N. N.
29.11.13
-1-

Квантова теория на полето и елементарните частици: Лекция 9

Николай М. Николов

Насрочваме извънредна лекция за 8 януари 2014 от 12:15 до 15:00, която ще започне в аудитория 304 на ФМИ и при нужда ще се преместим, като ще оставим бележка на аудиторията и на портала.

С червено са отбелязани части от лекцията, в които е имало пропуски или са приведени допълнителни сведения.

0. Техническо предисловие: Групи, действия, представяния

Този материал ще играе съществена роля в следващите две лекции.

а) Да припомним: група е множество G снабдено с бинарна операция, наричана групово произведение (или групова операция),

$$G\times G \longrightarrow G : (g_1, g_2) \longmapsto g_1\cdot g_2 \ (\equiv g_1 g_2)$$

и изпълняваща свойствата:

(асоциативност) $\forall g_1, g_2, g_3 \in G : (g_1\cdot g_2)\cdot g_3 = g_1\cdot(g_2\cdot g_3)$;

(единица) $\exists e\in G \ \forall g\in G : g\cdot e = e\cdot g = g$;

(обратен елемент) $\forall g\in G, \exists h\in G : g\cdot h = h\cdot g = e$.

Елементът $e\in G$ определен от второто свойство е единствен и се нарича единица. За $\forall g\in G$ елемента h определен от третото свойство е единствен и се нарича обратен на g и се бележи с g^{-1}.

$$(g_1\cdot g_2)^{-1} = g_2^{-1}\cdot g_1^{-1}.$$

б) Абелева или още комутативна група е такава група G, за която:

$$\forall g_1, g_2 \in G: \quad g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 .$$

Абелевите групи понякога се записват адитивно: груповата операция се бележи с $+$ $(g_1 + g_2)$, единицата се нарича нула (0) и обратния елемент на g се нарича противоположен $(-g)$.

в) Ако M е множество, то $Iso(M)$ е множеството на всички биекции $M \longrightarrow M$ (т.е., взаимно еднозначни и обратими изображения от M в M). $Iso(M)$ е група спрямо композицията на изображения. Единица в $Iso(M)$ е идентитета id_M.

г) Морфизъм на групи е изображение $f: G_1 \longrightarrow G_2$ между две групи, което изпълнява свойствата:

- $\forall g', g'' \in G: \quad f(g' \cdot g'') = f(g') \cdot f(g'')$;
- $f(e_1) = e_2$, където $e_1 \in G_1$ и $e_2 \in G_2$ са единиците.

Оттук следва: $\quad \forall g \in G: \quad f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

д) Подгрупа $G_1 \subseteq G$ е група G_1, за която влагането $G_1 \hookrightarrow G$ е морфизъм.

е) Ако V е векторно пространство, то $GL(V)$ е подгрупата на $Iso(V)$, състояща се от тези елементи на $Iso(V)$, които са линейни изображения.

Преминаваме към понятията действие и представяне. Фактически, това синоними!

ж) Действие на група G върху множество M е изображение:

$$G \times M \longrightarrow M : (g, x) \longmapsto g \cdot x,$$

което изпълнява свойствата
(асоциативност) $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in M: \ g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x$;
(единица) $\forall x \in M: \ e \cdot x = x$.

з) Непосредствено от определенията се проверява следната:

<u>Теорема.</u> Нека G е група, M е множество.
(i) Ако G действа върху M и за $\forall g \in G$ определим

$$\pi(g)(x) := g \cdot x \quad \text{за } \forall x \in M,$$

то $\pi(g) : M \longrightarrow M$, $\pi(g) \in Iso(M)$
и $\pi : G \longrightarrow Iso(M)$ е морфизъм.

(ii) Обратно, ако е зададен морфизъм на групи $\pi : G \to Iso(M)$
и определим: $G \times M \longrightarrow M : (g, x) \longmapsto g \cdot x := \pi(g)(x)$,
то това изображение задава действие на групата G върху M.

и) Ако V е векторно пространство и G е група, която действа върху него, то ще казваме, че действието е линейно, ако изображенията $\pi(g) : V \longrightarrow V$, които са индуцирани съгласно горната теорема, са линейни изображения за $\forall g \in G$. Така, едно линейно действие е равносилно на морфизъм

$$\pi : G \longrightarrow GL(V).$$

Всеки морфизъм $\pi : G \to GL(V)$ се нарича още представяне.

й) Още един алтернативен термин: ако групата G действа върху множеството M, то казваме, че M е G-модул (G-module).

к) Ако V е векторно пространство над поле $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то множеството на всички едномерни векторни подпространства на V се нарича проективно пространство над V и се бележи с

$$P(V) := \{\mathbb{K}v \mid v \in V\}.$$

Ако групата G е представена върху V посредством $\pi: G \to GL(V)$, то върху $P(V)$ се индуцира действие

$$g \cdot (\mathbb{K}v) := \mathbb{K}\pi(g)(v).$$

То се нарича проективизация на представянето π.

