонентите са индексирани с горни индекси, които обикновено се означават с гръцки букви, α, β, μ, ν и т.н., когато пробягват четирите стойности 0, 1, 2, 3 и се означават с латински букви, j, k, ℓ и т.н., когато пробягват трите пространствени стойности 1, 2, 3.

- В пространство-времето $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \{(x^0, \underline{x}) \mid x^0 \in \mathbb{R}, \underline{x} \in \mathbb{R}^3\}$ се въвежда структура на **псевдо-Евклидово пространство**.

В общия случай, едно псевдо-Евклидово пространство се задава (с точност до изоморфизъм) като векторно пространство \mathbb{R}^{p+q} снабдено със симетричното билинейно скалярно произведение

$$x \cdot y = x^1 \cdot y^1 + \dots + x^p y^p - x^{p+1} y^{p+1} - \dots - x^{p+q} y^{p+q}$$

$$= (x^1, \dots, x^{p+q}) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}}_{(\eta_{\mu\nu}) \equiv (\eta_{\mu, \nu})} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^{p+q} \end{pmatrix}.$$

ще използваме запетайки като тази

N.N. 28.11.13 - 11 -

Симетричната матрица $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$, задаваща скаларното произведение, е диагонална с p стойности $+1$ и q стойности -1 , поради което описаното псевдо-Евклидово пространство се бележи с $\mathbb{R}^{p,q}$.

Ние ще приемем $\mathbb{R}^{3,1}$ за псевдо-Евклидов модел на пространство-времето:

$$x \cdot y = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \equiv -x^0 y^0 + \underline{x} \cdot \underline{y}$$

макар, че физически еквивалентно описание може да се зададе и с $\mathbb{R}^{1,3}$.

- Пространство-времето снабдено с псевдо-Евклидова структура се нарича още пространство на Минковски / Minkowski space.

- От този момент нататък в настоящия курс ще следваме конвенцията на Айнщайн (Einstein summation rule): сумира се по повтарящи се горни и долни индекси. Например скаларното произведение:

$$x \cdot y = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \equiv \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu,$$

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \eta_{jk} x^j y^k \equiv \eta_{jk} x^j y^k.$$

Това правило се преплита с конвенцията за гръцки и латински индекси: при повтарящи се гръцки - сумирането е от 0 до 3, а при повтарящи се латински - сумирането е от 1 до 3.

- До тук използваните координати с горни индекси (x^μ) се наричат контравариантни координати. Въвеждат се и координати с долни индекси (x_μ) наречени ковариантни координати. Връзката между тях е:

$$x_\mu := \eta_{\mu\nu} x^\nu.$$

Следователно, при метрика $(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$x_0 = -x^0, \quad x_1 = x^1, \quad x_2 = x^2, \quad x_3 = x^3.$$

Също така : $x \cdot y = x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu$.

- Нека въведем стандартния базис e_0, e_1, e_2, e_3 в $\mathbb{R}^{3,1}$.

$$x = x^\mu e_\mu$$

Тъй като : $x \cdot y = (x^\mu e_\mu) \cdot (y^\nu e_\nu) = x^\mu y^\nu e_\mu \cdot e_\nu$

$$\Rightarrow e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\mu\nu}.$$

$$\Rightarrow e_\mu \cdot x = e_\mu \cdot (x^\nu e_\nu) = x^\nu \eta_{\nu\mu} = x_\mu,$$

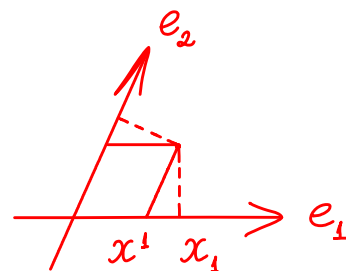
$$\text{т.е.}, \quad x_\mu = e_\mu \cdot x$$

Базис e'_0, e'_1, e'_2, e'_3 на $\mathbb{R}^{3,1}$ в който

$$e'_\mu \cdot e'_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad (\text{и} \quad (\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1))$$

се нарича псевдо-ортонормиран базис.

Горните формули в този пункт важат при всякаква матрица $\eta_{\mu\nu}$ на метриката. В частност, в неортонормиран базис геометрическият смисъл на двата вида координати е :



N.N. 28.11.13 -13-

• В друг базис, $e'_\mu = A_\mu^\nu e_\nu$,

$$\eta'_{\mu\nu} = e'_\mu \cdot e'_\nu = A_\mu^\rho A_\nu^\sigma e_\rho \cdot e_\sigma = A_\mu^\rho A_\nu^\sigma \eta_{\rho\sigma}.$$

$\Rightarrow \eta'_{\mu\nu} = A_\mu^\rho A_\nu^\sigma \eta_{\rho\sigma}$ - трансформационен закон на матрицата на метриката.

Нека въведем обратната матрица

$$B_\mu^\nu A_\nu^\rho = \delta_\mu^\rho, \quad B_\nu^\rho A_\mu^\nu = \delta_\mu^\rho.$$

$\Rightarrow e_\mu = B_\mu^\nu e'_\nu$. Трансформация на координатите:

$$x'^\nu e'_\nu = x = x^\mu e_\mu = x^\mu B_\mu^\nu e'_\nu \Rightarrow x'^\mu = B_\mu^\nu x^\nu.$$

Тоест, обикновените (контравариантните) координати се трансформират с обратната матрица и затова и са наречени контравариантни. А за ковариантните координати:

$$x'_\mu = \eta'_{\mu\nu} x'^\nu = \eta_{\rho\sigma} A_\mu^\rho A_\nu^\sigma B_\nu^\alpha x^\alpha = A_\mu^\rho \eta_{\rho\sigma} x^\sigma$$

$$= A_\mu^\rho x_\rho \Rightarrow x'_\mu = A_\mu^\nu x_\nu.$$

• До тук въведохме "свалъне на горни индекси" с метриката $\eta_{\mu\nu}$. Обратният процес се извършва с обратната матрица $\eta^{\mu\nu}$:

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu, \quad x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu.$$

При смяна на базиса, $e'_\mu = A_\mu^\nu e_\nu$, $B_\mu^\nu A_\nu^\rho = \delta_\mu^\rho$:

$$\eta'^{\mu\nu} = B_\rho^\mu B_\sigma^\nu \eta^{\rho\sigma}, \quad \eta'^{\mu\nu} \eta'_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu, \quad x'^\mu = \eta'^{\mu\nu} x'_\nu.$$

- Псевдо-ортогонални матрици: $e'_\mu = \Lambda_\mu^\nu e_\nu$ такава, че $\eta'_{\mu\nu} = e'_\mu \cdot e'_\nu = \eta_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu$.

$$\Rightarrow \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma \eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Rightarrow \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma \eta_{\rho\sigma} \eta^{\mu\alpha} = \delta_\nu^\alpha$$

$$\Rightarrow (\Lambda^{-1})^\alpha_\beta = \eta^{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \Lambda_\mu^\nu$$

- Полагаме: $x^2 := x \cdot x = x_\mu x^\mu$. Да не се бърка с втората компонента на x !

- Какваме, че x е псевдо-ортогонален вектор на $y \iff x \cdot y = 0$.

