Николай М. Николов

Лекции по Квантова теория на полето и елементарните частици

Лекции от 1 до 5, 9.11.2015/v1

Стил на цитиранията:

- Номерацията на формулите в дадена лекция включва (*номер на точката* . *номер на формулата*) и така се цитират в рамките на същата лекция.
- Цитирани формули от други лекции имат добавка в началото (Л.../*номер на лекцията*/ . *номер на точката* . *номер на формулата*).

- Фигурите са с обща номерация в рамките на една лекция и вътре в нея се цитират с този номер. Фигури от друга лекция се цитират с прехождащ номер на лекцията от която са.

Съдържание

Предварителен план на останалите лекции:

- *Спин. Фермиони* (лекция 13)
- *Квантово-механично описание на елементарна частица* (лекция 14)
- *Основни принципи на квантовата теория на полето* (лекция 15)

Поради големия материал повечето теми ще бъдат изложени без изводи и доказателства, които по възможност ще бъдат поместени в приложения към лекциите.

Уводни бележки

Квантовата теория на полето (КТП/QFT – Quantum Field Theory) е съвременният апарат (теоретична рамка) на теория на елементарните частици. Съгласно тези представи елементарните частици не са никак елементарни нито в пряк, нито в преносен смисъл, а са по-скоро прояви на някакъв колективен феномен, наречен квантово поле. Ние ще демонстрираме тази идея в настоящите лекции на модела на трептения на кристална решетка (или по-точно, на едномерния му вариант – трептяща верижка), чийто елементарни възбуждения се наричат фонони и имат характер на частици. Във физиката фононите са пример на така наречените квазичастици, но съгласно КТП елементарните частици са "точно толкова" нереални или както по-точно казват ефективни обекти, колкото и квазичастиците като фононите. Тези идеи в КТП и съпровождащия ги теоретичен апарат по такъв начин придобиват приложимост далеч извън пределите на физиката на елементарните частици. Например, методите на КТП се използват отдавна във физиката на кондензираната материя (condensed matter physics).

Единици и мащаби във физиката и микросвета

Като увод към тези лекции ще започнем с обзор по мащабите и единиците, които са характерни за физиката на елементарните частици. Този увод не е съществен за настоящия курс, но ще послужи за едно общо припомняне на някои основни понятия от физиката, които се изучават още в училище. Преди всичко да си припомним, че във физиката боравим с величини, които невинаги са сравними и по тази причина не всякакви числови операции над тях са допустими. Например, събирането на дължина и маса е лишено от всякакъв смисъл. От друга страна, умножаването и деленето е винаги допустимо и тогава получаваме величини с производен характер, като например скоростта, която е отношение на разстояние и време. Тези на пръв поглед очевидни и естествени правила налагат силни ограничения във формата на физичните закони.

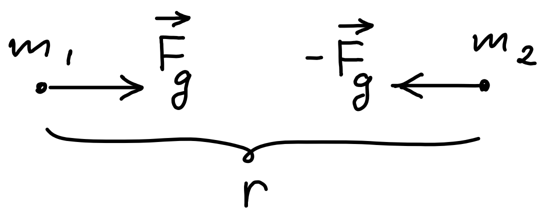
В механиката започваме с три основни величини и съответно единици: $\mathbb{L}$ (дължина, m - метър), $\mathbb{T}$ (време, s - секунда), $\mathbb{M}$ (маса, kg - килограм), а ето и някои от основните производни величини:

$$
\begin{array}{ll}
\text{скорост:} & \mathbb{V} = \mathbb{L}\,\mathbb{T}^{-1} \\
\text{ускорение:} & \mathbb{A} = \mathbb{V}\,\mathbb{T}^{-1} = \mathbb{L}\,\mathbb{T}^{-2} \\
\text{сила:} & \mathbb{F} = \mathbb{A}\,\mathbb{M} \;\; = \mathbb{L}\,\mathbb{T}^{-2}\,\mathbb{M} \\
\text{енергия:} & \mathbb{E} = \mathbb{V}^2\,\mathbb{M} \;\; = \mathbb{L}^2\,\mathbb{T}^{-2}\,\mathbb{M}
\end{array}
$$

(Размерностите на сила и енергия се пресмятат от основните закони в механиката, като връзката между сила F, ускорение a и маса m, $F = m\,a$, както и формулата за кинетична енергия на материална точка с маса m и скорост v, $\mathcal{E}_{\text{kin}} = \frac{m\,v^2}{2}$).

Във физическите закони при изразяване на релации между величини с различни размерности възникват константи, които изравняват тези размерности. Един от първите примери за това е законът на Нютон за всемирното привличане (Newton's law of universal gravitation, 1687):

$$\underbrace{F_g}_{\substack{\mathbb{L}\,\mathbb{T}^{-2}\,\mathbb{M}\\ \text{(размерност)}}} = k_g\, \underbrace{\frac{m_1\, m_2}{r^2}}_{\substack{\mathbb{M}^2\,\mathbb{L}^{-2}\\ \text{(размерност)}}}$$



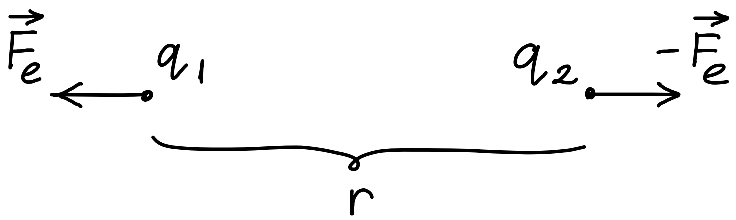
Фигура 1: Гравитационно привличане между две материални точки

където F_g е големината на силата на привличане между две материални точки с маси m_1 и m_2 разположени на разстояние r една от друга. Както виждаме, различието в размерностите от двете страни на равенство налага въвеждане фундаментална физична константа k_g, наречена гравитационна константа, имаща нетривиална размерност, която се означава с $[k_g]$ и се изразява непосредствено:

$$[k_g] \,=\, \mathbb{L}^3\,\mathbb{T}^{-2}\,\mathbb{M}^{-1}\,.$$

Около 100 години по-късно подобен закон е открит от Кулон (Coulomb, 1785) за нов тип сили, електростатичните:

$$\underbrace{F_e}_{\mathbb{L}\,\mathbb{T}^{-2}\,\mathbb{M}} = k_e\,\underbrace{\frac{q_1\,q_2}{r^2}}_{\mathbb{Q}^2\,\mathbb{L}^{-2}}$$



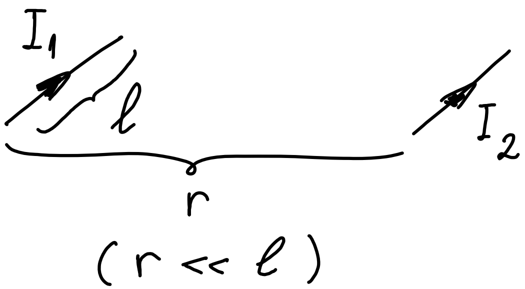
Фигура 2: Електростатични сили между два едноименни (еднакви по знак) точкови заряди

където F_e е големината на електростатичната сила на отблъскване (или привличане в зависимост от знаците на електричните заряди) между два точкови заряда q_1 и q_2 разположени на разстояние r един от друг.

Независимо, че законите за F_e и F_g са математически идентични, между тях има една съществена разлика от метрологична гледна точка. Електростатичната сила е единственото проявление на електричните заряди, известно до този момент. Ето защо, законът на Кулон може да се приеме като определящ единицата за електричен заряд, която абстрактно сме означили с $\mathbb{Q}$ по-горе. Това на практика означава да положим електростатичната константа k_e, която е въведена в закона на Кулон, за равна на 1 (или друга подобна числова стойност).

Така фактически закона на Кулон не въвежда нова физична константа и това щеше да остане така, ако зарядите нямаха и друга динамична проява. А именно, движещите се заряди си взаимодействат с нов тип сила, магнитната сила. Движещите се заряди формират ток I (по определение I е протекъл заряд за единица време). Законът за големината на силата F_m, с която си взаимодействат два тока I_1 и I_2 течащи по два успоредни проводника с (достатъчно голяма) дължина l, разположени на разстояние r един от друг е открит от Ампер (Ampère's force, 1820):

$$\underbrace{F_m}_{\substack{\mathbb{L}\,\mathbb{T}^{-2}\,\mathbb{M}\\ \text{(размерност)}}} = k_m\ \underbrace{I_1\, I_2\, \frac{2\,l}{r}}_{\substack{\mathbb{I}^2\\ \text{(размерност)}}}$$



Фигура 3: Сила на Ампер

Константите k_e и k_m (електростатичната и магнитната) престават да бъдат независими от метрологична гледна точка. Наистина, ако отчетем връзката между единиците за ток и заряд:

$$\mathbb{I} = \mathbb{Q}\,\mathbb{T}^{-1}$$

и разделим почленно размерностите в законите за F_e и F_m, то ще получим

$$\left(\left[\frac{F_m}{F_e}\right] =\right) 1 = \left[\frac{k_m}{k_e}\right]\frac{\mathbb{Q}^2\,\mathbb{T}^{-2}}{\mathbb{Q}^2\,\mathbb{L}^{-2}},$$

$$\text{т.е.} \quad \left[\frac{k_m}{k_e}\right] = \frac{\mathbb{L}^2}{\mathbb{T}^2}$$

има размерност на квадрат на скорост и следователно

$$c = \sqrt{\frac{k_m}{k_e}}$$

въвежда нова фундаментална физична константа с размерност на скорост. В края на 19-ти век тази константа е свързана от Максуел

(James Maxwell) със скоростта на разпространение (във вакуум) на така наречените електромагнитни вълни. Заедно с това е установено и че светлината е електромагнитно лъчение (вълна) и така константата c съвпада със скоростта на светлината. Връзката между скоростта на светлината и законите на електромагнетизма е едно от най-великите открития във физиката и е в основата на (специалната) теория на относителността. Както видяхме по-горе предпоставките за това са налице още с откриването на закона за силите на Кулон, F_e, и на Ампер, F_m, тъй като това показва, че тези закони, които от една страна са еднакви във всички инерциални отправни системи, съдържат в себе си фундаментална константа с размерност на скорост, която по такъв начин също се оказва универсална за всички инерциални отправни системи. В първата лекция ние ще направим малко по-подробен преглед на класическата електродинамика, уравненията на Максуел и постоянството на скоростта на светлината.