л) Нека групата G действа върху проективно пространство $P(V)$, така че за $\forall g \in G$, $\exists \pi(g) \in GL(V)$ такова, че

$$g \cdot (\mathbb{K}v) := \mathbb{K}\pi(g)(v).$$

Когато това се случи, казваме че групата G има проективно представяне. Тогава от аксиомите за действие ще следва, че

$$\forall g_1, g_2 \in G: \ \pi(g_1 \cdot g_2) = \lambda(g_1, g_2)\,\pi(g_1)\,\pi(g_2)$$

за някаква функция $\lambda: G \times G \longrightarrow \mathbb{K}$.

м) Нека $\mathcal{H}$ е Хилбертово пространство. Множеството на всички унитарни линейни изображения принадлежащи на $GL(\mathcal{H})$ е подгрупа на $GL(\mathcal{H})$ наречена унитарна група на $\mathcal{H}$. Бележи се с $U(\mathcal{H})$.

Когато $\mathcal{H} = \mathbb{C}$, $U(\mathbb{C}) \equiv U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

н) Унитарно представяне на група G в Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ се нарича морфизъм на групи $\pi : G \longrightarrow U(\mathcal{H})$.

о) Ако $\mathcal{H}$ е Хилбертово пространство, то неговата проективизация $P(\mathcal{H})$ може да се отъждестви с множеството на единичните лъчи в $\mathcal{H}$:

$$P(\mathcal{H}) \cong \{ \{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \mid \phi \in \mathcal{H} \}.$$

Последното множество е множеството от чисти състояния за една квантова система, както обяснихме в Лекция 2.

Казваме, че една група G действа (или се представя) проективно унитарно в Хилбертовото пространство $\mathcal{H}$, ако G действа върху $P(V)$, така, че за $\forall g \in G$, $\exists \pi(g) \in U(\mathcal{H})$ такова, че

$$g \cdot \{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} = \{e^{i\alpha}\pi(g)\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad \text{за } \forall \phi \in \mathcal{H}.$$

Тогава следва, че $\pi(g_1 \cdot g_2) = e^{i\omega(g_1, g_2)} \pi(g_1)\pi(g_2)$ за някаква функция $\omega : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$.

Съгласно Теоремата на Вигнер, спомената в Лекция 3, всяка свързана група на симетрията в квантовата физика се представя проективно унитарно в Хилбертовото пространство на състоянията.

Преминаваме към главната тема на лекцията:

Аксиоматична К. Т. П.
Axiomatic Q. F. T.

Това е математическата рамка на К. Т. П.. По-точно, това е математическа формулировка на това, кои са (математическите) обекти, които задават една К. Т. П. (или по-точно, модел на К. Т. П.); и също така, привежда се математическа формулировка на най-общите физически принципи, които трябва да удовлетворява всяка К. Т. П. По такъв начин, в аксиоматичната К. Т. П. не се цели да се фиксира еднозначно един или друг модел на К. Т. П., а по-скоро да се зададат математическите стандарти, на които трябва да отговаря всеки един модел при неговото пълно завършване.

Съществуват два основни подхода:

- Алгебричен подход на Хааг-Кастлер (Haag-Kastler);
- Полеви подход на Уайтман (Wightman).

1. Общи принципи: пространство-времева симетрия

И в двата подхода се приема, че групата на Поанкаре е е унитарно представена в Хилбертовото пространство на състоянията. Транслациите по времето се генерират от самоспрегнат оператор – Хамилтонианът – който е ограничен отдолу и минималната стойност на спектъра му е негова собствена стойност с едномерно собствено подпространство – вакуумното състояние. Вакуумът е Лоренц инвариантно състояние.

В това дълго и все още подлежащо на уточнения предположение са събрани няколко принципа (постулати), като например:

- спектралност – условието за ограниченост от долу на Хамилтониана, което също се нарича и условие за положителност на енергията;
- след тези условия идва постулата за съществуване и единственост на вакуума. Физически, вакуумът е характеризиран като състоянието с най-ниска енергия.

