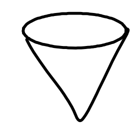
От предходната лекция:

Множеството на всички събития – пространство-времето – е едно частично наредено множество с наредба, която се нарича **причинна наредба**:

$x \geq y$ — **събитието y може да причини следствия в събитието x**

Тази релация се моделира от структура на псевдо-Евклидово пространство $\mathbb{R}^{3,1}$:

$$x \geq y \iff x - y \geq 0 \iff x - y \in V^+$$



$$V^+ = \{ x \in \mathbb{R}^{3,1} \mid x^2 \equiv x \cdot x \leq 0 \ , \ x^0 \geq 0 \}$$

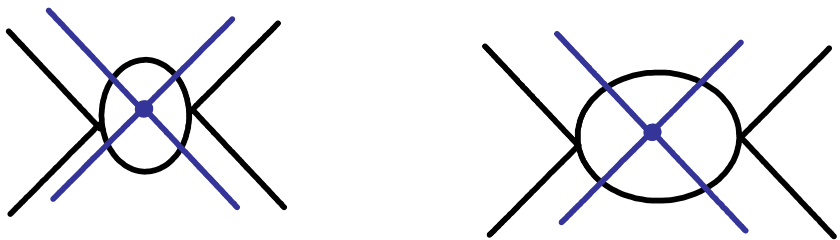
$$x^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\mu x^\mu$$

$x \sim y \iff$ не $x \geq y$ и не $y \geq x$

– пространствено подобни / причинно несвързани

Причинно несвързани области $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subseteq \mathbb{R}^{3,1}$

$$\mathcal{U}_1 \sim \mathcal{U}_2 \iff \forall x_1 \in \mathcal{U}_1,\ x_2 \in \mathcal{U}_2 : x_1 \sim x_2$$



Да се прескочи:

$\forall W \subseteq \mathbb{R}^{3,1}$:

$W' := \{ x \in \mathbb{R}^{3,1} \mid y \in W : x \sim y \}$

Свойства: 1.) $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_1' \supseteq W_2'$

2) $W \subseteq W''$

Да се прескочи

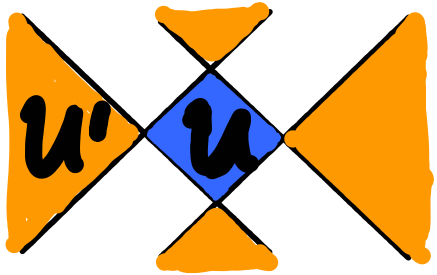
$$\Rightarrow \quad W \subseteq W'' = W^{(iv)} = \dots$$

$$W' = W''' = W^{(v)} = \dots$$

Причинно пълни области $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $W = W''$

Да се прескочи

Пример:



Аксиоматична К.Т.П
= Математическа рамка на К.Т.П.

Основни подходи:

1) Алгебричен на Хааг-Кастлер
Haag - Kastler

2) Полеви - на Уайтман / Wightman

Общ принцип

Групата на Поанкаре е унитарно представена в Хилбертовото пространство на състоянията. Транслациите по времето се генерират от самоспрегнат оператор – Хамилтониана, който е ограничен отдолу и минималната стойност на спектъра е собствена стойност с едномерно собствено подпространство – вакуумното състояние.

<u>Уточнения.</u> Групата на Поанкаре

$$x \xrightarrow[(a,\Lambda)]{} a+\Lambda x \xrightarrow[(a',\Lambda')]{} a'+\Lambda'(a+\Lambda x)$$

$$\hookrightarrow \quad (a',\Lambda')(a,\Lambda) = (a'+\Lambda' a, \Lambda'\Lambda)$$

$$\mathbb{R}^{3,1} \rtimes O(3,1)$$

нормален делител, абелева

$$(a,\lambda) = (a,1)(0,\lambda)$$

$$(0,\lambda)(a,1)(0,\lambda)^{-1} =$$
$$= (0,\lambda)(a,1)(0,\lambda^{-1}) = (0,\lambda)(a,\lambda^{-1})$$
$$= (\lambda a, 1)$$

На готово: $O(3,1)$ има 4 свързани компоненти

$SO(3,1)$ има 2 свързани компоненти

<u>Минимално предположение:</u>

Унитарно се представя свързаната компонента на единицата.

Допълнително сведение: "стандартно" предположение за унитарни представления на групи на Ли ("Гладки групи"):

$$G \ni g \longmapsto U(g) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{- унитарен}$$

така че $\quad U(g_1)U(g_2) = U(g_1 g_2)$,

$$U(g)^* = U(g)^{-1} = U(g^{-1}) .$$

Силна непрекъснатост:

$\forall \psi \in \mathcal{H}: \quad G \ni g \longmapsto U(g)\psi \in \mathcal{H}$

е непрекъснато (по норма).