Последната фундаментална константа, на която ще се спрем в този обзор, е константата $\hbar$ на Планк (Макс Планк, Max Planck) предложена от него през 1900, като връзка между енергия $\mathcal{E}$ и (кръгова) честота ω на електромагнитното лъчение в закона за излъчване на абсолютно черно тяло:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega \,.$$

По-късно в този курс ние ще въведем константа на Планк $\hbar$ във връзка с постулатите на квантовата механика и по-специално с така наречените канонични комутационни съотношения. За целите на метрологичния преглед, който правим в момента, за нас е важно единствено, че тъй като честотата е величина, характеризираща периодично явление и се определя като единица върху период от време, то

$$\mathbb{E} = [\hbar]\,\mathbb{T}^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad [\hbar] = \mathbb{E}\,\mathbb{T} = \mathbb{L}^2\,\mathbb{T}^{-1}\,\mathbb{M}$$

(след като заместим размерността $\mathbb{E}$ на енергията, която изведохме по-горе).

В резюме, да отбележим, че стартирайки от трите основни размерни величини в механиката: дължина $\mathbb{L}$, време $\mathbb{T}$ и маса $\mathbb{M}$, ние въведохме три фундаментални физични константи, които се оказват с независими размерности:

$$\text{гравитационна константа} k_g :$$

$$[\,k_g\,] = \mathbb{L}^3\,\mathbb{T}^2\,\mathbb{M}^{-1}\,,$$

$$\text{скорост на светлината} c :$$

$$[\,c\,] = \mathbb{L}\,T^{-1}\,,$$

$$\text{константа на Планк}\hbar:$$

$$[\,\hbar\,] = \mathbb{L}^2\,T^{-1}\,\mathbb{M}\,.$$

Разполагайки с три връзки между трите независими единици $\mathbb{L}$, $\mathbb{T}$ и $\mathbb{M}$ ние можем да ги изразим обратно чрез размерностите на фундаменталните константи:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}\ &= [\,k_g\,]^{1/2}\,[\,\hbar\,]^{1/2}\,[\,c\,]^{-3/2}\\
\mathbb{T}\ &= [\,k_g\,]^{1/2}\,[\,\hbar\,]^{1/2}\,[\,c\,]^{-5/2}\\
\mathbb{M} &= [\,k_g\,]^{-1/2}\,[\,\hbar\,]^{1/2}\,[\,c\,]^{1/2}\,.
\end{aligned}$$

По такъв начин константите k_g, c и $\hbar$ въвеждат абсолютни еталони за основните единици – това са така наречените планкови единици

(Planck's units):

планкова дължина (Planck's length) :

$$l_P = \sqrt{\frac{k_g\,\hbar}{c^3}} = 1.616 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m}\,,$$

планково време (Planck's time) :

$$t_P = \sqrt{\frac{k_g\,\hbar}{c^5}} = 5.391 \cdot 10^{-44}\,\mathrm{s}\,,$$

планкова маса (Planck's mass) :

$$m_P = \sqrt{\frac{c\,\hbar}{k_g}} = 2,177 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg}\,.$$

Метрологичният смисъл на горните еталони е, че това са единиците, при които константите k_g, c и $\hbar$ имат стойност 1. Физическият смисъл на планковите единици все още не е напълно изяснен (нека направим аналогия с константата c, която е налице още през 1820 с откриването на закона за силата на Ампер, но тя получава пълна физична интерпретация десетилетия по-късно в теория на Максуел за електромагнетизма). Съвременното схващане за смисъла на планковите единици е, че това са мащабите, при които гравитацията (или пространство-времето) започва да проявява квантови свойства.

В този курс от лекции от фундаменталните константи k_g, c и $\hbar$ ще играят роля константите c и $\hbar$, отначало независимо, а в последствие и съединени в така наречената релативистична квантова механика (Relativistic Quantum Mechanics), която фактически е същинската част на квантовата теория на полето. Константата на Планк $\hbar$ ще въведем във връзка с квантовата механика. Скоростта на светлината c ще обсъдим подробно заедно с увод в специалната теория на относителността. За съжаление обаче последната останала, но исторически първа фундаментална константа, гравитационната k_g, няма да играе никаква роля в този курс. Създаването на обединена теория на гравитацията и квантовите полета остава все още неизпълнима задача, макар и да е едно от интензивно развиващите се направления в съвременната теоретична физика.

В квантовата теория на полето широко разпространена и удобна система от единици е системата, в която константите $\hbar$ и c са равни на 1. Разполагайки само с две връзки между основните механични единици $\mathbb{L}$, $\mathbb{T}$ и $\mathbb{M}$ (които идват от размерностите на $\hbar$ и c), ние можем да изключим две единици и да оставим една независима механична единица. Често за базисна механична единица в теорията на елементарните частици се използва енергията,

$$\mathbb{E} = c^2\,\mathbb{M} = \hbar\,\mathbb{T}^{-1} = c\,\hbar\,\mathbb{L}^{-1}.$$

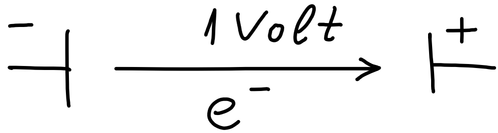
С други думи, по модул $\hbar$ и c (т.е., ако $\hbar = c = 1$):

$$\mathbb{L} = \mathbb{T} = \mathbb{M}^{-1} = \mathbb{E}^{-1}$$

(в частност виждаме, че $\mathbb{E}$ и $\mathbb{M}$ са дуални или още реципрочни единици на пространство-временните).

От друга страна, съществува специален еталон за енергия съобразен с естествените мащаби в микросвета. Това е електронволта (electron-volt, eV):

$$1\,\mathrm{eV} \;=\; 1.602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}\,(\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1})$$



Фигура 4: Електронволт е енергията, която придобива (или губи) електрон при преминаване през електричен потенциал от 1 волт (Volt)

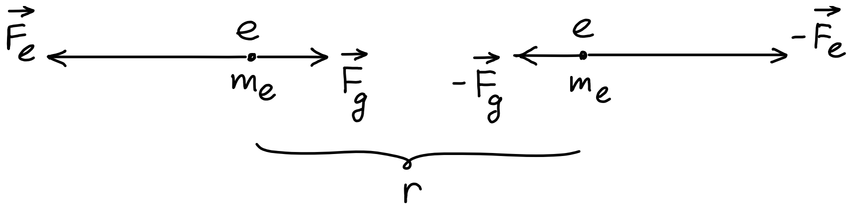
това е енергията, която придобива (или губи) електрон при преминаване през електричен потенциал от 1 волт (Volt). При този еталон за енергия масата не електрона, например се равнява на

$$\begin{aligned} m_e &= 511\,\mathrm{KeV}\,(10^3\,\mathrm{eV}) \\ &= 9.11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}. \end{aligned}$$

Други два примера: планковата единица $= 1.22 \cdot 10^{16}$ TeV $(10^{12}\,\mathrm{eV})$ (с други думи това е планковата енергия). Подбрали сме тук за опорна единица TeV(тера електронволт), тъй като това е порядъкът на най-високите енергии, при които досега са ускорявани елементарните частици (за ЦЕРН 10 TeV). И вторият пример: характерен атомен мащаб е така нареченият радиус на Бор (Нилс Бор, Niels Bohr):

$$5.29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m} = 1.35\,\mathrm{KeV}\,(10^3\,\mathrm{eV}).$$

Ще завършим нашия обзор по единиците мащабите в теория на елементарните частици с едно сравнение между електростатичната и гравитационната сила, с които взаимодействат два електрона:



Фигура 5: Сравняване между гравитационната и електростатичната сила между два електрона

И така, ако с e означим елементарния електричен заряд (зарядът на електрона), а с m_e означим масата на електрона, то от законите на Кулон и Нютон, които описахме в началото, получаваме съответно:

$$F_e = \frac{k_e\, e^2}{r^2}, \qquad F_g = \frac{k_g\, m_e^2}{r^2}.$$

Така числителите на двата закона имат еднаква размерност и тя непосредствено се проверява, че може да се изрази чрез $\hbar$ и c:

$$\left[\, k_e\, e^2 \right] = \left[\, k_g\, m_e^2 \right] = \left[\, \hbar\, c \,\right].$$

С други думи, в системата $\hbar = c = 1$, $k_e\, e^2$ и $k_g\, m^2$ са безразмерни числа, чийто стойности се оказват съответно:

$$\alpha := \frac{k_e\, e^2}{\hbar\, c} \approx 7.28 \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{137}$$

- константа на фината структура

$$\frac{k_g\, m_e^2}{\hbar\, c} = \frac{m_e^2}{m_P^2} = 1.75 \cdot 10^{-45}\,.$$

Така отношението между двете сили F_e и F_g в случая на двата електрона е

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{k_e\, e^2}{k_g\, m_e^2} = 4.17 \cdot 10^{42},$$

което показва, че гравитацията игрäе изключително пренебрежима роля в микросвета. Това е и причината квантовата гравитация да е така „неуловима“ не само от теоретична, но и от експериментална гледна точка.