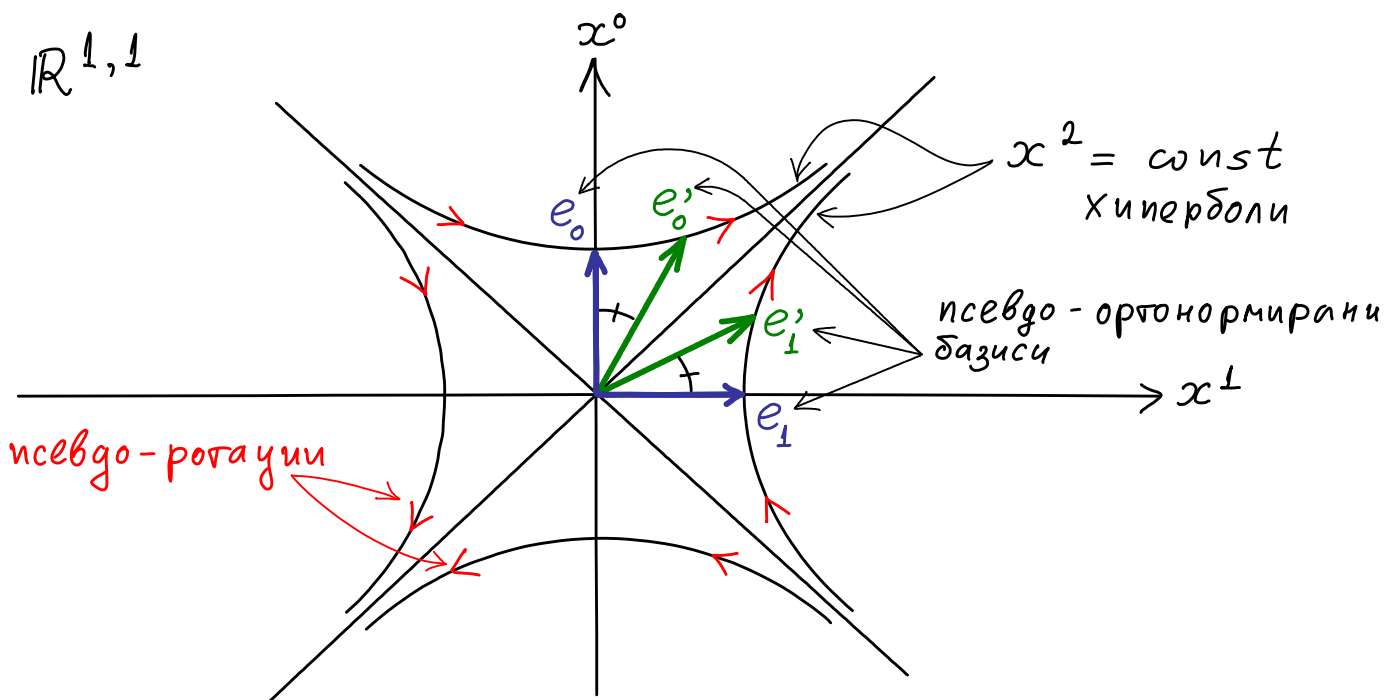
- Казваме, че x е изотропен вектор $\iff x^2 (\equiv x \cdot x) = 0$.

x е времеподобен (time-like) вектор $\iff x^2 (\equiv x \cdot x) \leq 0$.

x е пространствено-подобен (space-like) вектор $\iff x^2 > 0$.

В частност, изотропните вектори са времеподобни.

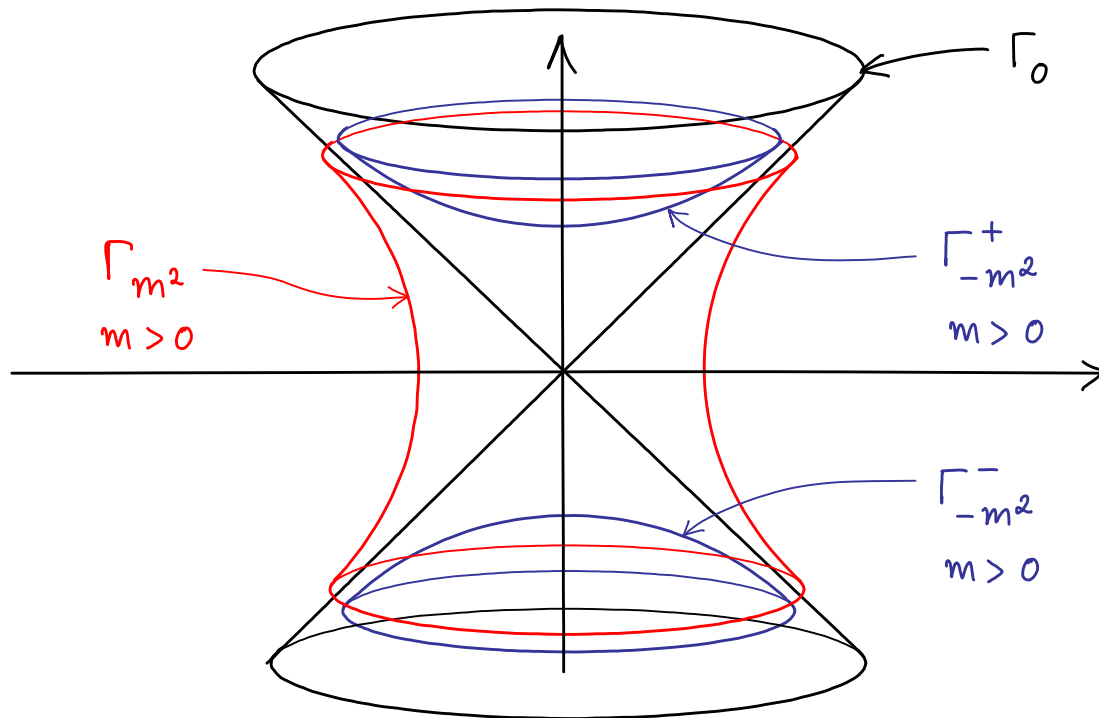
- Пространство-времеви диаграми - удобно онагледяване:



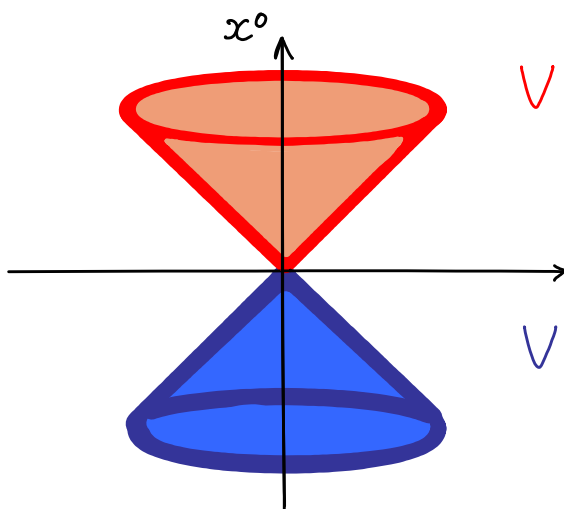
• $\Gamma_a := \{x \in \mathbb{R}^{3,1} \mid x^2 (\equiv x \cdot x) = a\}$, $a \in \mathbb{R}$. Удобно е да се записва като $\Gamma_{\pm m^2}$ за $m \geq 0$.

- при $a = 0$: Γ_0 е конус наречен светлинен конус. По определение Γ_0 се състои от изотропни и само от изотропни вектори.
- при $a > 0$: Γ_a е свързан хиперболоид.
- при $a < 0$: Γ_a е несвързан хиперболоид с две свързани компоненти,

$$\Gamma_a = \Gamma_a^+ \dot{\cup} \Gamma_a^-$$



• Конус на бъдещето / миналото (forward / backward cone).



$$V^+ := \{x \in \mathbb{R}^{3,1} \mid x^2 \leq 0, x^0 \geq 0\}$$

$$V^- := \{x \in \mathbb{R}^{3,1} \mid x^2 \leq 0, x^0 \leq 0\}$$

2.2. Причинна структура

Причинната структура върху пространството на Миковски $\mathbb{R}^{3,1}$ се въвежда от следна релация наречена *причинна наредба*:

$$x \leq y \iff y - x \in V^+.$$

Това е релация на *частична наредба*, т.е. изпълнява следните свойства, които са дефиниционни за релации на частични наредби:

(01) *рефлексивност*: $x \leq x$,

(02) *антисиметрия*: $x \leq y$ и $y \leq x \implies x = y$,

(03) *транзитивност*: $x \leq y$ и $y \leq z \implies x \leq z$,

за $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^{3,1}$.

