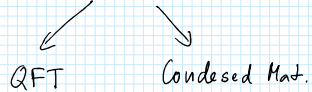


3. Математическа теория на  $\ast$ -алгебри

R. Haag - Algebraic Quantum Theory



Опр. Положителна  $\ast$ -алгебра (моя термин)

/ формално реални = formally real /

А е такава, ако  $\forall A_1, \dots, A_n$  - само оператори

$$A_1^2 + \dots + A_n^2 = 0 \Rightarrow A_1 = \dots = A_n = 0$$

Заб. Има пример с  $2 \times 2$  матрици  
където  $y^2 + 1 = 0, y = y^*$

$$\Leftrightarrow \forall c_1, \dots, c_n$$

$$c_1^* c_1 + \dots + c_n^* c_n = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$

Теорема.  $\forall$  положителна, крайно-мерна

$\ast$ -алгебра е изоморфна на

една от следни примери

- за  $\forall$  някоя еднородна група  $k_1, \dots, k_\ell$

$$\text{Mat}_{k_1, \dots, k_\ell}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline \end{array} \right\}, n = k_1 + \dots + k_\ell$$

- образува подалгебра на  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$

и  $\ast$ -операцията е ермитово спрягане

$$\downarrow$$

$$A^* \equiv A^{-} := \overline{A^T} = \bar{A}^T$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) (x_{i+1} - x_i)$$

дискретизация  
решаване с горни

Constructive QFT

Опр. Иземност в алгебра

$$Q^2 = Q$$

$$\text{Самостоятелна иземност} = Q^2 = Q = Q^*$$

Интерпретация - това са квантови  
состояния които имат само две  
свойности 0 и 1

- каквато се въздържа, Q е квантумно  
 $\Leftrightarrow Q = 1$

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0, 1$$

Теорема Ако A е полож., кр.-мер.  $\ast$ -оп.

и  $A = A^* \in \mathcal{A}$  - самопр. ел-т

Това е  $\exists$  еднородна с отново до иземност  
решаване с горни

$$(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_\ell, Q_\ell)$$

където  $\alpha_j \in \mathbb{R}, Q_j$  е иземност  $\neq 0$   
с.е. обичайно

и  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  - са две по две различни

Общи това се изготвяват равенства

(Spectral decomposition)

$$\bullet A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_\ell Q_\ell$$

(Разбиване на 1 = partition of unity)

$$\bullet 1 = Q_1 + \dots + Q_\ell$$

$$\bullet Q_j \cdot Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

$$= \delta_{j,k} Q_j = \delta_{i,k} Q_k$$

$\uparrow$   $\delta$ -символ на Кронекер

$$\delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Пример:  $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \dots & & \\ & & 1 & \\ & & & \dots \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \dots & & \\ & & 1 & \\ & & & \dots \end{pmatrix}, \dots$

$$A = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \dots = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \alpha_2 & \\ & & & \dots \end{pmatrix}$$

- проект. спектра на A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Това е по-голямо за  
спектор избор с. нар.  
по-голямо за представяне  
на алг.