Въведената *числова* константа α се приема за основна характеристика на електромагнитното взаимодействие в квантовата теория на полето и се нарича още негова константа на връзката (coupling constant).

Лекция 1

Класическата електродинамика като класическа теория на полето

В тази лекция ще направим преглед на класическата електродинамика, който е значително по-подробен от колкото ни е нужно за целите на настоящия курс. Електромагнетизмът обаче е основен и класически пример на полева теория, което и ни кара да му отделим това по-особено внимание. Електромагнитните явления са в основата на почти цялото разнообразие на заобикалящите ни вещества и явления свързани с тях, и всичко това следва да намери своето завършено описание в квантовата електродинамика – едно от основните приложения на квантовата теория на полето.

С настоящата лекция си поставяме две главни цели. Първо, да покажем как законите на електромагнетизма завършени в теорията на Максуел (James Maxwell) указват на това, че електромагнитното поле е самостоятелно съществуващ преносител на взаимодействие. И второ, да покажем едно от най-великите теоретични предсказания във физиката: постоянството на скоростта на светлината. Последното е довело до възникването на специалната теория на относителността, с която ще се занимаем в следващите две лекции.

1. Електромагнитното поле и неговото въздействие: електричен заряд и сила на Лоренц

Електродинамиката (electrodyna–mics) или още, електромагнетизма (electromagnetism) описва един клас от сили на взаимодействие между тела притежаващи специфична характеристика, наречена *електричен заряд* (electric charge). Всъщност, електричният заряд е именно количествения израз на способността на едно тяло, както да възприема, така и да въздейства чрез електромагнитни сили. Електричният заряд, подобно и масата на телата е разпределен в обема на тялото, възможно и по нееднороден начин. За описание на това разпределение се въвежда функция $\rho(\mathbf{r}, t)$ на точките $\mathbf{r} = (x, y, z)$ на тримерното пространство и на времето t, наречена *плътност на електричния заряд*. Тук и по-нататък в тази лекция сме приели, че работим в една (произволна) инерциална отправна система, която е определена от координатна система в тримерното пространство (с оси x, y и z) и време t. По детайлно припомняне и анализ на такива основни понятия от класическата механика, като отправна система и инерциалност ще направим в следващата лекция.

И така, пълният електричен заряд q в определена област от тримерното пространството $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ в даден момент от време t ще се даде от интеграла на плътността $\rho(\mathbf{r}, t)$ в тази област:

$$\int\limits_{\Omega} \rho(\mathbf{r}, t)\, d^3r \;=:\; q\,, \tag{1.1}$$

където $d^3r = dxdydz$ е обемния елемент на интеграла. Ако Ω в (1.1) съвпада с цялото пространство $\mathbb{R}^3$, то полученият заряд q е пълния електричен заряд намиращ се в пространството в момента от време t. Съгласно закона за *запазване на електричния заряд*, пълният заряд не трябва да се променя с времето.

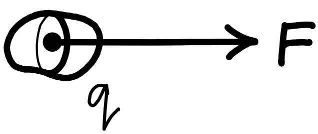
Малко по-късно в тази лекция ще се върнем на по-детайлна формулировка на този закон, която включва и движението на зарядите в пространството зададено от разпределението на електричния ток.

Още в началото, нека да отбележим че в отличие от масата, електричният заряд, както и неговата плътност могат да бъдат както положителни, така и отрицателни!

Исторически, електричният заряд е въведен на базата на електростатичното взаимодействие на заредени тела изразено чрез закона на Кулон. Ние ще се отклоним от тази линия на изложение и предполагайки електричния заряд на телата за даденост, ще определим какво е найобщото понятие за електромагнитно поле. Електромагнитното поле се се определя единствено посредством въздействието си върху заредените тела. Това въздействие се изразява в определена сила $\mathbf{F}$, електромагнитната сила, с която полето действа на заряда. Тук обаче срещаме едно принципно затруднение: самото зареденото тяло също е източник на електромагнитно поле, което ще доведе до смущение на измерването. Ето защо се въвежда идеализацията за *пробен електричен заряд*, който изпълнява редица условия целящи да прецизират измерването. Тези изисквания включват:

- пробния електричен заряд е достатъчно малък по размер за да може да улови измененията на електромагнитното поле в пространството. Пределният случай на точков електричен заряд се оказва в противоречие със следващото ни условие, тъй като както ще видим по-нататък точковият заряд е “сингулярен” обект водещ след себе си редица безкрайности.

- След достигне на задоволителен размер на зареденото пробно тяло (за целите на измерването) следва изискване за големините на неговия заряд, скорост и ускорение, които следва да са достатъчно малки за да може, както казахме по-горе, да бъде по-малко и пренебрежимо, и смущението върху измерването (породено от излъчваното от тялото електромагнитно поле).



Фигура 1: Електромагнитна сила действаща на пробен заряд

След тези уговорки експеримента ни показва, че отношението $\dfrac{\mathbf{F}}{q}$ на *вектора* на силата $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$

към заряда q на тялото вече не зависи от спецификата на тялото, а единствено от неговото положение в пространството и начина (закона) на движението му. Всъщност, именно това и цели въвеждането на електричния заряд като физична величина – да отдели такива характеристики на електромагнитното въздействие, които не зависят от пробните заредени тела. Все още обаче имаме важна зависимост от движението на тялото. Преди всичко обаче, за пробно тяло в покой горното отношение ни дава първата характеристика на електромагнитното поле: това е векторът

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) := \frac{\mathbf{F}}{q} \quad \text{при скорост } 0\,,$$

който се нарича **интензитет на електричното поле**. Силата $q\mathbf{E}$ се нарича *електрична сила*. При движение на пробното тяло е експериментално установено, че тялото получава добавка към електричната сила, наречена *магнитна сила*, за която е характерно, че зависи линейно от вектора на скоростта $\mathbf{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$ на тялото и е винаги ортогонална на нея (на скоростта). Нека да запишем това по следния начин

$$\frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{E} + B(\mathbf{v}) \,, \qquad (1.2)$$

където $B(\mathbf{v})$ е линейна трансформация върху $\mathbf{v}$, за която ако въведем матрица $\widehat{B} = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix}$ то ортогоналността на $\mathbf{v}$ и $B(\mathbf{v})$ ще доведе до това, че

$$\big(v_x, v_y, v_z\big) \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = 0 \,,$$

което на свой ред може да се покаже, че е равносилно на това че матрицата $\widehat{B}$ е антисиметрична,

$\widehat{B} = -\widehat{B}^T$.[1] Така, можем да запишем

$$\widehat{B} =: \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix},$$

като по такъв начин въвеждаме три мерен вектор $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, наречен вектор на **магнитната индукция**. Така, уравнение (1.2) може да се запише като

$$F_x = q\,E_x + q\,v_y\,B_z \tag{1.3}$$

и циклична смяна по x, y, z.

Изразът в (1.3) може да се запише в чисто векторна форма с помощта

[1] Действително, разгледайте разлагането на матрицата $\widehat{B}$ на симетрична и антисиметрична част, $\widehat{B} = \frac{\widehat{B} + \widehat{B}^T}{2} + \frac{\widehat{B} - \widehat{B}^T}{2}$ и покажете, че от ортогоналността на $\mathbf{v}$ и $B(\mathbf{v})$ за всеки вектор $\mathbf{v}$ ще следва, че всички собствени стойности на симетричната част на $\widehat{B}$ са равни на нула.