Следват нужните уточнения:

а) Групата на Поанкаре, въведена в Лекция 8, като множество е:

$$\mathbb{R}^{3,1} \times O(3,1)$$

и един елемент $(a, \Lambda) \in \mathbb{R}^{3,1} \times O(3,1)$ действа върху пространството на Минковски по формулата:

$$\mathbb{R}^{3,1} \ni x \xmapsto[(a,\Lambda)]{} a + \Lambda x \in \mathbb{R}^{3,1}.$$

От тук получаваме и закона за композиция (груповото произведение):

$$x \underset{(a,\Lambda)}{\longmapsto} a+\Lambda x \underset{(a',\Lambda')}{\longmapsto} a+\Lambda'(a+\Lambda x)$$

$$(a,\Lambda)\cdot(a',\Lambda') = (a+\Lambda' a\,,\,\Lambda\Lambda')$$

Това е частен случай на една обща конструкция в теория на групите наречена полупряко произведение на групи и в случая се означава като $\mathbb{R}^{3,1} \rtimes O(3,1)$, където посоката на стрелката указва наличието на нормална подгрупа (нормален делител):

$$\mathbb{R}^{3,1} \equiv \mathbb{R}^{3,1} \times \{1\} \subseteq \mathbb{R}^{3,1} \rtimes O(3,1).$$

Групата на Лоренц $O(3,1)$ също е подгрупа на $\mathbb{R}^{3,1} \rtimes O(3,1)$:

$$O(3,1) \equiv \{0\} \times O(3,1) \subseteq \mathbb{R}^{3,1} \rtimes O(3,1)$$

(напомняме, че $\mathbb{R}^{3,1}$ е адитивно записана абелева група и нулата е груповата единица). Така,

$$\mathbb{R}^{3,1}\cdot O(3,1) \equiv \left(\mathbb{R}^{3,1}\times\{1\}\right)\cdot\left(\{0\}\times O(3,1)\right) = \mathbb{R}^{3,1}\rtimes O(3,1),$$

понеже $(a,\Lambda) = (a,1)\cdot(0,\Lambda)$. Също така,

$$(0,\Lambda)(a,1)(0,\Lambda)^{-1} = (\Lambda a, 1)$$

- проверка: $(0,\Lambda)(a,1)(0,\Lambda)^{-1} = (0,\Lambda)(a,1)(0,\Lambda^{-1})$
$= (0,\Lambda)(a,\Lambda^{-1}) = (\Lambda a, 1)$.

От последно равенство следва, че $\mathbb{R}^{3,1}$ е нормална подгрупа на групата на Поанкаре. Тази подгрупа се нарича група на транслациите, понеже елементите ѝ, $a \in \mathbb{R}^{3,1}$ действат като транслации в пространството на Миковски: $x \mapsto a + x$.

б) Пълната група на Лоренц, $O(3,1)$, не е свързана като топологично пространство. Минимално предположение в К.Т.П. е, че в Хилбертовото пространство на състоянията се представя само нейната свързана компонента съдържаща единицата. На готово привеждаме факта, че $O(3,1)$ има 4 свързани компоненти, а нейната подгрупа

$$SO(3,1) = \{ \Lambda \in O(3,1) \mid \det \Lambda = 1 \}$$

има две свързани компоненти. Свързаната компонента съдържаща единицата е подгрупа на $SO(3,1)$, която се бележи с $SO_0(3,1)$.

Така, свързаната компонента на единицата на пълната група на Поанкаре $\mathbb{R}^{3,1} \rtimes O(3,1)$ е $\mathbb{R}^{3,1} \rtimes SO_0(3,1)$.

в) Както отбелязахме в предисловието за свързаната група на Поанкаре можем да очакваме най-общо, че тя ще се представя проективно унитарно в Хилбертовото пространство на състоянията. Нека означим

$$U(a,\Lambda) := \left\{ \begin{array}{l} \text{унитрания оператор, който представя} \\ \text{Поанкаре трансформацията } (a,\Lambda) \text{ в} \\ \text{Хилбертовото пространство на състоянията.} \end{array} \right.$$

За краткост означаваме също:

$$U(a) \equiv U(a,1), \quad U(\Lambda) \equiv U(0,\Lambda).$$

Без доказателство ще приведем следните два факта:

- За всяко проективно-унитарно представяне на групата $\mathbb{R}^{3,1} \rtimes SO_0(3,1)$ съществува избор на представящите унитарни трансформации $U(a,\Lambda)$:

$$(a,\Lambda)\cdot\{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} = \{e^{i\alpha}U(a,\Lambda)\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$$

така, че

$$U(a_1,\Lambda_1)\,U(a_2,\Lambda_2) = (\pm 1)\,U\big((a_1,\Lambda_1)\cdot(a_2,\Lambda_2)\big).$$

По тази причина физиците говорят за "двузначни" представяния.