Наистина:

(01) $\iff 0 \in V^+$ - изпълнено е.

(02) $\iff V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$ - изпълнено е.

(03) $\iff a \in V^+$ и $b \in V^+ \implies a+b \in V^+$ - изпълнено е.

Физическа интерпретация:

$$x \leq y$$



събитието x може да причини
следствия в събитието y .

Следствия.

• $x \leq y$ или $y \leq x \iff (x-y)^2 \leq 0$.

Такива събития се наричат *временоподобни (time-like separated)* или също, *причинно свързани*.

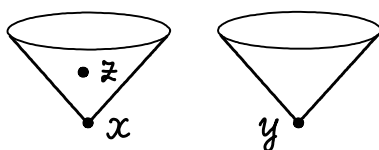
• не $x \leq y$ и не $y \leq x \iff (x-y)^2 > 0$.

Такива събития се наричат *пространствено подобни (space-like separated)* или също, *причинно несвързани*. Последното се означава с

$$x \sim y.$$

- Граничен случай между горните два: $(x - y)^2 = 0$. Такива събития са все още време подобни и не пространствено подобни. В този специален случай събитията x и y се наричат още **взаимно изотропни** или още **свето подобни (light-like)**.

Забележки. 1) Пространствено-подобие, $x \sim y$, не е релация на еквивалентност в $\mathbb{R}^{3,1}$. Например в ситуацията

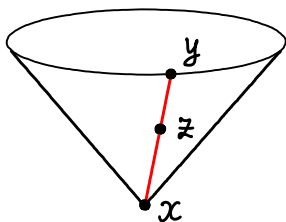


имаме, $x \sim y$ и $y \sim z$, но не $x \sim z$, тъй като $x \leq z$.

- 2) В сила е следното твърдение: ако $x \leq y$ и x и y са свето подобни, т.е. $(x - y)^2 = 0$, тогава множеството

$$[x, y] := \{z \in \mathbb{R}^{3,1} \mid x \leq z \leq y\}$$

(означението да не се възприема като комутатор, а като затворен "интервал") е **линейно наредено**, т.е., за $\forall z, w \in [x, y]$ имаме $z \leq w$ или $w \leq z$.

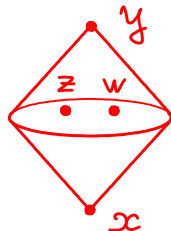


Както се вижда от картинката множеството $[x, y]$ е права линия лежеща върху границата на конуса на бъдещето с център в x , $x + V^+$, т.е. това е горната половина на светлинния конус с център в x , $x + \Gamma_0$. Физически, множеството $[x, y]$, при свето подобни x и y има смисъл на **най-бърз сигнал**.

3) В останалия случай на временноподобни $x \leq y$, но неслепоподобни события (т.е., $(x-y)^2 < 0$) множеството

$$[x, y] := \{z \in \mathbb{R}^{3,1} \mid x \leq z \leq y\}$$

не е линейно наредено: $\exists z, w \in [x, y]$, таква че $x \sim y$.



Такива множества се наричат двойни конуси (double cones или още diamonds).

2.3. метрична структура

(Метричен) интервал между событията x и $y := (x-y)^2$.

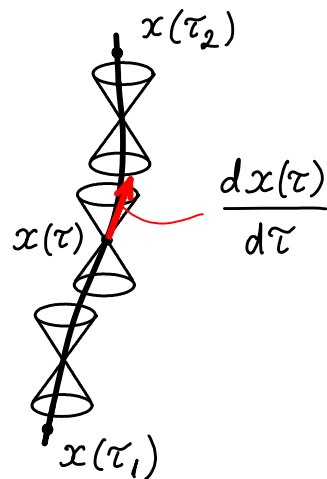
Една крива $x(\tau) \in \mathbb{R}^{3,1}$, $\tau \in \mathbb{R}$ се нарича временноподобна крива, ако

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} \in V^+ \quad \forall \tau$$

Въвеждаме дължина на временноподобна крива:

$$s := \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \underbrace{\sqrt{-\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^2}}_{\geq 0}.$$

понеже $\frac{dx(\tau)}{d\tau} \in V^+$.



Забележка. Времениподобна крива може да се определи нееквивалентно с по-слабото условие $\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^2 \leq 0$.

Ние поискахме по-горе допълнително $\frac{dx^0(\tau)}{d\tau} \geq 0$, което съответства на изискването, че кривата върви от миналото към бъдещето:

$$\tau_1 \leq \tau_2 \Rightarrow x(\tau_1) \leq x(\tau_2).$$

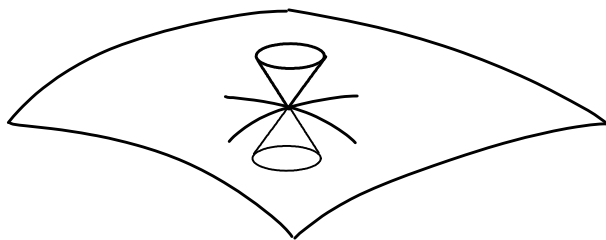
Пространствено подобна крива $x(\tau) \in \mathbb{R}^{3,1}$ е такава крива, за която

$$\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^2 > 0 \quad \forall \tau.$$

Дължина на пространствено подобна крива се определя аналогично:

$$s := \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{+\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^2}.$$

Пространствено подобна повърхност Σ е такава повърхност в $\mathbb{R}^{3,1}$, която пресича трансферзално всеки конус $x + V^+$ за $\forall x \in \Sigma$.



По-точно, искаме за \forall крива $(x(\tau))_{\tau} \subset \Sigma$

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^2 > 0.$$

Забележки: 1) Дължината на крива е репараметризационно инвариантна: ако $x'(\tau) := x(f(\tau))$, то

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\left| \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 \right|} = \int_{\tau'_1}^{\tau'_2} d\tau \sqrt{\left| \left(\frac{dx'(\tau)}{d\tau} \right)^2 \right|}$$

2) Очевидно, ако $z(\tau) = x + (y - x)\tau$, $\tau \in [0, 1]$ е (права) отсеска свързваща x и y , то

$$\sqrt{|(x - y)^2|} = \int_0^1 d\tau \sqrt{\left| \left(\frac{dz(\tau)}{d\tau} \right)^2 \right|}$$

3) За тези, които имат понятие от (псевдо) Риманова геометрия. Ако въведем локалната метрика

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (\equiv \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu),$$

то едно подмногообразие $\Sigma \subset \mathbb{R}^{3,1}$ се нарича неизродено, ако рестрикцията $ds^2|_\Sigma$ на локалната метрика върху него е неизродена. Тогава, ако Σ е свързано, то ще следва, че типът (сигнатурата) на $ds^2|_\Sigma$ ще бъде постоянен върху Σ , да речем (p', q') , където $p' \leq 3$ и $q' \leq 1$, $p' + q' = \dim \Sigma$. Така, при пространствено подобните подмногообразия $(p', q') = (p', 0)$.