<u>Теорема на Стоун</u> $\forall$ еднопараметр. подгрупа $U(g(t)) = e^{iXt}$

за единствен самоспрегнат X - нарича се генератор

Едно следствие:

$$g(t) = (te_\mu, 1) \mapsto U(g(t)) = e^{iP_\mu t}$$

$$U(\Lambda) = U(0, \Lambda)$$

$$U(\Lambda)\, e^{iP_\mu t}\, U(\Lambda)^{-1} =$$

$$= e^{i\Lambda^\nu_\mu P_\nu t} \longleftarrow \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$U(\Lambda)\, P_\mu\, U(\Lambda)^{-1} = \Lambda_\mu^{\ \nu}\, P_\nu$$

$$P(a) := P_\mu a^\mu$$

$$\Rightarrow \quad U(\Lambda)\, P(a)\, U(\Lambda)^{-1} = P(\Lambda a)$$

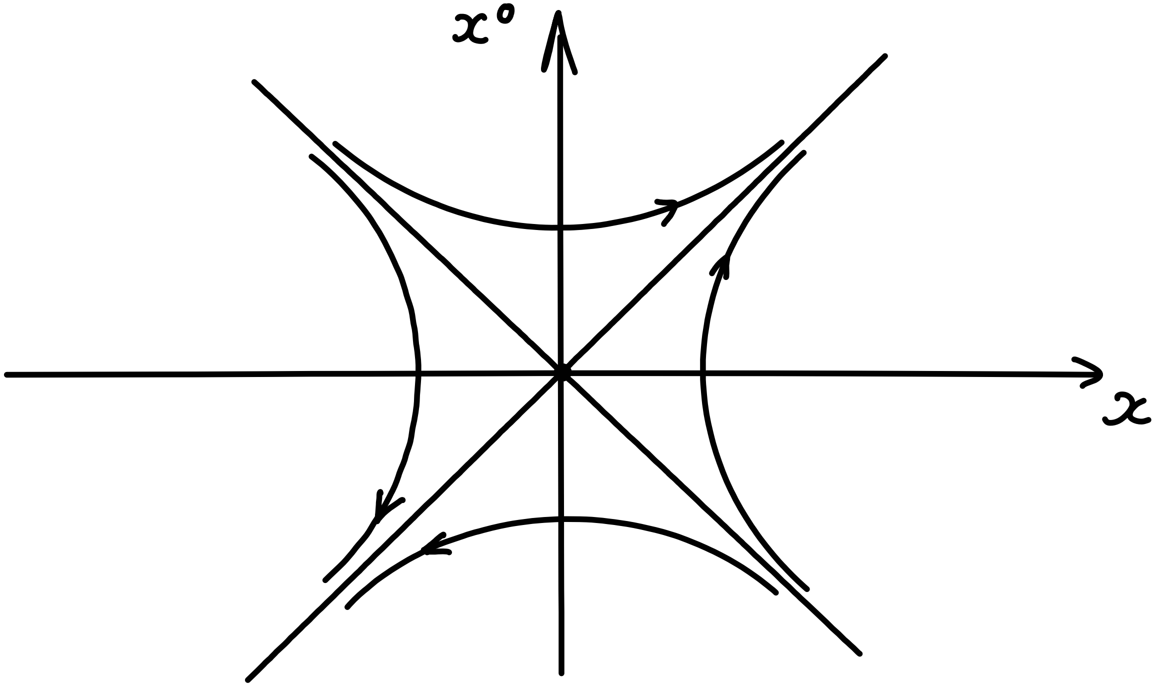
Да образуваме съвместния спектър

$$\operatorname{Spec}\{P_\mu\}_{\mu=0}^{3} \subseteq \mathbb{R}^{3,1}$$

– върху него действа $\Lambda \in SO_0(3,1)$

и $\operatorname{Spec}\{P_\mu\}_{\mu=0}^{3}$ е инвариантно множество

което по P_0 е ограничено отдолу



x^0
x^1

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Spec}\,\{P_\mu\}_{\mu=0}^{3} \subseteq V^+$$

и $\min \mathrm{Spec}\, P_0 \geq 0$

Постулираме: вакуумът Ω е единственото Поанкаре инвариантно състояние $\{e^{i\alpha}\Omega\}_\alpha$

$$U(a,\Lambda)\,\Omega = 1 \cdot \Omega \quad \text{следва!}$$

<u>Забележка</u> Групите в квантовата физика се представят проективно (по Th. на Вигнер):

$$U(g_1)\,U(g_2)\,\phi = e^{i\alpha(g_1, g_2)}\,U(g_1 g_2)\,\phi$$

2-коцикъл

и се третира с теория на кохомологии на групи

За $SO_0(3,1)$ има нетривиален/неотстраним с предефиниране коцикъл ± 1.

