Квантова Теория на Полето и Елем. Частици

Лекция

0. Допълнение към предната лекция

- алгебри с константи
  - най-често алгебри с 1

$$1 \cdot a = a = a \cdot 1$$

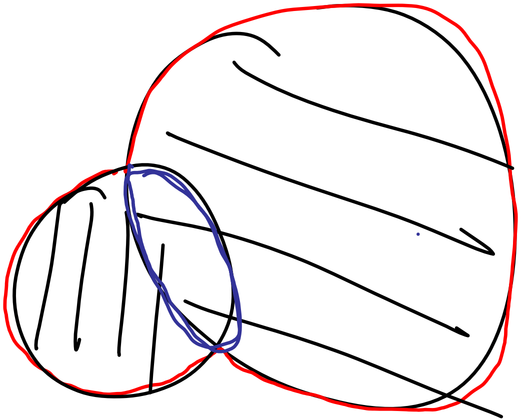
лява дясна

Заб. Не $\forall$ асоц. алг. има 1 – например

а) Финитните функц. в/у $\mathbb{R}^N$

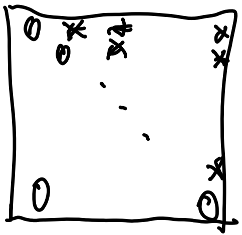
такива са $= 0$ извън огр. множ.

– алгебра са – като ги умножим пак са финитни



Но 1 би била константната функц., която не е финитна

б) ∀ строго горно триъгълни матрици



в) $\forall$ идеал, ако е съществено различен от цялата алгебра не съдържа единицата на алгебрата

$$1 . a = a$$

$$\underset{J}{\uparrow} \longrightarrow \in J$$

1. Морфизми на алгебри

morphisms

homomorphism

в алгебрата

homeomorphism

в топологията

а) <u>Опр.</u> Ако има някакъв тип алгебри (асоциативни, Ли, Поасонови, още с 1) морфизъм на този тип е $\forall$ лин. изобр.

$$\alpha : V_1 \longrightarrow V_2$$

пространствата на алгебрите

така, че α запазва $\forall$ операции и евентуално и константите (ако са в тях)

$$\alpha(v_1 \cdot v_2) = \alpha(v_1) \cdot \alpha(v_2)$$

$$\forall\, v_1, v_2 \in V_1$$

запазване на операциите

$$\alpha(1_{V_1}) = 1_{V_2}$$ $\leftarrow$ запазване на 1

Заб.   Не $\forall$ морфизъм на асоц. алгебри е морфизъм на алг. с 1

$$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$$

за $N \geq n$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \alpha(A)}}{\underbrace{\overset{n}{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}_{N}} \; \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha(B)}}{\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha(AB)}}{\overset{n}{\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$1 \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 1_{\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})}$$

б) Видове морфизми

Мономорфизми = морфизъм, който
мономорфисмс инекция / injection
$\equiv$ injective morphism

(Инекция означава, че различни елементи се изобразяват в различни
$$a \neq b \Rightarrow \alpha(a) \neq \alpha(b)$$)

$$\alpha : V_1 \rightarrowtail V_2$$

епиморфизми = α е $\underbrace{\text{изображение "върху"}}$

epimorphism

сюрективно / surjective

сюрекции

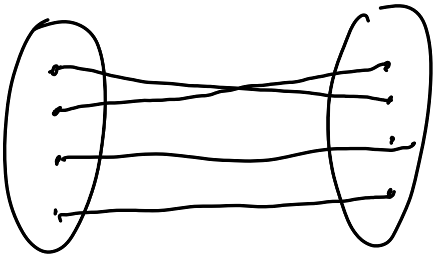
$$\alpha(V_1) = V_2$$

$$\alpha : V_1 \twoheadrightarrow V_2$$

$\underline{\text{mono}} + \underline{\text{epi}} = \text{isomorphism}$

различава различните

покрива образа



якщо isomorphism ≡ bijection
біекція

ендоморфізм / endomorphism

$$V_1 = V_2$$

$$\alpha : V \to V$$

-морфизми на алгебра в себе си

авто = ендо + изо

в) Теореми за моно- и епи-морфизмите

- Ако $\alpha : V_1 \rightarrowtail V_2$ е мономорф., то

образът $\underset{\substack{\parallel \\ W}}{\alpha(V_1)}$ е подалгебра на V_2

и $\exists!$ морфизъм $\tilde{\alpha} : V_1 \to W$

такъв че диаграмата

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[d, "\tilde{\alpha}"'] & \\
W \arrow[r, hook, "\text{влагането}"'] & V_2
\end{tikzcd}$$

При $\tilde{\alpha}$ е изоморфизъм.

- Ако $\alpha : V_1 \twoheadrightarrow V_2$ е епиморф.

тогава

$$\mathrm{Ker}\,\alpha := \{ v \in V_1 \mid \alpha(v_1) = 0 \}$$

ядрото е идеал (двусторанен)

∃! морфизъм $\tilde{\alpha} : V_2 \to V_1/\operatorname{Ker}\alpha$

така, че диаграмата

$$
\begin{tikzcd}
 & V_2 \arrow[d, "\tilde{\alpha}"] \\
V_1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r] & V_1/\operatorname{Ker}\alpha
\end{tikzcd}
$$

$v \mapsto v + \operatorname{Ker}\alpha$

канонична пр. — тя е също епиморфо.

При това $\tilde{\alpha}$ е изо

2. $*$-алгебри (това ще бъде допълнит. структура в асоц. алг.)

<u>Опр.</u> Нека $\mathcal{A}$ е асоц. алгебр. (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

$*$-алгебр. е допълнително задаване на една едноместна операция

$$* : \mathcal{A} \to \mathcal{A} : \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{A}} \mapsto A^*$$

а) инволютивность / involution $\quad A^{**} = A$

б) (анти)линейность

$$(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$$

числа $\qquad \in \mathcal{A}$

$\bar{\alpha}$ е компл. спрягане ($\Rightarrow$ ако $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\bar{\alpha} = \alpha$)

б) Антиморфизъм $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$

Involutive algebras

$A = A^* \iff A$ е самоспрегнат ел-т

комплексна

Тв. $\forall C \in \mathcal{A} \quad \exists A, B$ – самоспр., т.че:

$C = A + iB$, където $A = \frac{1}{2}(A + A^*) = A^*$ и $B = \frac{1}{2i}(A - A^*) = B^*$.

реална част на C имагинерна

б) Мотивация

б1) <u>Аксиома</u> $\exists$ $*$-алг. $\mathcal{A}$ т.че

A е наблюд. $\iff$ $A \in \mathcal{A}$, $A = A^*$

$$AB + (AB)^* = AB + \overset{B^*}{\overset{\parallel}{B}}\,\overset{A^*}{\overset{\parallel}{A}}$$

52) Каква инфо. ни дава алг. структура

- информацията за спектъра на наблюдаемите – вж. спектр. теорема в *-алг. по-долу

- дава нареда и помага за пол... положит.

$A \leq B \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} \exists C$ - набл.

набл.

$B - A = C^2$

$A \geq 0$ - неотриц. наблюд. $\Longleftrightarrow \exists C$ - набл.

$A = C^2$