4) За строго времеподобни криви, т.е., за такива времеподобни за които $\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 < 0$ може да се въведе така наречения естествен параметър на кривата:

$$s(\tau) = \int_0^\tau d\tau \sqrt{- \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2}.$$

Теорема. ("анти-неравенство на триъгълника")

За времеподобни интервали $x \leq y \leq z$ е в сила:

$$\sqrt{-(x-y)^2} + \sqrt{-(y-z)^2} \leq \sqrt{-(x-z)^2}$$

Инструкция: Достатъчно е да се докаже, че ако $a, b, c, d, e \geq 0$ са такива, че $a \geq b, c \geq d, b+d \geq e$, то:

$$\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{c^2 - d^2} \leq \sqrt{(a+c)^2 - e^2}$$

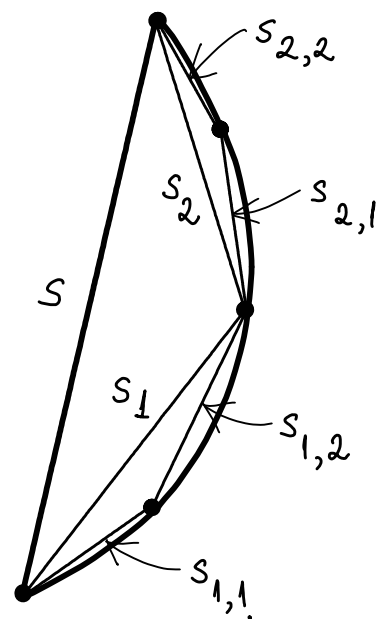
или дори само за този случай: $(b+d)^2$. \square

Следствие. Ако $x \leq y$, то измежду времеподобните криви свързващи x и y правата отсеска има **най-голяма дължина**.

Илюстрация:

$$S \geq \underbrace{S_1}_{\leq S_{1,1} + S_{1,2}} + \underbrace{S_2}_{\leq S_{2,1} + S_{2,2}}$$

\square



Забележка. 5) Правите линии в плоското псевдо Риманово многообразие $\mathbb{R}^{3,1}$ са **геодезични** в смисъл, че са екстремали на действието "дължина"

$$\int d\tau \sqrt{\left| \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 \right|}$$

Последното следствие ни показва, че за времеподобни прави това действие има максимум, а не минимум. Именно този функционал се приема за действие на свободна релативистична частица.

2.4. Мотивация: постоянство на скоростта на светлината

Основният източник на мотиви довели до специалната теория на относителността е класическата електродинамика и по-специално уравненията на Максвел (James Maxwell), които във вакуум се записват така:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{x^1} E_2 - \partial_{x^2} E_1 + c \partial_{x^0} B_3 = 0 \text{ и циклична смяна по } 1, 2, 3, \\ c \partial_{x^1} B_2 - c \partial_{x^2} B_1 - \partial_{x^0} E_3 = 0 \text{ и циклична смяна по } 1, 2, 3, \\ \partial_{x^1} E_1 + \partial_{x^2} E_2 + \partial_{x^3} E_3 = 0, \\ \partial_{x^1} B_1 + \partial_{x^2} B_2 + \partial_{x^3} B_3 = 0, \quad (x^0 = ct). \end{array} \right.$$

Това е система от линейни частни диференциални уравнения за шест функции $E_j(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $B_j(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $j = 1, 2, 3$, които се наричат съответно компоненти на интензитета на електричното поле и на магнитната индукция. Тези уравнения могат да се запишат и във векторен вид:

$$\text{rot}_{\underline{x}} \underline{E} + c \partial_{x^0} \underline{B} = 0, \quad \text{div}_{\underline{x}} \underline{E} = 0,$$

$$c \cdot \text{rot}_{\underline{x}} \underline{B} - \partial_{x^0} \underline{E} = 0, \quad \text{div}_{\underline{x}} \underline{B} = 0,$$

където $\underline{E} = (E_j)_{j=1}^3$, $\underline{B} = (B_j)_{j=1}^3$, а $\text{rot}_{\underline{x}}$ и $\text{div}_{\underline{x}}$ са обичайните операции на ротация и дивергенция спрямо променливите $\underline{x} = (x_j)_{j=1}^3$ от тримерното векторно диференциално сметане (в тукфдестранната литература ротацията rot се бележи също с curl).

Уравненията на Максвел в вакуум водят до така нареченото **вълново уравнение** за всяка една от полевите компоненти, като се вземе ротация от векторните уравнения:

$$0 = \text{rot}_{\underline{x}} (\text{rot}_{\underline{x}} \underline{E} + c \partial_{x^0} \underline{B}) = \text{grad}_{\underline{x}} \text{div}_{\underline{x}} \underline{E} - \Delta_{\underline{x}} \underline{E} + \partial_{x^0} c \cdot \underbrace{\text{rot}_{\underline{x}} \underline{B}}_{\partial_{x^0} \underline{E}}$$

$$= \left((\partial_{x^0})^2 - \Delta_{\underline{x}} \right) \underline{E} = - \square_x \underline{E},$$

където сме използвали тъждеството $\text{rot}_{\underline{x}} \text{rot}_{\underline{x}} = \text{grad}_{\underline{x}} \text{div}_{\underline{x}} - \Delta_{\underline{x}}$, в което $\text{grad}_{\underline{x}}$ е градиента и $\Delta_{\underline{x}}$ е оператора на Лаплас (Laplace):

$$\Delta_{\underline{x}} := \eta^{jk} \partial_{x^j} \partial_{x^k} = (\partial_{x^1})^2 + \dots + (\partial_{x^3})^2;$$

въвели сме също и аналога на оператора на Лаплас за пространството на Минковски, който се нарича оператор на Даламбер (D'Alembert) или също **вълнови оператор** (wave operator):

$$\square_x := \partial_x \cdot \partial_x \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_{x^\mu} \partial_{x^\nu} \equiv \partial_{x^\mu} \partial_{x^\mu} = -(\partial_{x^0})^2 + (\partial_{x^1})^2 + \dots + (\partial_{x^3})^2.$$

Аналогично се процедурира и с уравнението $c \cdot \text{rot}_{\underline{x}} \underline{B} - \partial_{x^0} \underline{E} = 0$, и така получаваме:

$$\square_x E_j = 0 \quad \text{и} \quad \square_x B_j = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3,$$

което именно е вълновото уравнение за всяка една полева компонента.

Вълновото уравнение $\square_x \varphi = 0$ има специален вид решения

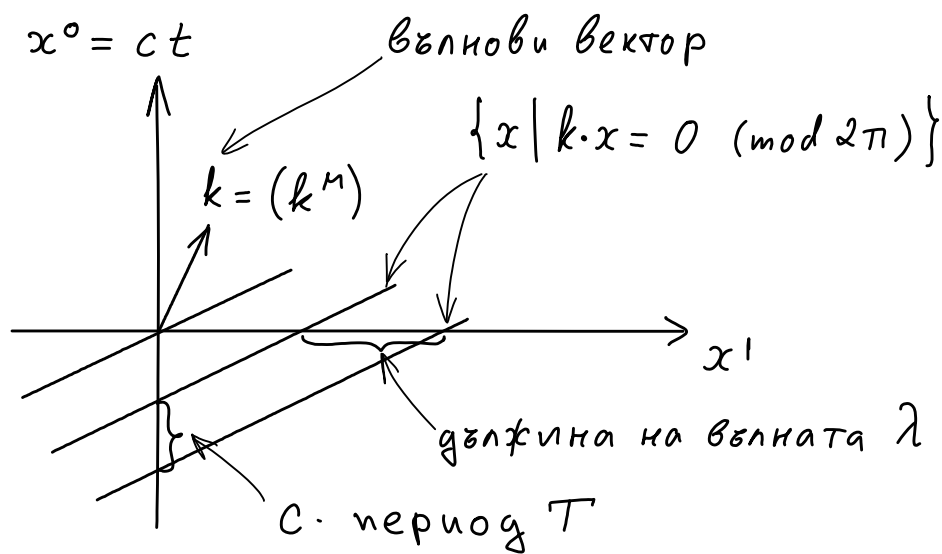
$$\varphi(x) = \operatorname{Re} C e^{i k \cdot x} = A \cos(k \cdot x + \theta)$$

където $C, A, \theta, k = (k_\mu)_{\mu=0}^4$ са константи, $A > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, $C = A e^{i\theta}$.