- Съществува двукратно накриваща, свързана група

$$\rho : Spin_0(3,1) \twoheadrightarrow SO_0(3,1),$$

така, че за всяко проективно унитарно представяне на $SO_0(3,1)$, за което

$$U(\Lambda_1)\,U(\Lambda_2) = \pm U(\Lambda_1\Lambda_2)$$

съществува унитарно представяне

$$\widetilde{U} : Spin_0(3,1) \longrightarrow \mathrm{U}(\mathcal{H})$$

$$\left(\widetilde{U}(\widetilde{\Lambda}_1)\,\widetilde{U}(\widetilde{\Lambda}_2) = \widetilde{U}(\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_2) \text{ за } \forall\, \widetilde{\Lambda}_1, \widetilde{\Lambda}_2 \in Spin_0(3,1)\right)$$

такова, че за $\forall\, \Lambda \in SO_0(3,1)\ \exists\, \widetilde{\Lambda} \in Spin_0(3,1)$, за което

$$\rho(\widetilde{\Lambda}) = \Lambda \quad \text{и} \quad U(\Lambda) = \widetilde{U}(\widetilde{\Lambda}).$$

С това двузначността се скрива със замяната на Лоренцова трансформация $\Lambda \in SO_0(3,1)$ с нейния дву елементен прообраз $\rho^{-1}(\Lambda) \subseteq Spin_0(3,1)$, тъй като се оказва, че

$$\text{ако } \rho(\widetilde{\Lambda}_1) = \rho(\widetilde{\Lambda}_2), \text{ то } \widetilde{U}(\widetilde{\Lambda}_1) = -\widetilde{U}(\widetilde{\Lambda}_2).$$

Групата $Spin_0(3,1)$ се нарича спинорна група (на Лоренц).

По такъв начин стигаме до извода, че можем да считаме, че в Хилбертовото пространство на състоянията, унитарно се представя така наречената спинорна група на Поанкаре

$$\mathbb{R}^{3,1} \rtimes Spin_0(3,1)$$

определена с групово умножение:

$$(a_1, \tilde{\Lambda}_1)\cdot(a_2,\tilde{\Lambda}_2) = (a_1 + \rho(\tilde{\Lambda}_1)\, a_2 , \tilde{\Lambda}_1 \tilde{\Lambda}_2).$$

Така, действието на спинорната група върху пространството на Минковски винаги минава (пропуска се) през $\rho: Spin_0(3,1) \twoheadrightarrow SO_0(3,1)$ към групата на Лоренц $SO_0(3,1)$, поради което физически спинорните трансформации са неотличими от Лоренцовите.

По-нататък за краткост ще премахнем вълните от горните означения:

$$U(a,\Lambda) = U(a)\, U(\Lambda)$$

– унитарното представяне на спинорни Поанкаре трансформации; ще изпускаме също и да отбелязваме явно действието на морфизма ρ:

$$U(a_1,\Lambda_1)\, U(a_2,\Lambda_2) = U(a_1 + \Lambda_1 a_2 , \Lambda_1 \Lambda_2)$$

за $\forall \Lambda_1, \Lambda_2 \in Spin_0(3,1)$.

Забележете: $U(\Lambda)U(a) = U(\Lambda a, \Lambda) \neq U(a)\, U(\Lambda)$!

г) До тук разтълкувахме и уточнихме първото изречение от направеното начално предположение. В следващата му част срещаме понятието "генератор" във връзка с генериране на транслациите по времето, което ще поясним сега.

Първо, както вече отбелязахме, групата на Поанкаре принадлежи към специален клас групи, които са топологични пространства и дори имат гладка структура (т.е., са гладки многообразия). Тези групи се наричат групи на Ли.

За унитарните представяния на една група на Ли G има едно допълнително предположение за непрекъснатост:

за $\forall \phi \in \mathcal{H}$ изображението $G \to \mathcal{H} : g \mapsto \pi(g)\phi$
е непрекъснато спрямо нормата в $\mathcal{H}$.

Важността на това условие идва от теоремата на Стоун, която вече споменахме в Лекция 3, при въвеждане на Хамилтониани. В случая, ако $\{g(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq G$ е едно-параметрична подгрупа на G, което по определение значи групов морфизъм

$$\mathbb{R} \to G : t \mapsto g(t) \quad , \quad g(t_1)\,g(t_2) = g(t_1+t_2) \, ,$$

то тогава в следствие на теоремата на Стоун $\pi(g(t))$ ще има вида:

$$\pi(g(t)) = e^{iXt}$$

за единствен самоспрегнат оператор X в Хилбертовото пространство $\mathcal{H}$ на унитарното представяне $\pi : G \to U(\mathcal{H})$. Такива самоспрегнати оператори се наричат генератори, за съответните представени едно-параметрични групи $\pi(g(t))$. Ние ще се върнем по-подробно в следващата лекция на темата за генератори в групи на Ли.

В случая на постулата, който обсъждаме, става дума за едно-параметрична група от транслации $\{ta\}_{t\in\mathbb{R}}$, където $a\in\mathbb{R}^{3,1}$. Така,

$$\mathcal{U}(ta) = e^{i\hat{P}(a)t}.$$

Самоспрегнатият оператор $\hat{P}(a)$ се нарича генератор на транслация по a.