За неговото разрешаване

$$SO_0(3,1) \overset{\pi}{\twoheadleftarrow} Spin(3,1)$$

Спинорна група на Поанкаре:

$$(a, \Lambda)(a', \Lambda') = (a + \Lambda a', \Lambda \Lambda')$$

– тя се представя унитарно.

До тук предположенията и изводите са общи за двата аксиоматични подхода.

Допълнителни основни обекти в подхода на Хааг – Кастлер :

За максимална строгост и общност се работи с алгебри от ограничени оператори (образуване на наблюдаемите).

Мрежа от алгебри:

$$\forall\, W \underset{\text{огр.}}{\subseteq} \mathbb{R}^{3,1} \longmapsto \mathcal{A}(W)$$

$:=$ алгебра на (породена от) наблюдаемите локализирани в W.

Ако $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow \mathcal{A}(W_1) \subseteq \mathcal{A}(W_2)$

– изотония.

Локалност / причинност

Locality / Causality

$W_1 \sim W_2 \Rightarrow [\mathcal{A}(W_1), \mathcal{A}(W_2)] = 0.$

Ковариантност:

$\forall g$ - Поанкаре: $\quad A \in \mathcal{A}(W)$

$$\Rightarrow \quad U(g)\, A\, U(g)^{-1} \in \mathcal{A}(g(W))$$

Тип на алгебрите: "слабо затворени"

$$\langle \phi | A_i \phi \rangle \to \langle \phi | A \phi \rangle \quad \forall \phi$$

– сходимост по средни стойности

$\Longleftrightarrow$ Алгебри на фон Нойман

При подхода на Уайтман:

аксиоматизираме квантовите полета

$$\{\varphi_A(x)\}_{A=1}^{M}, \quad x \in \mathbb{R}^{3,1}$$

Преди всичко искаме ковариантност:

$$\left.\begin{aligned} & U(a,\Lambda)\,\varphi_A(x)\,U(a,\Lambda)^{-1} \\ = \; & \Pi_A^B(\Lambda^{-1})\,\varphi_B(a+\Lambda x) \end{aligned}\right\}\ \text{мулти-}\\\text{плет.}$$

– това е закон върху стойност, а не функция!

Дясната страна се взема от класическата теория

Например

$$U(a,\Lambda)\, F_{\mu\nu}(x)\, U(a,\Lambda)^{-1} =$$

$$= \Lambda^{\mu_1}_{\mu}\, \Lambda^{\nu_1}_{\nu}\, F_{\mu_1\nu_1}(a+\Lambda x)$$

– симетрия на решенията на Ур. на Макс.

$$\partial_{x^\mu} F^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \partial_{x^\mu} F_{\nu\rho} + \text{цикл.} = 0$$

Групово представяне:

$$U(a_1, \Lambda_1)\, U(a_2, \Lambda_2)\, \varphi(x) \left(- \mid - \right)^{-1}$$

$$= U(a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2)\, \varphi(x) \left(- \parallel - \right)^{-1}$$

ако $\Pi_A^{\ B}(\Lambda_1)\, \Pi_B^{\ C}(\Lambda_2) = \Pi_A^{\ C}(\Lambda_1 \Lambda_2)$

Локалност / Причинност

$x \sim y \implies$

0,1

$$\varphi_A(x)\,\varphi_B(y) - (-1)^{\varepsilon_{A,B}}\,\varphi_B(y)\,\varphi_A(x) = 0$$

Технически предположения.

а) Полетата $\varphi_A(x)$ може да са неограничени оператори, ние обаче искаме те затварят алгебра. Достатъчно условие за това $\exists\ \mathcal{H}^0 \underset{\text{гъсто}}{\subseteq} \mathcal{H}$, т.че. $\mathcal{D}$ е инвариантно за $\forall\ \varphi_A(x)$ и за $\forall\ U(g)$

т.е. $\varphi_A(x) : \mathcal{H}^0 \to \mathcal{H}^0$!?

$U(g) : \mathcal{H}^0 \to \mathcal{H}^0$

Възможно ли е обаче $\varphi_A(x)$ да е обикновена функция

Теорема: Не!

Изход: $\varphi_A(x)$ е операторно значна обобщена функция:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^{3,1}) \ni f \longmapsto \left(\varphi_A(f) : \mathcal{H}^0 \to \mathcal{H}^0 \right)$$

т.че $\left(f \mapsto \langle \phi | \varphi_A(f) \psi \rangle \right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{3,1})$

Забележка: Полета могат да се породят и в подхода на Хааг:

A - оператор:

$$A(x) = U(x)\, A\, U(x)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}^{3,1}$$

"разнасяме оператора"

Но $A(x)$ нито е локален нито ковариантен

с крайно-мерен мултиплет