Този вид решения се наричат **плоски вълни (plane waves)**, а параметрите в него съответно: k се нарича **вълнов вектор**, C се нарича **(комплексна) амплитуда на вълната**.

Нека да изобразим на пространство-времева диаграма поведението на една плоска вълна, като начертаям хиперповърхностите отговарящи на $\varphi(x) = \varphi_0 = \text{const}$ за някакво фиксирано число φ_0 .

$$\varphi(x) = \varphi_0 := A \cos \alpha \iff k \cdot x = \alpha - \theta \pmod{2\pi}$$



Основните моменти, онагледени на горната фигура, са следните:

- хипер-повърхнините $\{x \in \mathbb{R}^{3,1} \mid k \cdot x = \text{const}\}$ са успоредни една на друга и в частност, са успоредни на хипер-повърхнината $\{x \in \mathbb{R}^{3,1} \mid k \cdot x = 0\}$, която минава през нулата и е псевдо-ортогоналната подпространство към вектора k .

N.N. 28.11.13 - 25-

- Хипер-повърхнините на постоянно ниво на $\varphi(x)$, които се задават от уравненията $k \cdot x = \text{const} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ са успоредни и еквилистантни.
- Сеченията на тези хипер-повърхнини на ниво с коя да е пространствена хипер-равнина $\{t\} \times \mathbb{R}^3$ е система от успоредни хипер-равнини в \mathbb{R}^3 , $\{k \cdot x = \text{const}' + 2n\pi\}$, всеки две съседни от които осояат на едно и също Евклидово разстояние

$$\lambda = \frac{2\pi}{|k|}, \quad |k| := \sqrt{(k_1)^2 + (k_2)^2 + (k_3)^2}.$$

Това разстояние λ е дължината на вълната.

- Сеченията на хипер-повърхнините на ниво с коя да е времева ос $\mathbb{R} \times \{a\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ е система от еквилистантни точки отстоящи една от друга на интервал

$$c \cdot T = \frac{2\pi}{|k_0|},$$

където T е периода на вълната.

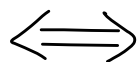
- Така, отношението

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{|k_0|}{|k|} \cdot c$$

е големината на скоростта на вълната.

В частност:

големината на скоростта на
вълната = скоростта на
светлината c



вълновият вектор k е
изотропер вектор, т.е.,
 $k^2 = 0$

От друга страна, вълновото уравнение ни дава:

$$\square_x \operatorname{Re} C e^{i k \cdot x} = 0 \iff k^2 = 0,$$

т.е. плоските вълни, които го описва се разпространяват със скоростта на светлината c .

Забележка. Обща плоска вълна разпространяваща се със скорост c големина φ се подчинява на уравнението:

$$\left(\frac{1}{c^2} (\partial_t)^2 - \Delta_{\underline{x}} \right) \varphi = 0.$$

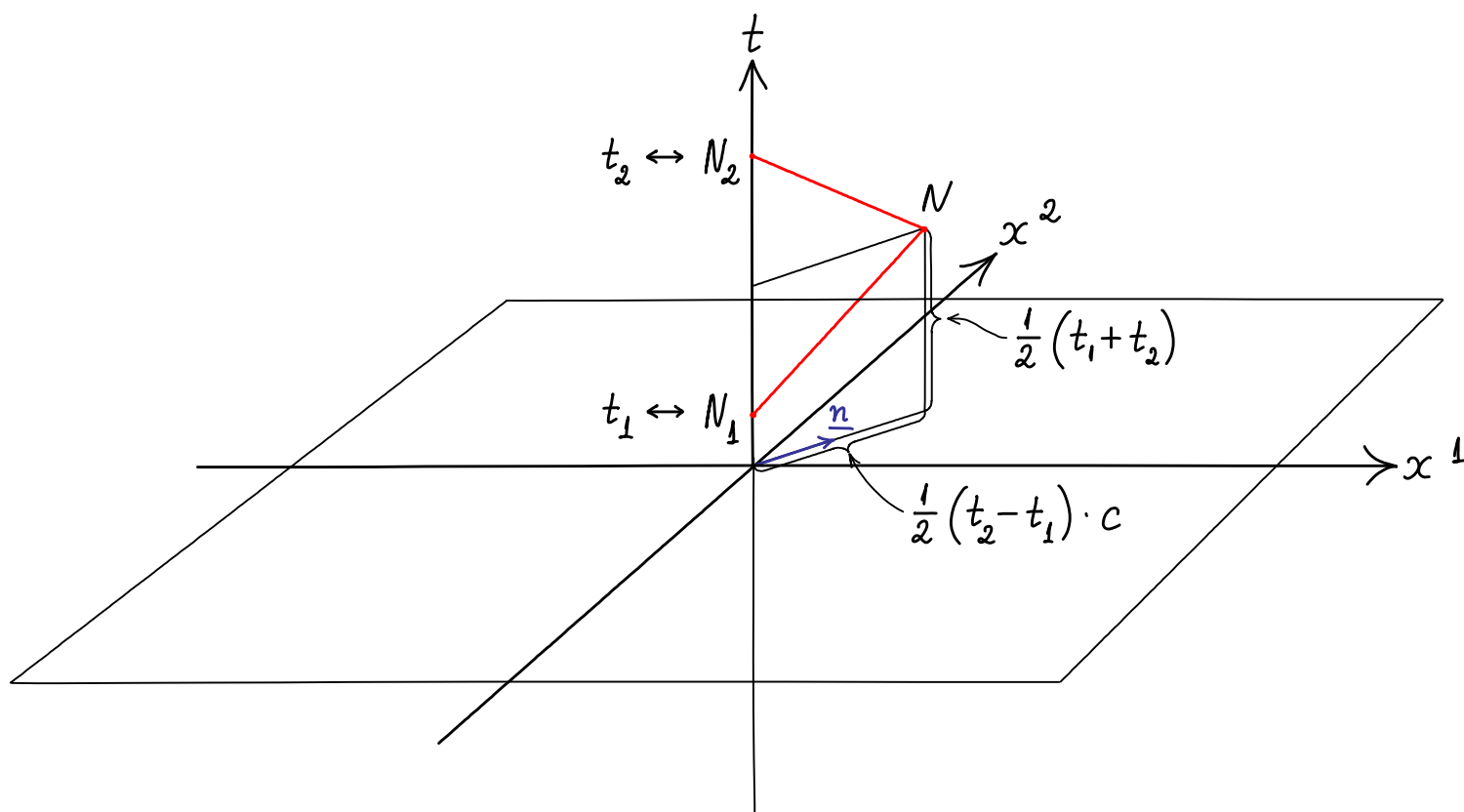
И така, всяка плоска електромагнитна вълна се разпространява във вакуум с една и съща по големина скорост, която не зависи и от избора на отправната система, тъй като съгласно принципа за относителност уравненията на Максвел (както и всички закони на физиката) трябва да имат един и същи вид във всички инерциални отправни системи.

2.5. Инерциални отпавни системи и преходи между тях.