на така нареченото *векторно произведение* (cross product),

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} + q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,. \tag{1.4}$$

Последната формула носи името закон за *силата на Лоренц* (Hendrik Lorentz) и фактически представлява определението на електромагнитното поле като задавано във всяка точка $\mathbf{r} = (x,\, y,\, z)$ на пространството и момент от време t с двойката векторни функции

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\,.$$

Нека сега да обърнем внимание на един важен принцип в механиката, който има далеч отиващи последствия в цялата физика, включително и в електродинамиката. Това е *принципа на суперпозицията*, съгласно който, ако едно тяло изпитва няколко въздействия, всяко от които се определя от своя сила, $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$, съответно, то сумарното въздействие върху тялото ще се дава от вектор на силата $\mathbf{F}$ (наречен *резултантна сила*) равен на сумата на всички действащи сили:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \cdots + \mathbf{F}_n \,. \tag{1.5}$$

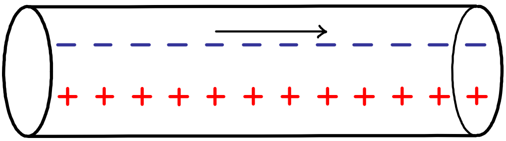
Разбира се, с това подразбираме, че всяка от силите $\mathbf{F}_k$ си има някакъв механизъм на "включване/изключване", нещо което на практика не винаги е изпълнено. Тогава, нека да разгледаме ситуация, при която след внасяне в пространството на различни електрични източници, всеки един от тях поражда върху един пробен заряд електромагнитна сила $\mathbf{F}_k := (F_{k,x},\ F_{k,x},\ F_{k,z})$ определена по закона на Лоренц (1.4) за двойка вектори на електромагнитното поле $\mathbf{E}_k := (E_{k,x},\ F_{k,y},\ F_{k,z})$ и $\mathbf{B}_k := (B_{k,x}, B_{k,y}, B_{k,z})$, при $k = 1, \ldots, n$. Тогава при едновременното въздействие на всичките източници върху пробния заряд, съгласно принципа на суперпозиция от една страна и *линейността* на закона на Лоренц (1.4) от друга,, резултантната действаща сила $\mathbf{F}$ (1.5) би се породила (по закона на Лоренц) от двойката вектори

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \cdots + \mathbf{E}_n\,, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_1 + \cdots + \mathbf{B}_n\,, \end{aligned} \tag{1.6}$$

т.е., векторната сума на приносите в електромагнитното поле на всеки един от източниците. Така, ако регистрираме електромагнитно поле с помощта на пробен заряд, което е породено от различни източници, то ние не можем да отделим частта на $\mathbf{E}_k$ и $\mathbf{B}_k$, която съответства на kтия източник. Ние говорим за *едно* (*общо*) *електромагнитно поле* в дадена точка на пространството и момент от време, и това поле именно се определя от функциите $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$.

2. Електричен ток и закон за запазване на електричния заряд

Движещите се електрични заряди формират това, което наричаме *електричен ток.* В чист вид, електричният ток са движещи се заряди в *електронеутрална среда.* Например, в един метал имаме положителни и отрицателни заряди, атомните ядра и електроните, които взаимно се компенсират. При прилагане на електрично поле обаче, електроните лесно преминават в движение (поради което се наричат "свободни електрони"). С това, в метала протича електричен ток, но той остава електронеутрален. Схема на тази ситуация е отразена на долната фигура.



Фигура 2: Електричен ток в проводник

Големината (силата) I на електричния ток се определя като пълния заряд Δq, който е преминал за единица време през напречното сечение на проводника:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Ако движещите се заряди в проводника имат големина на скоростта v, то за това време Δt те ще навлязат на дължина

$$\Delta\lambda = v\,\Delta t$$

от проводника. Следователно, движещите се заряди са разпределени по дължината на проводника с линейна плътност

$$\frac{\Delta Q}{\Delta\lambda} = \frac{I}{v} = \frac{\Delta q}{\Delta \ell}\,,$$

където в последното равенство Δq е количеството движещи се електрични заряди в част от проводника с дължина $\Delta\ell$. От тук намираме връзката

$$(\Delta q)\, v = I\,\Delta\ell\,.$$

Така, магнитната сила действаща на малък участък $\Delta\ell$ от проводник, по който тече електричен ток I се дава според закона на Лоренц (1.4) от

$$\Delta\mathbf{F} = (\Delta q)\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} = I\,\Delta\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}\,,$$

където $\Delta\boldsymbol{\ell}$ е вектор с дължина $\Delta\ell$ насочен по отсечката на проводника. Силата $\mathbf{F}$ действаща на един затворен токов контур C се получава, като разбием този контур на достатъчно малки сегменти $\Delta\boldsymbol{\ell}_k$ и сумираме силите действащи на всеки един от тях,

$$\mathbf{F} \approx \sum_k I\,\Delta\boldsymbol{\ell}_k \times \mathbf{B}_k\,.$$

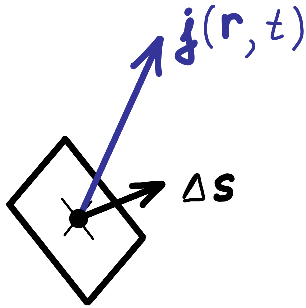
Последното е риманова интегрална сума, която апроксимира линейния интеграл:

$$\mathbf{F} = \oint_C I\,d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \qquad (2.1)$$

извършен по контура C на проводника.

Тъй като електричният ток е свързан с пренос на заряд, ние можем сега да напишем закона за запазване на електричния заряд в уточнена, локална форма. За целта ще въведем по-фино понятие за електричния ток допускащо разпределение в обема на телата подобно на електричния заряд. Това е (*векторната*) *плътност на електричния ток* $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Нека да поставим малка мислена площадка с площ Δs в точката $\mathbf{r}$ на тримерното пространство в момент от време t. Съпоставяме на тази площадка вектор $\Delta \mathbf{s}$ с големина Δs насочен перпендикулярно на нея в посока на нейното лице (следователно, става дума за ориентирана площадка – площадка с лицева страна). Тогава по определение $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = (j_x(\mathbf{r},t),\, j_y(\mathbf{r},t),\, j_z(\mathbf{r},t))$ е такъв вектор (зависещ от $(\mathbf{r},t)$), за който пълният заряд преминал през площадката $\Delta\mathbf{s}$ за единица време Δt се дава от:

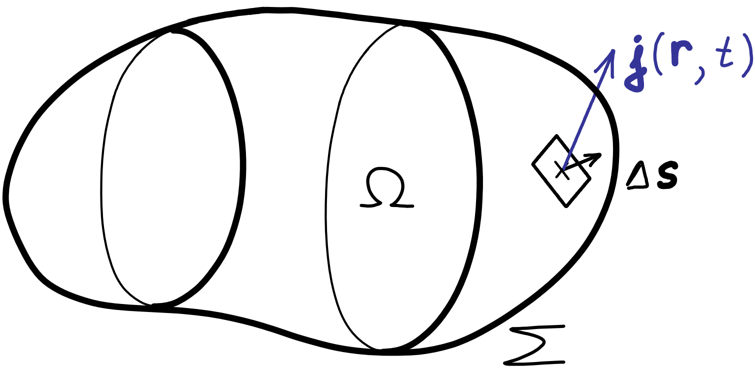
$$\Delta q \,=\, (\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot\Delta\mathbf{s})\,\Delta t\,,$$



Фигура 3: Определение на векторна плътност на електричния ток

където $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \Delta\mathbf{s}$ е скаларно произведение (то измерва проекцията на $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ спрямо посоката на $\Delta\mathbf{s}$). Така, ако е оградена мислена област Ω в тримерното пространство с граница Σ, то през нея ще протече общ ток равен на повърхнинния интеграл намиращ се в лявата страна на следното равенство,

$$\int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{s} \;=\; \frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r},t)\, d^3r\,. \tag{2.2}$$



Фигура 4: Закон за запазване на заряда

В дясната страна на последното уравнение стои скоростта изменението на пълния електричен заряд в областта Ω в момента t, което е предизвикано от протеклия през границата ток. Равенство (2.2) е и уточнения закон за запазване на електричния заряд, включващ и електричния ток Законът (2.2) има и диференциален запис:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \,. \qquad (2.3)$$

Това е пряко следствие от *теоремата на Стокс* (Stokes' theorem) във векторното интегрално смятане и формула (2.2), но този стандартен математически извод тук ще пропуснем.

3. Електромагнитно взаимодействие между токове и заряди

В тази точка ще представим двата основни закона на електромагнитно взаимодействие: законите на Кулон и на Ампер, за които споменахме още в уводните ни бележки.

Законът на Кулон се отнася за два неподвижни точкови заряди с големини q_1 и q_2, които са разположени в точки $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ на тримерното пространство: те си действат с равни по големина и противоположни по посока електрични сили,[2]

$$\mathbf{F}_{2\to1} \,=\, k_e\, q_1\, q_2\, \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \\ = \,-\mathbf{F}_{1\to2}\,, \tag{3.1}$$

където $\mathbf{F}_{2\to1}$ означава силата действаща на заряд q_1 от страна на q_2, а k_e е така наречената електрична константа (вж. също в уводните бе-

[2]полето на неподвижни заряди и силите които действат между тях се наричат също и *електростатични* за да се подчертае, че не зависят от времето поради неподвижността на зарядите

лежжки).

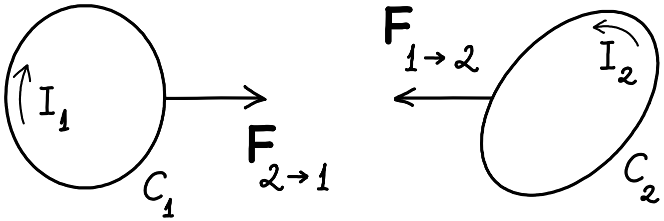
Законът за силата на Ампер се отнася за два неподвижни идеално тънки линейни проводника определени от контури C_1 и C_2 в тримерното пространство, които си действат отново с равни по големина и противоположни по посока, магнитни сили,

$$\mathbf{F}_{2\to 1} = \oint\limits_{C_1}\oint\limits_{C_2} k_m \tag{3.2}$$

$$\times \frac{I_1\, d\boldsymbol{l}_1 \times \big(I_2\, d\boldsymbol{l}_2 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\big)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

$$= \oint\limits_{C_1}\oint\limits_{C_2} k_m \frac{\big(I_1\, d\boldsymbol{l}_1 \cdot I_2\, d\boldsymbol{l}_2\big)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

$$= -\mathbf{F}_{1\to 2}\,,$$



Фигура 5: Магнитно взаимодействие на два затворени токови контури

където I_1 и I_2 са големините на токовете течащи съответно по контурите C_1 и C_2, а k_m е магнитната константа (спомената в уводните бележки). Второто равенство в (3.2) се извежда от правилата на векторното интегрално смятане (теоремата на Стокс) и е приведено за да покаже явната антисиметрия на закона при размяната $1 \leftrightarrow 2$, което и води до равенството $\mathbf{F}_{2\to1} = -\mathbf{F}_{1\to2}$.

