3. Математическа теория на $*$-алгебрите

R. Haag – Algebraic Quantum Theory

$\swarrow$ QFT $\qquad \searrow$ Condesed Mat.

<u>Опр.</u> Положителни $*$-алгебри (мой термин)

/ формално реални = formally real /

$\mathcal{A}$ е такава, ако $\forall A_1, \dots, A_n$ – самоспрегнати

$$A_1^2 + \dots + A_n^2 = 0 \Rightarrow A_1 = \dots = A_2 = 0$$

<u>Заб.</u> Има прост пример с 2×2 матрици, където $J^2 + 1 = 0$, $J = J^*$

$$\Leftrightarrow \forall C_1, \dots, C_n$$

$$C_1^* C_1 + \dots + C_n^* C_n = 0 \Rightarrow C_1 = \dots = C_n = 0$$

<u>Теорема.</u> $\forall$ положителна, крайно-мерна $*$-алгебра е изоморфна на една от следните примери

– за $\forall$ набор естествени числа $k_1, \dots, k_\ell$

$$\mathrm{Mat}_{k_1,\dots,k_\ell}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} k_1 & & & k_\ell \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} k_1 \\ \\ \\ k_\ell \end{array} & \begin{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \end{pmatrix} \end{array} \right\}, \quad n = k_1 + \dots + k_\ell$$

– образува подалгебра на $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$

и $*$-операцията е <u>ермитовото</u> спрягане

$$\downarrow$$

$$A^+ \equiv A^- := \overline{A^T} = \bar{A}^T$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} {}_{i=1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

дискретизация

решетъчни теории

Constructive QFT

<u>Опр.</u> Идемпотент в алгебра

$$Q^2 = Q$$

Самоспрегнат идемпотент $= Q^2 = Q = Q^*$

Интерпретация – това са наблюдаеми които имат само две стойности 0 и 1

– нарича се събитие, Q е настъпило $\Leftrightarrow Q = 1$

$$x^2 - x = 0 \quad - \quad x_{1,2} = 0, 1$$

<u>Теорема</u> Ако $\mathcal{A}$ е полож., кр.-мер. $*$-алг. и $A = A^* \in \mathcal{A}$ – самоспр. ел-т

Тогава $\exists$ единствена с точност до пренареждане редица от двойки

$$(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_\ell, Q_\ell)$$

където $\alpha_j \in \mathbb{R}$, Q_j е $\underbrace{\text{самоспр. идемпотент}}_{\text{т.е. събитие}} \neq 0$

и $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – са две по две различни

Освен това се изпълняват равенствата

(Spectral decomposition)

- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_\ell Q_\ell$

(Разбиване на 1 = partition of unity)

- $1 = Q_1 + \dots + Q_\ell$
- $Q_j \cdot Q_k = \begin{cases} Q_j & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases} = \delta_{j,k} Q_j = \delta_{j,k} Q_k$

δ-символ на Кронекер

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

<u>Пример:</u> $Q_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix}}^{\,k_1} & \\ & \begin{smallmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix}^{\,k_2} & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\dots$

$$A = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \dots = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_1 & & & \\ & & & \alpha_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

– продълж. следващия път

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & 0 & \\ & 0 & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Това е понятие за спектър извън т. нар. понятие за представяне на алг.