Координатната система посредством която пространството на Минковски е отъждествено с $\mathbb{R}^{3,1}$ е една от многото специални координатни системи наречени инерциални отпавни системи. Тази специална отпавна система е построена от един специален точков наблюдател, стоящ неподвижно в нея, в началото на пространството. Така, мировата линия на този наблюдател, т.е., графиката

$$\{ (t, \underline{x}(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \}$$

на неговия закон за движение, ще бъде просто правата $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Координатната система е построена от зададения наблюдател с използване единствено на светлинни сигнали по така наречения радио-локационен метод изобразен на рисунката:



Процедурата е следната:

- На всяко събитие N се съпоставят координати $(t, \underline{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ с помощта на два светлинни сигнала с мирови линии определени от отсечките N_1N и NN_2 . Тези сигнали са излъчени и приети от нашия наблюдател в събития N_1 и N_2 , съответно, на които отговарят моменти от време t_1 и t_2 ($\geq t_1$).
- Приемаме, че нашият идеализиран точков наблюдател има развито "чувство" за посока в пространството и спрямо това чувство излъчени и приетия светлинен сигнал идват от една и съща посока $\underline{n} \in \mathbb{R}^3$ на пространството, където \underline{n} е единичен примерен вектор. Съвпадението на посоката на излъчени и приетия сигнал е емпиричен факт.
- Посредством регистрираните данни $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ и $\underline{n} \in \mathbb{R}^3$ наблюдателят съпоставя следните координати $(t, \underline{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ на събитието N :

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2), \quad \underline{x} = \frac{1}{2}(t_2 - t_1) \cdot c \cdot \underline{n}.$$

По такъв начин, всеки инерциален наблюдател строи координатна система в пространство-времето и това именно са инерциалните отправни системи. По предположение, в коя да е инерциална отправна система всеки инерциален наблюдател се движи равномерно и праволинейно. Следователно, мировите линии на инерциалните наблюдатели там са прави линии. Освен това, преходът от една инерциална отправна система към друга такава трябва да е афинна трансформация, понеже трябва да изобразява права линия в права линия (мировите линии на инерциалните наблюдатели).

Още едно условие, което трябва да изпълняват трансформациите между инерциални отправни системи идва от принципа за постоянство на скоростта на светлината. От него следва, че светлинен сигнал трябва да се трансформира в светлинен сигнал. От друга страна, при прехода към координата $x^0 = ct$ светлинните сигнали отговарят на тези и само тези прави в $\mathbb{R}^{3,1}$, които са изотропни.

Теорема. Нека $x \mapsto a + Ax$ е афинна трансформация на $\mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$, определена от $A \in GL(4, \mathbb{R})$ и $a \in \mathbb{R}^{3,1}$. Тогава тази афинна трансформация изобразява изотропна права в изотропна права \Leftrightarrow линейната ѝ част A изобразява всеки изотропен вектор в изотропен вектор $\Leftrightarrow A = \lambda \Lambda$, където $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и Λ е псевдо-ортогонална матрица.

Доказателство. Първата еквивалентност е очевидна.

Втората: нека означим $\eta(x, y) := x \cdot y$ и $\eta'(x, y) := (Ax) \cdot (Ay)$. Това са две квадратични форми. \Rightarrow Те могат да се диагонализират едновременно. Без ограничение на общността приемаме, че η' е диагонална в $\mathbb{R}^{3,1}$, където η приема стандартния си вид:

$$\eta(x, x) = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^3)^2,$$

$$\eta'(x, x) = \lambda' \left(-(x^0)^2 + \eta'_1 (x^1)^2 + \dots + \eta'_3 (x^3)^2 \right),$$

където $\lambda', \eta'_1, \eta'_2, \eta'_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Но тогава следните две условия са еквивалентни:

- $\forall x \in \mathbb{R}^{3,1}$ от $\eta(x, x) = 0 \Rightarrow \eta'(x, x) = 0$.
- $\eta' = \lambda' \eta$, т.е. $\eta'_1 = \eta'_2 = \eta'_3 = 1$.

Това именно е и желаната втора еквивалентност. \square

И така, най-общо прехода от една инерциална отправна система към друга се задава от афинна трансформация от вида:

$$x \mapsto a + \lambda \Lambda x,$$

където $a \in \mathbb{R}^{3,1}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и Λ е псевдо-ортогонална матрица. Наличието на произволен параметър λ на хомотетия (разтягане) се дължи на факта, че не е направена никаква хипотеза за съгласуване на времевите единици (мащаби) между различните инерциални наблюдатели.

Сега ще опишем процедурата за синхронизация на мащабите между два различни инерциални наблюдателя. Нека имаме два инерциални наблюдатели A и B , които излъчват един към друг светлинни сигнали на интервал от време равен на мащабната единица за време на всеки от наблюдателите. Приетите сигнали пристигат в B и A на интервали от време съответно $\mathcal{K}_{A,B}$ и $\mathcal{K}_{B,A}$ спрямо собствените мащабни единици. Тогава наблюдателите B и A отразяват обратно един към друг приетите светлинни сигнали и следователно те ще се върнат в A и B съответно на интервали $\mathcal{K}_{B,A} \mathcal{K}_{A,B}$ и $\mathcal{K}_{A,B} \mathcal{K}_{B,A}$. Казваме, че времевите мащаби върху A и B са съгласувани, ако:

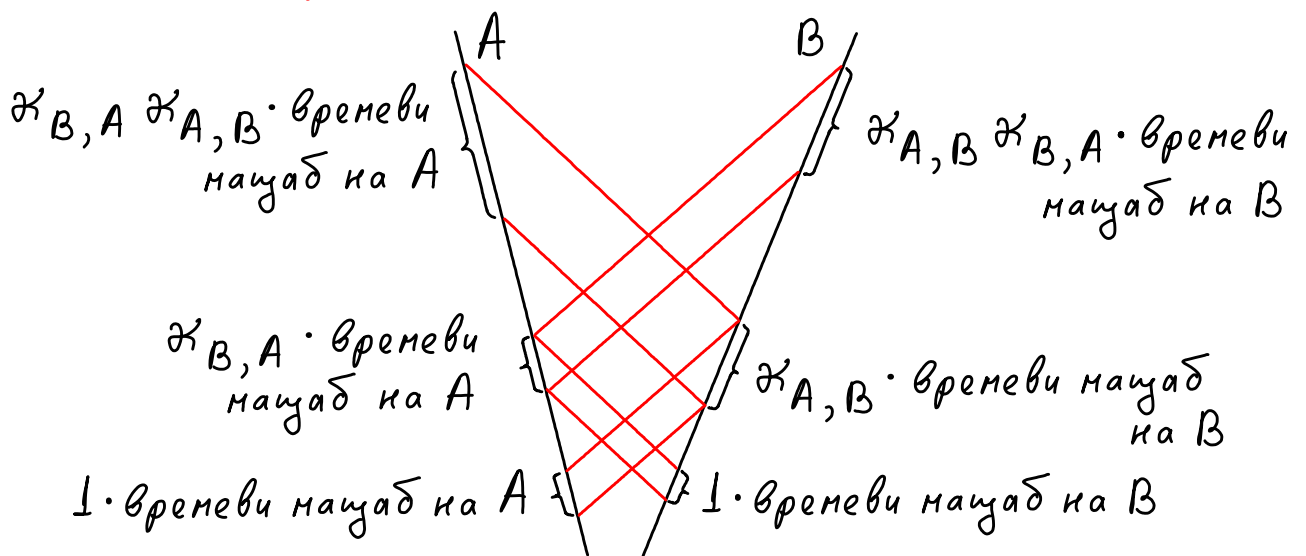
$$\mathcal{K}_{A,B} = \mathcal{K}_{B,A}.$$

В такъв случай, при повторното връщане на светлинните сигнали всеки от наблюдателите ще може да измери $\mathcal{K}_{A,B}$ чрез квадрата