Горните два експериментално установени закона приведохме единствено за да демонстрираме с тях някои фундаментални физически заключения до които те водят:

(а) И двата закона изпълняват третия принцип на Нютон: силите на действието и противодействието са равни по големина, но противоположни по посока. До тук по всичко изглежда, че електромагнитното взаимодействие е просто силово поле с което телата си действат едно на друго мигновено на разстояние. Точно така се е възприемал нютоновия закон за гравитацията, който управлява движението на планетите в слънчевата система. Законът на Ампер обаче, за разлика от закона на Кулон, се отнася до протяжни обекти, като контури. Следователно, от него следва да се извлече “ядро”, което да описва как два малки токови елемента $I_1\Delta\boldsymbol{\ell}_1$ и $I_2\Delta\boldsymbol{\ell}_2$ си действат един на друг.[3] Естествен кандидат за тази сила е изразът под интегралите след първото равенство в (3.2):[4]

$$\Delta\mathbf{F}_{2\to1} = k_m \frac{I_1\,\Delta\boldsymbol{l}_1 \times \big(I_2\,\Delta\boldsymbol{l}_2 \times (\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\big)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3} \neq -\Delta\mathbf{F}_{1\to2}\,, \tag{3.3}$$

[3] подобно на формула (2.1)

[4] тук е използвано, че в общия случай нямаме равенство между $I_1\,\Delta\boldsymbol{l}_1 \times \big(I_2\,\Delta\boldsymbol{l}_2 \times (\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\big)$ и $-I_2\,\Delta\boldsymbol{l}_2 \times \big(I_1\,\Delta\boldsymbol{l}_1 \times (\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\big)$

където да си припомним, че $I_k \Delta \boldsymbol{\ell}_k$ може също да се замести с произведението $(\Delta q_k)\mathbf{v}_k$ на порцията движещ се заряд по вектора на скоростта му ($k = 1, 2$). Така, формула (3.3) ни води до шокиращото заключение, че третия принцип на Нютон се нарушава на ниво магнитно взаимодействие между движещи се точкови (или дори малки) заряди. Да припомним, че третият принцип на Нютон е в основата на фундаментални закони, като запазване на импулса, инерциалност на центъра на масата и т.н. Нарушаването на този принцип би довело до "ефекти", като този на барон Мюнхаузен, което е крайно нежелателно във физиката. Какви са възможните изходи? Най-напред, защо всъщност взехме първия подинтегрален израз в (3.2), а не втория, който е явно антисиметричен? Отговора е прост, вторият израз нарушава основния експериментален принцип, с който започнахме в тази лекция: магнитната сила е винаги перпендикулярна на скоростта, а от друга страна, според втория израз силата $\mathbf{F}_{2\to 1}$ ще е винаги колинеарна на свързващия вектор $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ независимо от посоките на скоростите. Така, за да спасим третия принцип на Нютон стигаме до съвсем естествения извод, че **електромагнитното взаимодействие не е мигновено действие на разстояние**. Електромагнитното поле е самостоятелен физичен обект, който приема въздействие от електричните заряди и обратно им действа. Именно на това ниво, поле – заредено тяло, имаме равенство на действие и противодействие. Тази далеч отиваща идея за самостоятелността на електромагнитното поле е била за първи път издигната от Фарадей (Michael Faraday) и намира своя завършен вид в трудовете на Максуел. Да отбележим също, че закона за силата на Ампер е всъщност съчетание на два закона: първият е въведената преди това формула (2.1) за магнитната сила действаща върху един затворен контур и така наречения закон на Био–Сварар (Biot–Savart) даващ закона за магнитната индукция породена от (друг) затворен контур.

(б) Законите на Кулон и Ампер са за точкови обекти и това води до неограничено нарастване на силите на взаимодействие с намаляване на разстоянието. С други думи, при електромагнитното взаимодействие на точкови заряди и линейни токове може да се генерира неограничена енергия. Тази неограниченост води до нежелани безкрайности, които лишават от физически смисъл тези обекти и най-малкото ги правят непригодни за пробни заряди, например. От друга страна, законите на Кулон и Ампер задават, въз основа на принципа на суперпозицията, законите по които обемно разпределени заряди и токове си взаимодействат. В тези случаи, q_k и $I_k d\boldsymbol{\ell}_k$ във формули (3.1) и (3.2) следва да се заменят съответно с $\rho(\mathbf{r}_k, t)\ d^3 r_k$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}_k, t)\ d^3 r_k$, заедно с интегриране по $\mathbf{r}_k$ за $k = 1, 2$ в обема на всяко едно от телата. След последната замяна се оказва, че действащите сили вече не пораждат безкрайности. И все пак, точковите заряди си остават желан теоретичен модел на елементарна частица. Квантова теория на полето дава частично разрешение на този проблем, но продължава да страда от безкрайностите съпътстващи точковите обекти.

4. Уравнения на Максуел за електромагнитното поле. Електромагнитни вълни

Функциите $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z, t)$ изпълняват и се определят от система от частни диференциални уравнения, които са въведени в пълен вид като система за първи път през 1865 от Максуел и са наречени с неговото име. Забележително следствие от уравненията на Максуел е, че те допускат ненулеви променливи решения в отсъствие на източници, като електрични заряди и токове, т.е., във вакуум. Нещо повече, тези решения имат вълнови характер и се наричат *електромагнитни вълни*. По-долу ще разгледаме един специален вид такива решения: плоски електромагнитни вълни, заедно с тяхната физична интерпретация.

Уравненията на Максуел във

вакуум могат запишат във вида:[5]

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \tag{4.1}$$

и циклична смяна по x, y, z,

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \tag{4.2}$$

и циклична смяна по x, y, z,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0\,, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0\,. \tag{4.4}$$

В горните уравнения участва една фундаментална физична константа c с размерност на скорост, която исторически се получава изразена

[5]Това са общо осем линейни частни диференциални уравнения за шест функции. Въпреки, че съгласно общата теория такава система е преопределена, в случая уравненията са съгласувани и допускат единствено решение на задачата на Коши. т.е., да се определи еднозначно еволюцията на полето при задаването му в начален момент от време. За целта обаче е необходимо в началния момент от време полетата да удовлетворяват уравненията от третия и четвъртия ред.

чрез други две константи въведени по-рано в законите на Кулон и Ампер, както споменахме в уводните бележки към този курс от лекции. Оказва се, че тази константа c съвпада със скоростта на светлината, която е била измерена директно по-рано. Както ще видим след малко константата c е равна на скоростта на разпространение на плоските електромагнитни вълни във вакуум. Тъй като във вакуум уравненията на Максуел (4.1)–(4.4) трябва да имат горния вид във всяка инерциална отправна система, от тук правим и извода за постоянството на скоростта на светлината.

За нашите цели е достатъчно да се ограничим до решения от вида

$$
\begin{aligned}
E_x &= E_x^{(0)} \\
&\times \cos\Big(k_x x + k_y y + k_z z + \omega t + \varphi_x^{(E)}\Big), \\
E_y &= E_y^{(0)} \\
&\times \cos\Big(k_x x + k_y y + k_z z + \omega t + \varphi_y^{(E)}\Big), \\
E_z &= E_z^{(0)} \\
&\times \cos\Big(k_x x + k_y y + k_z z + \omega t + \varphi_z^{(E)}\Big), \\
B_x &= B_x^{(0)} \\
&\times \cos\Big(k_x x + k_y y + k_z z + \omega t + \varphi_x^{(B)}\Big), \\
B_y &= B_x^{(0)} \\
&\times \cos\Big(k_x x + k_y y + k_z z + \omega t + \varphi_y^{(B)}\Big), \\
B_z &= B_x^{(0)} \\
&\times \cos\Big(k_x x + k_y y + k_z z + \omega t + \varphi_z^{(B)}\Big),
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

в които участват редица параметри

наричани както следва:

- Векторите $\mathbf{E}^{(0)} = (E_x^{(0)},\ E_y^{(0)},\ E_z^{(0)})$ и $\mathbf{B}^{(0)} = (B_x^{(0)},\ B_y^{(0)},\ B_z^{(0)})$ се наричат интензитети на електричното и магнитното поле, съответно;
- векторът $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ се нарича вълнови вектор, а ω се нарича честота на вълната;
- параметрите $\varphi_x^{(E)}$, $\varphi_y^{(E)}$, $\varphi_z^{(E)}$, $\varphi_x^{(B)}$, $\varphi_y^{(B)}$, $\varphi_z^{(B)}$ се наричат начални фази.