Тъй като $\mathcal{U}(t(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)) = e^{i\hat{P}(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)t}$

$$= \mathcal{U}(t\lambda_1 a_1)\,\mathcal{U}(t\lambda_2 a_2) = e^{i\hat{P}(a_1)\lambda_1 t_1}\, e^{i\hat{P}(a_2)\lambda_2 t_2}$$

$$= e^{i(\lambda_1\hat{P}(a_1) + \lambda_2\hat{P}(a_2))t} \quad \left(\text{понеже } \left[e^{i\hat{P}(a_1)\lambda_1 t_1}, e^{i\hat{P}(a_2)\lambda_2 t_2}\right] = 0\right).$$

$$\Longrightarrow \qquad \hat{P}(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) = \lambda_1\hat{P}(a_1) + \lambda_2\hat{P}(a_2)$$

$(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^{3,1})$. Този извод макар и направен формално-алгебрически може да се обоснове и в рамките на функционалния анализ. Така, $\hat{P}(a)$ зависи линейно от a и ако разложим a в псевдо-ортонормиран базис $\{e_\mu\}_{\mu=0}^{3} \subseteq \mathbb{R}^{3,1}$ (стандартния базис),

$$a = a^\mu e_\mu \quad \Longrightarrow \quad \hat{P}(a) = a^\mu \hat{P}_\mu, \quad \hat{P}_\mu := \hat{P}(e_\mu).$$

Самоспрегнатите операто $\hat{P}_\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ се наричат базисни генератори на транслации и измежду тях

$$\hat{P}_0 = \text{генератор на транслацията по времето}.$$

Именно този оператор се отъждествява с Хамилтониана, т.е. с оператора на енергията, за което допълнителен аргумент ще приведем и по-нататък (при постулата за ковариантност).

Ако означим с Ω векторът на състоянието отговарящо на вакуума, то Лоренцовата инвариантност на вакуумното състояние означава, че

$$\mathcal{U}(\Lambda)\Omega = e^{i\alpha(\Lambda)}\Omega \quad (\forall \Lambda \in Spin_0(3,1))$$

където $\alpha(\Lambda) \in \mathbb{R}$, т.е., $\mathcal{U}(\Lambda)$ не променя единичния лъч пораден от Ω. Физически: вакуумът е един и същ във всички инерциални отправни системи.

С това изчерпахме уточнението на всички понятия, които присъстваха в нашия първи постулат, общ за всички аксиоматични подходи.

Ще приведем някои <u>първи следствия</u>.

1) За $\forall a \in \mathbb{R}^{3,1}$ и $\forall \Lambda \in Spin_0(3,1)$:

$$\mathcal{U}(\Lambda)\,\hat{P}(a)\,\mathcal{U}(\Lambda)^{-1} = \hat{P}(\Lambda a)$$

<u>Доказателство.</u> $\mathcal{U}(\Lambda)\, e^{i\hat{P}(a)t}\, \mathcal{U}(\Lambda)^{-1}$

$$= \mathcal{U}(\Lambda)\,\mathcal{U}(ta)\,\mathcal{U}(\Lambda)^{-1} = \mathcal{U}(\Lambda t a) = \mathcal{U}(t\Lambda a) = e^{i\hat{P}(\Lambda a)t}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{U}(\Lambda)\,\hat{P}(a)\,\mathcal{U}(\Lambda)^{-1}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\,\mathcal{U}(\Lambda)\, e^{i\hat{P}(a)t}\,\mathcal{U}(\Lambda)^{-1}\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\, e^{i\hat{P}(\Lambda a)t}\Big|_{t=0} = \hat{P}(\Lambda a). \qquad \square$$

2) В частност, $\mathcal{U}(\Lambda)\,\hat{P}_\mu\,\mathcal{U}(\Lambda)^{-1} = \Lambda_\mu^{\ \nu}\,\hat{P}_\nu$ (проверете!).

3) Самоспрегнатите операто $\hat{P}_0$, $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ и $\hat{P}_3$ комутират един с друг, тъй като едно-параметричните униарни групи, които пораждат, $U(te_\mu) = e^{i\hat{P}_\mu t}$, комутират една с друга,

$$U(t'e_\mu)\,U(t''e_\nu) = U(t''e_\nu)\,U(t'e_\mu).$$

В началото на Лекция 6 показахме, че ако имаме една съвкупност от взаимно комутиращи, диагонализируеми, ермитови оператори в Хилбертово пространство $\mathcal{H}$, то съществува ортонормиран базис от общи собствени вектори. Това се обобщава и за системата от взаимно комутиращи самоспрегнати оператори $\{\hat{P}_\mu\}_{\mu=0}^{3}$:

$$\hat{P}_\mu |k, A\rangle = k_\mu |k, A\rangle \quad , \quad k = (k_\mu)_{\mu=0}^{3} \in \mathbb{R}^{3,1}$$