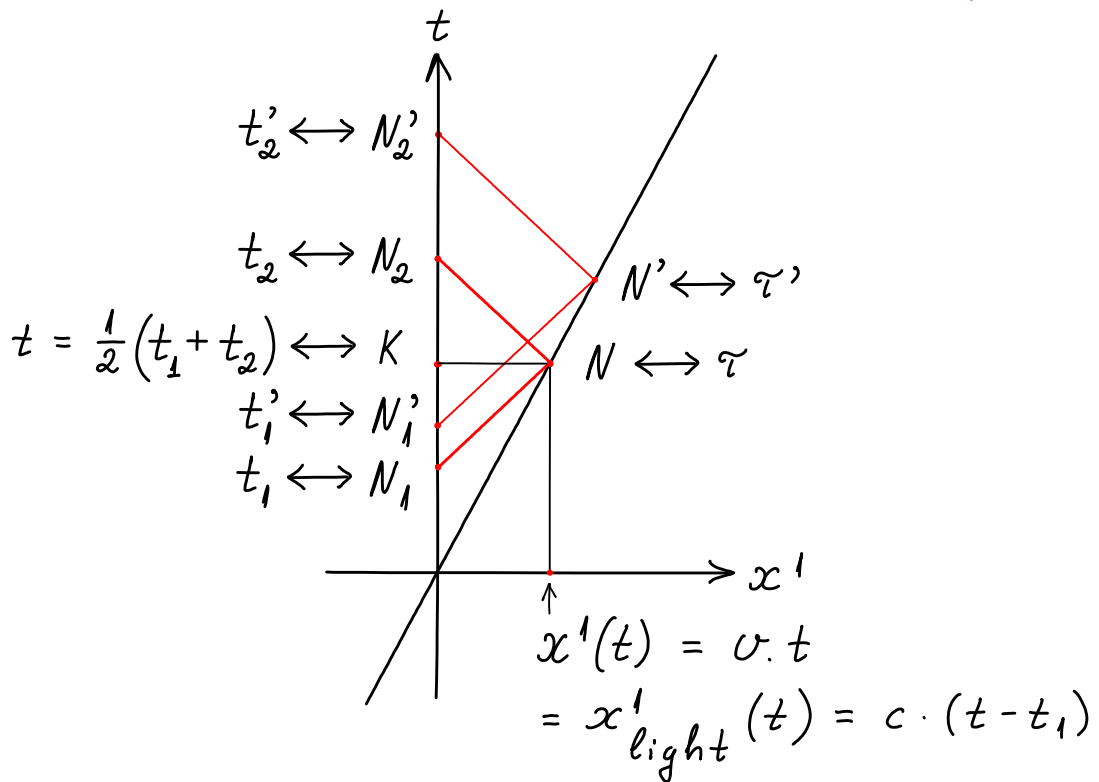
$$\mathcal{K}_{A,B}^2 = \mathcal{K}_{A,B} \mathcal{K}_{B,A} = \mathcal{K}_{B,A}^2.$$

Коефициента $\mathcal{K}_{A,B}$ се нарича **Доплерово число** и е безразмерен параметър понеже е отношение на еднотипни мащаби.

Горната процедура е изобразена на долната картинка :



Нека да приложим горната процедура за случая на два инерциални наблюдателя, чийто мирови линии имат обща точка. Без ограничение на общността можем да си представим, че пространствените оси на първия наблюдател са избрани така, че втория се движи равномерно и праволинейно по оста x^1 със скорост v . Нека означим $\mathcal{K}_{A,B} =: \mathcal{K}(v)$. Тогава :



$$\tau' - \tau = \alpha(v)(t_1' - t_1) \Rightarrow t_2' - t_2 = \alpha(v)^2 (t_1' - t_1).$$

$$t_2' - t_2 = \alpha(v)(\tau' - \tau)$$

От съображения за подобие:

$$\tau = \alpha(v)t_1, \quad t_2 = \alpha(v)\tau \quad \text{и} \quad t_2 = \alpha(v)^2 t_1.$$

От законите за движение намираме:

$$\alpha(v) = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

Отгук за синхронизирания времеви мащаб на подвижния наблюдател намираме:

$$c\tau = \sqrt{c^2 t^2 - (x')^2}.$$

Извод: Синхронизираното време на всеки инерциален наблюдател измервано в светлинни единици (т.е., умножено по c) е равно на псевдо-Евклидовата дължина по мировата му линия, т.е., е равно на естествения параметър на мировата линия въведен в точка 2.3. Този принцип се пренася и за неинерциални наблюдатели тъйто мирови линии са криви.

Като следствие от направения извод заключаваме, че преходът между две инерциални отпавни системи, тъйто времена са взаимно синхронизирани се дава от афинна трансформация, която запазва псевдо-Евклидовите интервали

$$(x-y)^2 = -(x^0 - y^0)^2 + (x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^3 - y^3)^2.$$

Следователно, това са афинни трансформации $\mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ от вида $x \mapsto a + \Lambda x$, където $a \in \mathbb{R}^{3,1}$ и Λ е псевдо-ортогонална матрица.

2.6. Терминология : трансформации на Лоренц, Пуанкаре и Вайл.

Линейните трансформации $\mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ задавани от псевдо-ортогонални матрици се наричат още **Лоренцови трансформации (Lorentz transformations)**. Композиция на Лоренцови трансформации е отново Лоренцова, както и обратната трансформация на Лоренцова е Лоренцова. Така, множеството на всички Лоренцови трансформации е **подгрупа** на общата линейна група $GL(4, \mathbb{R})$. Тази подгрупа се нарича **група на Лоренц** или също псевдо-ортогонална група и се бележи с $O(3, 1)$. Нейни подгрупи са :

$$SO(3, 1) := \{ \Lambda \in O(3, 1) \mid \det \Lambda = 1 \}$$

и нейната **свързана компонента на единицата**: $SO_0(3, 1)$.

Афинните трансформации $\mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1} : x \mapsto a + \Lambda x$, където Λ е Лоренцова трансформация се наричат **трансформации на Пуанкаре (Poincaré)** или още **нехомогенни Лоренцови трансформации**, както и псевдо-Евклидови движения. Този вид трансформации също формират група, която се нарича **група на Пуанкаре**.

Афинните трансформации $\mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1} : x \mapsto a + \lambda \Lambda x$, се наричат **трансформации на Вайл (Weyl)** или още **трансформации на Пуанкаре с дилатации (dilations)**. Уте образуват група.

2.7. Лоренцова и релативистична инвариантност

Най-общо постановката за инвариантност е следната. Имаме едно множество S върху което действа група G (виж Допълнението към Лекция 3) и едно свойство за елементите на S , което определя подмножество $S_0 \subseteq S$. Казваме, че S_0 е G -инвариантно, ако за

$$\forall g \in G \text{ и } \forall s \in S : s \in S_0 \implies g(s) \in S_0.$$

Например, нека S е множеството от гладки функции

$$\varphi : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R},$$

G е групата на Пуанкаре, която действа върху φ като

$$\varphi(x) \mapsto \varphi(a + \Lambda x)$$

(дясно действие). И нека S_0 е множеството от решения на вълновото уравнение: $\square_x \varphi = 0$. Тогава $\varphi(a + \Lambda x)$ е също решение:

$$\begin{aligned} \square_x (\varphi(a + \Lambda x)) &\equiv \eta^{\mu\nu} \partial_{x^\mu} \partial_{x^\nu} (\varphi(a + \Lambda x)) \\ &= \underbrace{\eta^{\mu\nu} \Lambda_{\mu}^{\mu_1} \Lambda_{\nu}^{\nu_1}}_{\eta^{\mu_1\nu_1}} (\partial_{x^{\mu_1}} \partial_{x^{\nu_1}} \varphi)(a + \Lambda x) = (\square_x \varphi)(a + \Lambda x). \end{aligned}$$

Казваме, че вълновото уравнение е Пуанкаре-инвариантно или също релативистично инвариантно. Както виждаме, по-нетривиалната част от горната проверка е инвариантността спрямо Лоренцови трансформации затова често се говори само за Лоренцова инвариантност.