С помощта на теорията на частните диференциални уравнения може да се покаже, че решенията от вида (4.5) са единствените решения на уравненията на Максуел (4.1)–(4.4) изпълняващи свойствата:

(pw1) Съществува направление задавано от вектор $\mathbf{k} = (k_x,\ k_y,\ k_z)$ така, че векторите $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ на електромагнитното поле остават постоянни върху всяка равнина в пространството, която е перпендикулярна на $\mathbf{k}$.

(pw2) При движението на всяка от равнините перпендикулярни на вектора $\mathbf{k}$ по това направление с определена постоянна скорост векторите $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ на електромагнитното поле остават постоянни във времето.

Именно решенията с тези две свойства е прието да се наричат *плоски електромагнитни вълни* и ние приемаме, че при преход от една инерциална система в друга, плоската електромагнитна вълна отново преминава в плоска електромагнитна вълна.

Замествайки горният анзац (полагане) (4.5) на решение в уравненията на Максуел във вакуум (4.1)–(4.4) получаваме система от алгебрични уравнения за константите:

$$k_x E_y^{(0)} - k_y E_x^{(0)} + \omega B_z^{(0)} = 0$$

и циклична смяна по x, y, z, (4.6)

$$k_x B_y^{(0)} - k_y B_x^{(0)} - \frac{1}{c^2} \omega E_z^{(0)} = 0$$

и циклична смяна по x, y, z, (4.7)

$$k_x E_x^{(0)} + k_y E_y^{(0)} + k_z E_z^{(0)} = 0\,, \tag{4.8}$$

$$k_x B_x^{(0)} + k_y B_y^{(0)} + k_z B_z^{(0)} = 0\,, \tag{4.9}$$

които от своя страна са необходимото и достатъчно условие за наличие на решение. Умножавайки уравненията на първия ред (4.6) по $\frac{1}{c^2}\omega$ и изразявайки $\frac{1}{c^2}\omega E_x^{(0)}$, $\frac{1}{c^2}\omega E_y^{(0)}$, $\frac{1}{c^2}\omega E_z^{(0)}$ от втората тройка от уравнения (4.7) получаваме

$$\begin{aligned}
& k_x(k_z B_x^{(0)} - k_x B_z^{(0)}) \\
& -k_y(k_y B_z^{(0)} - k_z B_y^{(0)}) \\
& +\frac{1}{c^2}\omega^2 B_z^{(0)} = 0 \\
& \Rightarrow \quad 0 = k_x^2 B_z^{(0)} + k_y^2 B_z^0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \; k_z(k_x B_x^{(0)} + k_y B_y^{(0)}) \\
&+ \; \frac{1}{c^2}\,\omega^2 B_z^{(0)} \\
&= \; \Big(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \\
&\qquad - \; \frac{1}{c^2}\omega^2\Big) B_z^{(0)}\,, \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

където сме използвали и уравнението на четвъртия ред (4.9). При цикличната смяна по x, y, z се получават и условията:

$$
\begin{aligned}
&\Big(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{1}{c^2}\omega^2\Big) B_x^{(0)} \; = \; 0 \\
&= \; \Big(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{1}{c^2}\omega^2\Big) B_y^{(0)}. \; (4.11)
\end{aligned}
$$

С аналогична манипулация върху втората тройка от уравнения (4.7) получаваме, че

$$
\Big(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{1}{c^2}\omega^2\Big) E_x^{(0)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{1}{c^2}\omega^2\right) E_y^{(0)} \\
&= \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{1}{c^2}\omega^2\right) E_z^{(0)} \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

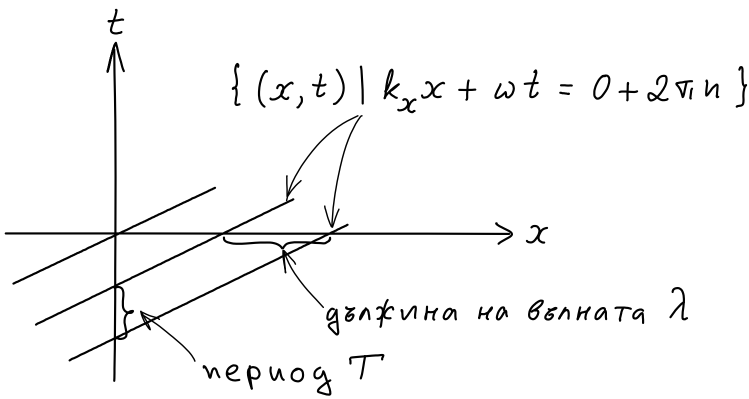
Необходимо и достатъчно условие за ненулево решение (4.5) е поне една компонента на амплитудите $\mathbf{E}^{(0)}$ или $\mathbf{B}^{(0)}$ да е различна от нула и следователно получаваме първото важно ограничение върху параметрите на плоската електромагнитна вълна:

$$
k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{1}{c^2}\omega^2 = 0\,. \tag{4.13}
$$

Параметрите $E_x^{(0)}$, $E_y^{(0)}$, $E_z^{(0)}$, $B_x^{(0)}$, $B_y^{(0)}$, $B_z^{(0)}$, k_x, k_y, k_z, ω изпълняват допълнителни условия, които обаче за целите на настоящата глава не са необходими и затова ще изпуснем. Оставяме за упражнение на читателя да се убеди, че при всеки ненулев набор на параметрите (k_x, k_y, k_z, ω) съществува поне едно ненулево променливо решение на уравненията на Максуел във вакуум от вида (4.5).

Нека сега изследваме геометричния и физичния смисъл на плоска вълна (4.5) с параметри (k_x, k_y, k_z, ω). Нека да изобразим на пространство-времева диаграма (фиг. 4) поведението на една такава плоска вълна като начертаем хиперповърхностите отговарящи на $k_x x +$

$k_y y + k_z z + \omega t = K + 2\pi n$ за цяло число n и фиксирана константа K. За простота сме изобразили случая когато $k_y = k_z = 0$, тъй като тогава решенията не зависят от y и z, и е зададена само зависимостта им от x и t.



Фигура 6: Пространство-времева диаграма на плоска вълна

Повърхнините за които $k_x x + k_y y + k_z z + \omega t = const$ наричат фазови повърхнини понеже електромагнитното поле взема върху тях еднакви стойности. Нещо повече,

$$
\left|\begin{array}{l}
\mathbf{E}(x,y,z,t) \ = \ \mathbf{E}(x_1,y_1,z_1,t_1) \\
\mathbf{B}(x,y,z,t) \ = \ \mathbf{B}(x_1,y_1,z_1,t_1)
\end{array}\right.
$$

$$
\Longleftrightarrow
$$

$$
k_x x + k_y y + k_z z + \omega t
$$

$$
= \ k_x x_1 + k_y y_1 + k_z z_1 + \omega t_1
$$

$$
+ \ 2\pi n \, , \tag{4.14}
$$

за цели стойности на n. Основните моменти онагледени на фиг.4 са следните:

(1) Хиперповърхнините в $\mathbb{R}^4$ ($\ni (x,\ y,\ z,\ t)$), които се задават от уравнението $k_x x + k_y y + k_z z + \omega t = K$ са успоредни една на

друга при различни стойности на K и в частност са успоредни на хиперповърхнината $k_x x + k_y y + k_z z + \omega t = 0$, която минава през нулата.

(2) Хиперповърхнините в $\mathbb{R}^4$ ($\ni (x, y, z, t)$), които се задават от уравненията $k_x x + k_y y + k_z z + \omega t = K + 2\pi n$ при фиксирано K различни цели n са успоредни и еквидистантни. Съгласно (4.14) електромагнитното поле взема върху тях еднакви стойности.

(3) Сеченията на хиперповърхни-ните от точка (2) с коя да е пространствена хиперравнина $\{t = const\}$ е система от

успоредни хиперравнини в $\mathbb{R}^3$, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, k_x x + k_y y + k_z z = K' + 2\pi n\,\}$, където K' е отново фиксирана константа зависеща от K и фиксираната стойност на t. Всеки две такива съседни повърхнини отстоят на едно и също евклидово разстояние

$$\lambda = \frac{2\,\pi}{|\,\mathbf{k}\,|}\,, \quad |\,\mathbf{k}\,| := \sqrt{(\,k_x\,)^2 + (\,k_y\,)^2 + (\,k_z\,)^2}\,.$$

Това разстояние λ се нарича *дължина на вълната*. Тъй като пространствените хиперравнини $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, k_x x + k_y y + k_z z = K' + 2\pi n\}$ са перпендикулярни на векторът $\mathbf{k} = (k_x, k_y.k_z)$, то този вектор задава и посоката на разпространение на вълната.

(4) Сеченията на хиперповърхнините от точка (2) с коя да е времева ос $\mathbb{R} = \{(x, y, z, t) \mid x = const_x, y = const_y, z = const_z\} \subset \mathbb{R}^4$ е система от еквидистантни точки отстоящи една от друга на интервал

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

където T се нарича *период на вълната.*

(5) Така отношението

$$\frac{\lambda}{T} = \frac{|\omega|}{|\mathbf{k}|}$$

е големината на *скоростта на вълната*, която от друга страна се оказва точно равна на константата c в следствие на условието (4.13).