- това е един такъв "ортонормиран базис" на $\mathcal{H}$, записан в означения на Дирак, като A е допълнителен индекс на базиса, който е необходим в случай, че при даден набор (k_μ) от собствени числа съществуват няколко общи, линейно независими, собствени вектори $|k, A\rangle$. Кавичките на думите "ортонормиран базис" са поставени, понеже операторите $\hat{P}_\mu$ могат да имат непрекъснат спектър, за който k_μ нямат вече смисъл на собствени числа, така, че не съществуват и $|k, A\rangle$, като вектори в $\mathcal{H}$. Много е удобно обаче да си мислим, че такива собствени вектори съществуват в някакъв обобщен смисъл, макар и да лежат в по-широко пространство от $\mathcal{H}$. Такъв математически апарат съществува и той се нарича теория на обогатените Хилбертови пространства (rigged Hilbert spaces).

4) <u>Пример</u>. Да разгледаме в $L^2(\mathbb{R}^3)$ системата от взаимно комутиращи самоспрегнати оператори $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3$:

$$\left(\hat{q}_j f\right)(q_1, q_2, q_3) = q_j f(q_1, q_2, q_3) \text{ за } f \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

Тогава система от общи, обобщени, собствени вектори са:

$$\hat{q}_j |\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\rangle = \upsilon_j |\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\rangle,$$

$$|\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\rangle = \delta(q_1 - \upsilon_1)\,\delta(q_2 - \upsilon_2)\,\delta(q_3 - \upsilon_3),$$

понеже $q\,\delta(q-\upsilon) = \upsilon\,\delta(q-\upsilon)$ (виж Лекция 7). От друга страна,

$$\delta(q_1 - \upsilon_1)\,\delta(q_2 - \upsilon_2)\,\delta(q_3 - \upsilon_3) \notin L^2(\mathbb{R}^3)$$

и векторното пространство, което "обогатява" Хилбертовото пространство $L^2(\mathbb{R}^3)$ с обобщени собствени вектори е пространството на обобщени функции $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Налице е редица от включвания:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \subsetneqq L^2(\mathbb{R}^3) \subsetneqq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Забележете, че скаларното произведение между обобщени собствени вектори придобива "обобщен" смисъл:

$$\langle \upsilon_1', \upsilon_2', \upsilon_3' | \upsilon_1'', \upsilon_2'', \upsilon_3''\rangle$$

$$= \int dq_1\,dq_2\,dq_3\; \overline{\delta(q_1 - \upsilon_1')\,\delta(q_2 - \upsilon_2')\,\delta(q_3 - \upsilon_3')} \times \delta(q_1 - \upsilon_1'')\,\delta(q_2 - \upsilon_2'')\,\delta(q_3 - \upsilon_3'')$$

$$\equiv \int dq_1\,dq_2\,dq_3\; \delta(q_1 - \upsilon_1')\,\delta(q_2 - \upsilon_2')\,\delta(q_3 - \upsilon_3') \times \delta(q_1 - \upsilon_1'')\,\delta(q_2 - \upsilon_2'')\,\delta(q_3 - \upsilon_3'')$$

$$= \delta(\upsilon_1' - \upsilon_1'')\,\delta(\upsilon_2' - \upsilon_2'')\,\delta(\upsilon_3' - \upsilon_3'').$$

5) Да се върнем на системата от взаимно комутиращи самоспрегнати оператори $\hat{P}_\mu$ и техните съвместни, обобщени собствени вектори $|k, A\rangle$, $k \in \mathbb{R}^{3,1}$, A - допълнителен индекс. Множеството

$$\Sigma := \{ k \in \mathbb{R}^{3,1} \,|\, \exists \text{ обобщен собствен вектор } |k, A\rangle \}$$

се нарича съвместен спектър на $\hat{P}_0, \hat{P}_1, \hat{P}_2$ и $\hat{P}_3$. (По-точно, съвместния спектър може да се определи като носителя на съвместната спектрална мярка.) Забележете, че проекцията по оста на e_0 (оста x^0)

$$pr_0(\Sigma) = \text{спектъра на } \hat{P}_0$$

$$(\; pr_0 : \mathbb{R}^{3,1} \to \mathbb{R} : (k_\mu) \mapsto k_0 \;).$$

$\Rightarrow$ съгласно нашия първи постулат Σ е ограничено от долу по координатата k_0 (т.е., по оста e_0).

<u>Забележка.</u> Както всяко спектрално множество, Σ се оказва затворено подмножество на $\mathbb{R}^{3,1}$.