Горният прост пример на релативистична инвариантност илюстрира следният общ принцип: ако едно функционално равенство е построено така, че винаги се сумира по съвоени горни и долни индекси и в равенството участват само Лоренц-инвариантни тензори като метриката,

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{M_1} \Lambda^{\nu}_{V_1} = \eta_{M_1 V_1}, \quad \eta^{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{M_1} \Lambda^{\nu}_{V_1} = \eta^{M_1 V_1},$$

а при трансформация на полета с индекси, по индексите се извършва Лоренцова трансформация посредством сумиране горен-долен индекс, тогава зададеното функционално равенство е Лоренц-инвариантно. Изрази построени по горния принцип се наричат **явно Лоренц-инвариантни** или просто **явно ковариантни** (*manifestly covariant*).

Друг пример на Лоренц-инвариантен тензор освен метричния $\eta_{\mu\nu}$ и $\eta^{\mu\nu}$ е **напълно антисиметричният тензор** определен от равенствата:

$$\Sigma^{M_1 M_2 M_3 M_4} = \text{sgn}(\sigma) \Sigma^{M_{\sigma(1)} M_{\sigma(2)} M_{\sigma(3)} M_{\sigma(4)}},$$

$$\Sigma^{0123} := 1,$$

$$\Sigma_{M_1 M_2 M_3 M_4} := \eta_{M_1 V_1} \eta_{M_2 V_2} \eta_{M_3 V_3} \eta_{M_4 V_4} \Sigma^{V_1 V_2 V_3 V_4},$$

$$\Rightarrow \Sigma_{M_1 M_2 M_3 M_4} = \text{sgn}(\sigma) \Sigma_{M_{\sigma(1)} M_{\sigma(2)} M_{\sigma(3)} M_{\sigma(4)}},$$

$$\Sigma_{0123} = -1.$$

Тогава за всяка матрица A^{ν}_{μ} имаме

$$A^{\nu_1}_{\mu_1} A^{\nu_2}_{\mu_2} A^{\nu_3}_{\mu_3} A^{\nu_4}_{\mu_4} \Sigma^{M_1 M_2 M_3 M_4} = \det(A) \Sigma^{V_1 V_2 V_3 V_4},$$

$$A^{\nu_1}_{\mu_1} A^{\nu_2}_{\mu_2} A^{\nu_3}_{\mu_3} A^{\nu_4}_{\mu_4} \Sigma_{V_1 V_2 V_3 V_4} = \det(A) \Sigma_{M_1 M_2 M_3 M_4}.$$

За привеждане на уравненията на Максвел в явно ковариантна форма се въвежда така наречения електромагнитен тензор:

$$(F_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0}^3 \equiv \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}, \quad F^{\mu\nu} := \eta^{\mu\mu_1} \eta^{\nu\nu_1} F_{\mu_1\nu_1}.$$

Тогава уравнения на Максвел във вакуум придобиват вида:

$$\partial_{x^\mu} F^{\mu\nu} = 0,$$

$$\sum^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \partial_{x^{\mu_1}} F_{\mu_2\mu_3} = 0.$$

Така, тези уравнения са инвариантни при трансформацията:

$$F_{\mu\nu}(x) \longmapsto \Lambda_{\mu}^{\mu_1} \Lambda_{\nu}^{\nu_1} F_{\mu_1\nu_1}(a + \Lambda x).$$

от края на точка 1 (стр. 9).

Забележка. За тези, които са запознати със смятането с диференциални форми, горните уравнения се записват като:

$$d * F = 0, \quad d F = 0 \quad \text{за} \quad F = F_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

където $*$ е звездата на Ходж.

2.8. Отново за причинната и метричната структура

В точка 2.2 ние въведохме релацията $x \leq y$ означаваща, че събитието x може да причини следствия в събитието y . По дефиниция

$$x \leq y \iff y \in x + V^+$$

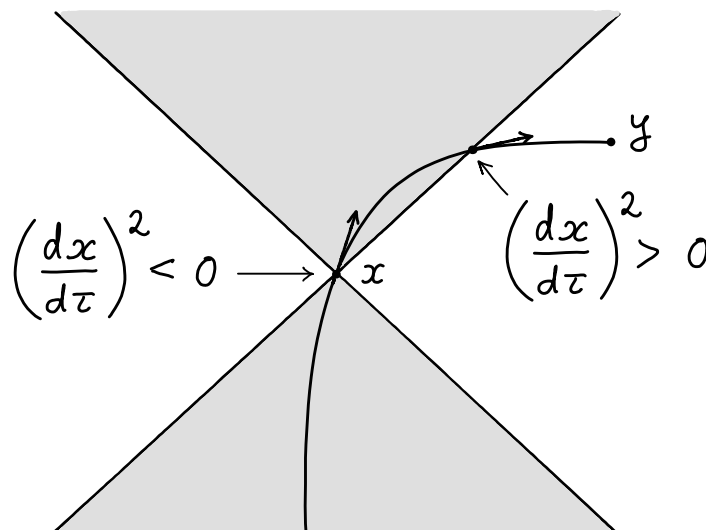
и по тази причина $x + V^+$ се нарича конус на бъдещето с център в x . Конусът на миналото с център в x е $x + V^-$, където $V^- = -V^+$. Така, обединението $(x + V^+) \cup (x + V^-)$ е множеството на всички събития, които са причинно свързани с x . Следователно,

две събития x и y са
причинно свързани

\iff

през x и y минава или мирова линия на светлинен сигнал, или през x и y минава мирова линия на инерциален наблюдател, който се движи със скорост по-малка от скоростта на светлината.

Това физическо предположение е напълно обосновано в обратна посока (\Leftarrow) и се съгласува както с опита така и с интуицията ни. В права посока (\Rightarrow) това може да се обоснове от следното съображение:



Както се вижда от картинката, ако има сигнал от x към y , който започва с времеподобна мирова линия (да речем, наблюдател се ускорява, стартирайки от скорост 0 в дадена инерциална отправна система), то в някакво събитие от мировата линия псевдо-Евклидовия квадрат $\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2$ на допирателния вектор ще си обърне знака и следователно собственото време по мировата линия ще престане да бъде реално:

$$s(\tau) = \int_0^{\tau} d\tau \sqrt{-\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^2} \notin \mathbb{R}.$$

Това е и един от аргументите, че никой наблюдател стартирайки от нулева скорост (в дадена инерциална отправна система) не може никога да превиши скоростта на светлината.

От друга страна, дължината на чисто пространствено-подобна крива, както я дефинирахме в точка 2.2 има смисъл на пространствено разстояние, което в случая на прави отсечки се съгласува с конструираните в точка 2.5 пространствени координати по радио-локационния метод.

Накрая ще отбележим едно свойство на причинната структура, което позволява от нея да се възстановят както афинната, така и метричната, псевдо-Евклидова структура на пространство-времето (с точност до избор на мащаб).

Теорема. Нека $F: \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ е биекция, която е гладка и има гладка обратна. И нека F е **наредбен морфизъм**, което по определение означава, че

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{3,1} \text{ от } x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y).$$

Тогави F има вида $F(x) = a + \lambda \Lambda x$, където $a \in \mathbb{R}^{3,1}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\Lambda \in O(3,1)$ (т.е., F е трансформация на Вайл).

Забележка. Обратното не е вярно: за някои трансформации на Вайл е в сила,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{3,1} \text{ от } x \leq y \Rightarrow F(y) \leq F(x).$$

Бележка по доказателството. Показва се, че F е **конформна трансформация** след което се използва, че **глобално** определените конформни трансформации са именно трансформациите на Вайл.