И така, плоските електромагнитни вълни, задавани с (4.5), се разпространяват във вакуум. с една и съща скорост равна на константата c във всяка инерциална отправна система. През 1887 г. и в последствие Херц провежда поредица от експерименти установяващи съществуването на електромагнитни вълни. Той е показал съвместимостта на свойствата на тези вълни със свойствата на вълни с по-къса дължина на вълната, които съответстват на видимата светлина. След тези експерименти хипотезата за електромагнитния характер на светлината става общоприета.

Лекция 2

Основи на специалната теория на относителността I

1. Релативистко понятие за пространство и време. Релативистки интервал

Специалната теорията на относителността (special theory of relativity или само, special relati vity) е нов вид теория за относителността на свободното движение, която е възникнала в началото на XX век. Тази теория се основава на трудовете на няколко поколения физици и математици, между които Лоренц (Hendrik Lorentz) и Поанкаре (Henri Poincaré), но в своя завършен и цялостен вид тя се свързва с трудовете на Айнщайн (Albert Einstein) от 1905. Специалната теорията на относителността се основава на принципа за постоянство на скоростта на светлината спрямо всички наблюдатели. Последният принцип ни казва фактически, че скоростта на светлината е крайна, но заедно с това е и недостижима за обикновените наблюдатели. Постоянството на скоростта на светлината е било теоретично предсказано, като следствие от знаменитите уравнения на Максуел (James Maxwell)[6] за електромагнитното поле през 1861–1862. В специалната теория на относителността се пренебрегва гравитацията и нейното въздействие върху светлината, което е предмет на общата теория на относителността (general theory of relativity или само, general relativity), която е предложена от Айнщайн през 1915. Английската дума за относителност, relativity, е залегнала в прилагателното "релативистки" (relativistic), ко-

[6]виж лекция 1

ето в теорията на относителността се прилага към редица понятия за да отрази техния преход от класическата нютонова механика в новата теория.

Ще започнем с кратък преглед на еволюцията на понятието за свободно движение и неговата относителност от класическата механика към специалната теория на относителността.

Инерцията е свойството на телата да запазват състоянието си на покой или на равномерно и праволинейно движение дотогава докато не изпитат външно въздействие. Това е закона за инерцията (law of inertia) на Галилей (Galileo Galilei), който стои и в основата на формулирания по-късно първи принцип на Нютон (Isaac Newton). Вторият принцип на Нютон дава количествен израз на понятията за инерция и въздействие върху телата посредством въвеждането на величините маса и сила, съответно. Според този закон, *силата* F *променя скоростта* на тяло, върху което действа, *пропорционално на масата* m на това тяло или по-точно,

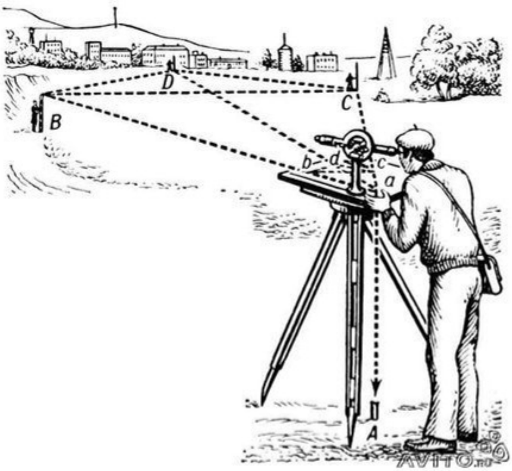
$$F = m\,a\,, \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

където е ускорението на тялото определено като изменението Δv на неговата скорост за достатъчно малък интервал от време Δt.[7]

Горните два закона на Нютон са основани на понятието за движение и поради това се нуждаят от една предварителна подготовка свързана с коректното определяне на това понятие. Състоянието на покой или движение на едно тяло се задава спрямо *отправна система* (reference frame), която определяме като система от наблюдатели, които са неподвижни един спрямо друг. По-точно, тези наблюдатели са установили разстоянията на свързващите ги отсечки и ъглите между тях, и

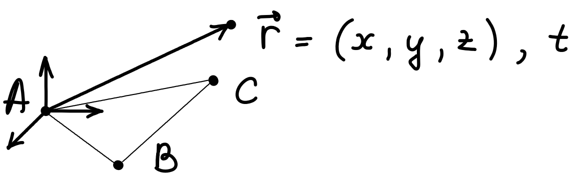
[7]заедно с това, скоростта, ускорението и от там и силата са всъщност вектори в тримерното пространство, т.е., притежават посока заедно с големините си

те остават постоянни във времето, като се подчиняват на законите на евклидовата геометрия. Предполагаме също, че наблюдателите формиращи отправната система притежават синхронизирани часовници. Един практически и нагледен модел за такава отправна система може да ни служи някаква съвкупност от геодезисти.



Фигура 1: Геодезисти

Така, идеалният наблюдател е “точков” или поне има избрана точка в неговата лаборатория, от която се мерят разстоянията до другите наблюдатели. Заедно с това обаче, един наблюдател е малко повече от “проста точка”: той има и прикрепени ‘’базисни оси (посоки)”, т.е., може да отличава и измерва посоките в заобикалящото го пространство. По такъв начин, всеки един от наблюдателите формиращи отправната система може да построи всъщност координатна система в пространството, на която той е център, както е изобразено на следната фигура.



Фигура 2: Отправна система = координатна система в пространството със съпътстващо време

От математическа гледна точка именно задаването на една такава координатна система със съпътстващо време определя понятието за отправна система, но в практически план следва да помним, че в пространството нямаме разпънати координатни оси, а по-скоро можем да осъществим ситуацията от Фиг. 1

По такъв начин в дадена отпрана система всяка точка на едно тяло се сдобива със закон за движение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)\,.$$

В частност, равномерното и праволинейно движение на точка се задава със закон

$$\mathbf{r}(t) \,=\, \mathbf{v}\,t + \mathbf{r}_0\,,$$

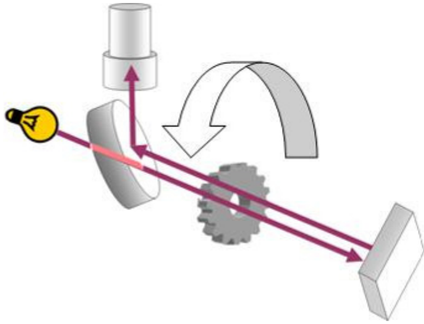
където $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}_0$ са константни вектори (не зависещи от времето t). По-общо, казваме че едно тяло се движи равномерно и праволинейно ако всяка негова точка се движи по горния закон с един и същ вектор на скоростта $\mathbf{v}$, но възможно различни $\mathbf{r}_0$.

Така, първият принцип на Нютон, т.е., законът за инерцията с който започнахме, следва да се формулира по следния уточнен начин. Съществува отправна система, в която при отстраняване на всякакви въздействия върху телата те се движат равномерно и праволинейно. Отправни системи за които горното свойство е изпълнено се наричат *инерциални отправни системи* (inertial frame of reference, inertial frame). В една инерциална система:

а) пространството е хомогенно (еднородно, т.е., всичките му точки са равноправни) и изотропно (т.е., всички посоки са равноправни).

б) Всеки физичен закон се записва в една и съща форма.

В частност, законите на електромагнетизма също трябва да имат един и същи запис във всяка инерциална отправна система. В следствие на теорията на Максуел и неговите уравнения за електромагнитното поле е било установено, че съществуват електромагнитни вълни (electromagnetic waves) разпространяващи се със скорост равна на скоростта на светлината. Самата светлина също е електромагнитна вълна. Следователно, скоростта на светлината трябва да е еднаква във всички инерциални отправни системи. Нека да формулираме този принцип за постоянството на скоростта на светлината по-точно: във всяка инерциална отправна система един светлинен лъч се разпространява по права линия с постоянна скорост, задавана от фундаментална физична константа c, която и наричаме скорост на светлината.



Фигура 3: Схема на опита на Физо (Fizeau, 1851) за определяне на скоростта на светлината базиран на въртящо се зъбно колело. Измерената стойност е била 315000 km/s. За първи път скоростта на светлината е била оценена на 200000 km/s от Рьомер (Rømer) и Хюйгенс (Huygens) на базата на астрономически наблюдения (върху спътниците на Сатурн) през 1675. Между опита на Физо и това най-ранно измерване, през 1729 Джеймс Брадли (James Bradley) е измерил експериментално скоростта на светлината в изцяло наземен експеримент и е получил стойност 301000 km/s. Днес, скоростта на светлината е приета за еталон и се равнява на 299 792,458 km/s.

Принципът за постоянство на скоростта на светлината обаче е в сериозен конфликт с класическата нютонова механика. Нека да отбележим, че формулировката на първия принцип на Нютон, която приведохме до тук всъщност е в съгласие със специалната теория на относителността и не противоречи на постоянството на скоростта на светлината. Нютон обаче прави едно важно допълнително предположение: според него е възможна синхронизация на времето между всички наблюдатели във вселената. С други думи, *съществува абсолютно време*, което е също така равносилно на съществуването на *абсолютно понятие за едновременност*, еднакво за всички отправни системи. Наличието на абсолютната едновременност е необходимото и достатъчно условие за коректността на идеализираното понятие за *абсолютно твърдо тяло* (rigid body) във физиката: това е тяло, всеки две точки от които остават на едно и също разстояние във всеки един момент от време. Отказването от абсолютна едновременност е следователно равносилно и на отказване от измерване на разстояния посредством измерителни тела-еталони.