6) <u>Твърдение.</u> За $\forall \Lambda \in Spin_0(3,1)$: $\mathcal{U}(\Lambda)|k, A\rangle$ е обобщен собствен вектор на $\hat{P}_\mu$ със собствена стойност $(\Lambda k)_\mu$.

<u>Доказателство.</u> $\hat{P}_\mu \mathcal{U}(\Lambda)|k, A\rangle \overset{?}{=} (\Lambda k)_\mu \mathcal{U}(\Lambda)|k, A\rangle$.

$$\hat{P}_\mu \mathcal{U}(\Lambda)|k, A\rangle = \mathcal{U}(\Lambda)\left(\mathcal{U}(\Lambda)^{-1}\hat{P}_\mu \mathcal{U}(\Lambda)\right)|k, A\rangle$$

$$= \mathcal{U}(\Lambda) \; (\Lambda^{-1})_\mu^{\;\nu} \hat{P}_\nu |k, A\rangle = (\Lambda^{-1})_\mu^{\;\nu} k_\nu \, \mathcal{U}(\Lambda)|k, A\rangle.$$

Но $(\Lambda^{-1})_\mu^{\;\nu} k_\nu = \eta_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha_{\;\beta} k^\beta = (\Lambda k)_\mu$ - проверете. $\square$

7) <u>Следствие</u>.

- Всяка Лоренцова трансформация Λ изобразява Σ в себе си,

$$\Lambda(\Sigma) \subseteq \Sigma .$$

С други думи, Σ е Лоренц-инвариантно множество

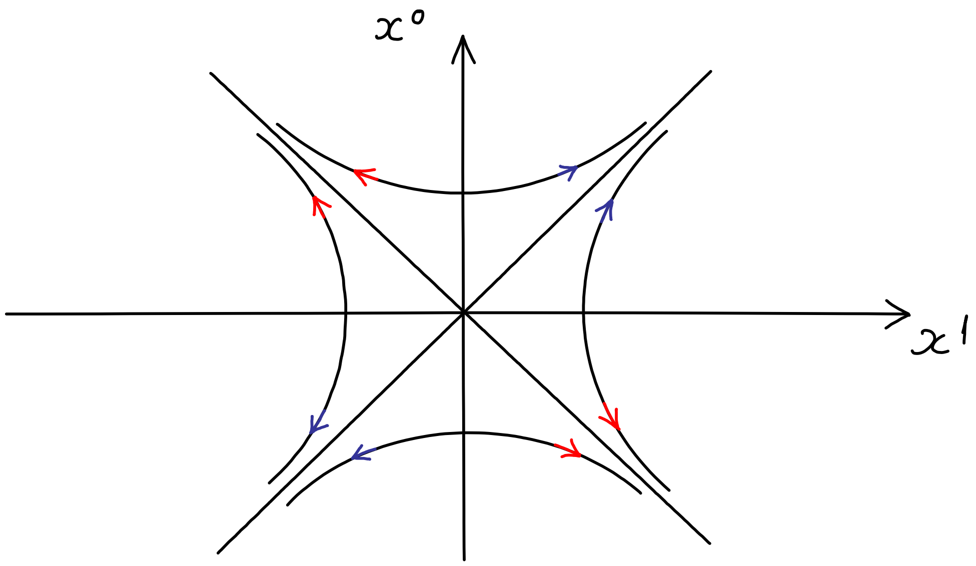
- $\Sigma \subseteq V_+$ (конусът на бъдещето).

- Вакуумът Ω е общ собствен вектор за $\hat{P}_\mu$ (действителен собствен вектор) със собствена стойност 0,

$$\hat{P}_\mu \Omega = 0 .$$

Всъщност, $U(a,\Lambda)\Omega = \Omega$ - вакуумът е Поанкаре-инвариантен.

<u>Доказателство</u>. Първата точка е непосредствено следствие от предното твърдение. Втората точка следва от Лоренцовата инвариантност на Σ от една страна, и неговата ограниченост отдолу по оста x^0. Наистина, долната фигура илюстрира, че всяка точка лежаща извън V_+ се разнася от Лоренцовите трансформации неограничено надолу по оста x^0:

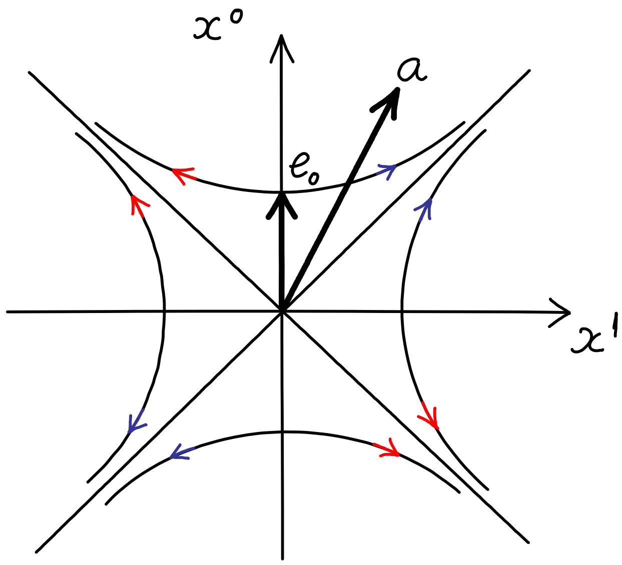


По-подробен аргумент е, че заедно със всяка своя точка Σ съдържа и някой от хиперболоидите Γ_μ $(\mu \geq 0)$ или $\Gamma^\pm_\mu$ $(\mu \leq 0)$, който минава през нея (понеже това са орбитите на свързаната група на Лоренц, аналогично на сферите в Евклидово пространство, които са орбитите на групата на въртене). Но от тези хиперболоиди само Γ^+_μ $(\mu \leq 0)$ са ограничени от долу по оста x^0 и

$$\Sigma \subseteq \bigcup_{\mu \leq 0} \Gamma^+_\mu = V_+ . \Rightarrow \quad \Sigma \subseteq V_+ .$$

И по третата точка от следствието, най-напред от това, че вакуумният вектор Ω е собствен вектор за $\hat{P}_0 = \hat{P}(e_0)$ то следва, че Ω е собствен вектор за $\hat{P}(a)$ при $\forall a \in V_+$. Наистина, за $\forall a \in V_+$, $\exists \Lambda \in Spin_0(3,1)$ така, че

$$a = \sqrt{-a^2}\, \Lambda e_0 .$$



Тогава подобно на твърдението от точка 6) се доказва, че Ω е собствен вектор на $\hat{P}(\Lambda e_0)$ за $\forall \Lambda \in Spin_0(3,1)$ и $\Rightarrow$ за $\hat{P}(a)$ при $\forall a \in V_+$, и $\Rightarrow$ за $\hat{P}(a)$ при $\forall a \in \mathbb{R}^{3,1}$ (поради линейността по a).

И така, Ω е общ собствен вектор за $\hat{P}_\mu$,

$$\hat{P}_\mu \Omega = k^{(0)}_\mu \Omega , \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 .$$

Но от $U(\Lambda)\Omega = e^{i\alpha(\Lambda)}\Omega$:

$$P_\mu \Omega = e^{-i\alpha(\Lambda)} P_\mu U(\Lambda)\Omega =$$
$$= e^{-i\alpha(\Lambda)} U(\Lambda)\left(U(\Lambda)^{-1} P_\mu U(\Lambda)\right)\Omega$$
$$= (\Lambda^{-1})_\mu^{\ \nu} e^{-\alpha(\Lambda)} U(\Lambda)\hat{P}_\nu \Omega = (\Lambda^{-1})_\mu^{\ \nu} k_\nu^{(0)} \Omega .$$

$\Rightarrow \Lambda k^{(0)} = k^{(0)}$ $\forall \Lambda \in Spin_0(3,1)$. $\Rightarrow k^{(0)} \equiv (k_\mu^{(0)}) = 0$, т.е. $\hat{P}_\mu \Omega = 0$ $\forall \mu$. $\Rightarrow U(a)\Omega = \Omega$ за $\forall a \in \mathbb{R}^{3,1}$, понеже

$$U(ta)\Omega = e^{i a^\mu \hat{P}_\mu t}\Omega = \Omega .$$

И накрая, защо $U(\Lambda)\Omega = \Omega$ за $\forall \Lambda \in Spin_0(3,1)$?
От условието

$$U(\Lambda)\Omega = e^{i\alpha(\Lambda)}\Omega \quad \text{за} \quad \alpha(\Lambda) \in \mathbb{R}$$

получаваме, че съответствието $\Lambda \mapsto e^{i\alpha(\Lambda)}$ задава морфизъм на групи

$$Spin_0(3,1) \longrightarrow U(1) \quad \text{(проверете!)}.$$

(Такива морфизми се наричат характери.) Но за групата $Spin_0(3,1)$ има единствен такъв групов морфизъм, $\Lambda \mapsto 1$ – факт, който ще използваме на готово и който е в сила за всяка полупроста група на Ли.
$\Rightarrow U(\Lambda)\Omega = \Omega$ за $\forall \Lambda \in Spin_0(3,1)$. $\square$

Често се постулира от самото начало: вакуумния вектор Ω е единствения с точност до мултипликативна константа, Поанкаре инвариантен вектор – факт, който ние доказахме от малко по-слаби предположения.