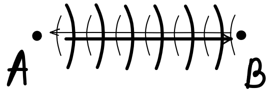
Нека да допълним изброените по-горе свойства а) и б) на инерциалните отправни системи с още едно

в) Една инерциална отправна система се движи спрямо друга инерциална отправна система по такъв начин,

> че центъра на първата се движи равномерно и праволинейно спрямо втората, а координатните й оси се преместват успоредно на себе си.

Това свойство, комбинирано с нютоновата представа за абсолютно време води до така наречените галилееви трансформации, описващи прехода между две инерциални отправни системи. От галилеевите трансформации, от своя страна, следва закона за събиране на скоростите: ако в една отправна система наблюдател А се движи равномерно и праволинейно със скорост v, а наблюдател B се движи равномерно и праволинейно в същата посока със скорост u, то спрямо A наблюдателят B ще се движи със скорост $u-v$. Според този закон ние можем да настигнем светлината.

Нека да отбележим, че отказвайки се от измерителни тела-еталони за дължина ние все още разполагаме със средства за мерене на *относителни* разстояния (т.е., отношения на разстояния): това става като измерваме ъглите между отсечките свързващи различните взаимно неподвижни наблюдатели в една отправна система. Това именно и правят геодезистите. Принципът за постоянство на скоростта на светлината обаче ни дава един нов метод за измерване на разстояния. Това е *радио-локационния метод*, който също отдавна е широко навлязъл в практиката.



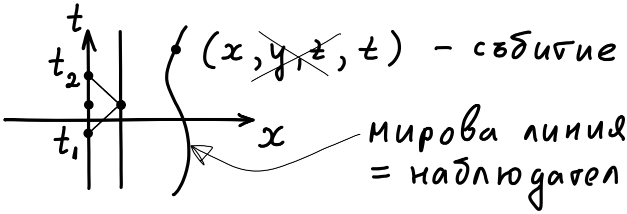
Фигура 4: Радио-локационен метод

При радио-локационния метод един наблюдател A излъчва светлинен импулс, в даден момент от време t_1 отчитано по собствения му часовник, към друг наблюдател B в посока определена от единичен вектор $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ в тримерното пространство ($\mathbf{n}^2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$). Достигайки до наблюдателя B, светлинният импулс се отразява и се връща обратно към A по същата права, която е определена от вектора $\mathbf{n}$, и се приема от наблюдателя A в момент от време t_2 (отново спрямо часовника на A). Въз основа на получените данни от A, състоящи се от моментите от време t_1 и t_2, и вектора $\mathbf{n}$, наблюдателя A съпоставя координати $(x, y, z) = \mathbf{r}$ на точката в пространството, както и значение t на момента от време, когато светлинния импулс е достигнал B. Това става по следните формули:

$$t \,=\, \frac{t_1 + t_2}{2}\,, \quad \mathbf{r} \,=\, \frac{1}{2}\,c\,(t_t - t_1)\,\mathbf{n}\,.$$

Първата формула за t изразява факта, че светлинния импулс пътува еднакво време в двете посоки, поради което той се отразява в B точно в средния момент между t_1 и t_2. Разстоянието, което изминава светлинния импулс по посока на единичния вектор $\mathbf{n}$ тогава е равно на скоростта c по времето за пътуване $t - t_1 = \frac{1}{2}(t_2 - t_t)$.

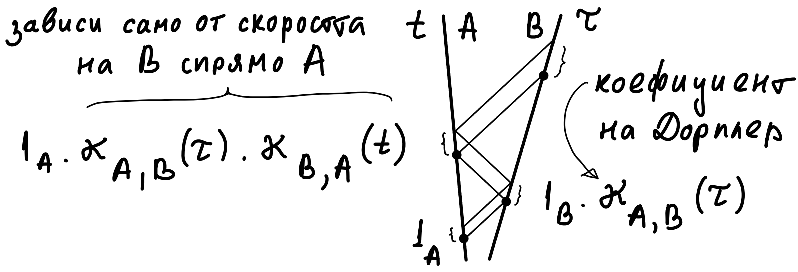
Удобно е да онагледим получената процедура посредством така наречените *пространство-времеви диаграми.*



Фигура 5: Пространство времева диаграма изобразяваща радио-локационния метод. Мировата линия на наблюдателя A съвпада с времевата ос t. Светлинните импулси също имат мирови линии, които са двете наклонени отсечки излизащи от оста t. За простота на чертежа сме избрали движението да се извършва по оста x, поради което останалите координати y и z на фигурата са равни на нула. На диаграмата сме начертали освен мировата линия на измервания наблюдател, който е избран неподвижен спрямо A, също и една мирова линия на произволно движещ се наблюдател.

В най-общия случай разглеждаме декартовото произведение $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ на времевата ос и тримерното пространство, което се нарича *пространство-време*, и неговите точки наричаме *събития*. По такъв начин в пространство-времето еволюцията (покой или движение) на един точков наблюдател се представя от линия от точки (събития) наречена *мирова линия*. За онагледяване на горната фигура ние сме начертали само една от пространствените оси, оста x и фактически, при придвижването на оста x вертикално по времевата ос пресечните точки на мировите линии с нея ни дават движението на наблюдателите, подобно на прожекция от филмова лента. В частност, на централния наблюдател, който строи координатната система, съответства вертикалната координатна ос t. Наблюдателите, които са взаимно неподвижни спрямо него имат мирови линии, които са прави успоредни на оста t. Оттук се убеждаваме, че с помощта на радио-локационния е възможна синхронизацията на времето между взаимно неподвижни наблюдатели. Всъщност, последно е аксиома, която се потвърждава от опита ни. Тя изразява и факта, че пространство-времето е *плоско*, което отпада в случая на общата теория на относителността, която описва гравитационното привличане между телата.

Нека сега разгледаме проблема за синхронизация на времето между взаимно движещи се наблюдатели. Един инерциален, т.е., свободно движещ се наблюдател в една инерциална отправна система се описва с мирова линия, която е права линия. Наклона на мировата линия определя скоростта на наблюдателя в отправната система и два инерциални наблюдателя движещи се с еднакви по големина и посока скорости, имат успоредни мирови линии. На следната фигура са изобразени два взаимно движещи се наблюдатели, които правят измервания един на друг с помощта на радио-локационния метод.



Фигура 6: Синхронизация на времевите мащаби между взаимно движещи се наблюдатели A и B.

Първоначално двата разглеждани наблюдателя A и B са избрали свои независими мащаби от време, 1_A и 1_B, съответно по времевите си оси t и τ. Ако наблюдателя A излъчи към B два светлинни импулса отстоящи на единица времеви мащаб 1_A по неговото време, то най-общо при наблюдателя B светлинните импулси ще пристигнат в момент от време τ по времето на B и ще отстоят един от друг на интервал от време $\kappa_{A,B}(\tau)\ 1_B$. Коефициента $\kappa_{A,B}(\tau)$ по принцип зависи от момента от време τ (по часовника на B). Нужни са известни разсъждения за да се убедим, че за инерциални наблюдатели A и B този коефициент е константа, не зависеща от времето. За целта нека да продължим играта на излъчване и предаване на импулси, и да предположим, че наблюдателя B отразява получените светлинни сигнали обратно към A. Тогава те пристигат в A в момент от време t по часовника на A и отстоят един от друг на интервал от време $\kappa_{B,A}(t)\ \kappa_{A,B}(\tau)$

1_B, т.е., допълнително умножаваме по аналогичен коефициент сравняващ времевите мащаби в посока от B към A. Както ще се убедим след малко, произведението на коефициентите $\kappa_{B,A}(t)\ \kappa_{A,B}(\tau)$ зависи пряко и единствено от скоростта на B спрямо A, която A получава въз основа на радио-локационния метод. Така принципът, че всеки два инерциални наблюдателя се движат един спрямо друг равномерно и праволинейно ще води до това, че $\kappa_{B,A}(t)$ $\kappa_{A,B}(\tau)$ е константа не зависеща от времето. Същото заключение важи и в посока на обмен на сигнали $B \to A \to B$. Тези две условия тогава се оказват достатъчни да заключим, че както $\kappa_{A,B}$, така и $\kappa_{B,A}$, са константи не зависещи от времето.

Действително, нека да означим с $\tau = f_{A,B}\ (t)$ и $t = f_{B,A}\ (\tau)$ зависимостите на моментите от време при предаване на светлинни импулси от A към B и от B към A, съответно. Тогава горните разсъждения показват, че функциите $\kappa_{B,A}\big(f_{B,A}(\tau)\big)\ \kappa_{A,B}(\tau)$ и $\kappa_{B,A}\big(f_{A,B}(t)\big)\ \kappa_{B,A}(t)$ не зависят от аргументите си (константи са). Нека сега изберем точка върху мировата линия на A отговаряща на момент от време t_1 и да положим $\tau_1 := f_{A,B}(t_1)$, $\kappa_1^+ := \kappa_{A,B}(\tau_1)$, $t_2 := f_{B,A}(\tau_1)$, $\kappa_1^- := \kappa_{B,A}(t_2)$, $\tau_2 := f_{A,B}(t_2)$, $\kappa_2^+ := \kappa_{A,B}(\tau_2)$ и т.н. Тогава $\kappa_j^+\ \kappa_j^- = \kappa_{j+1}^+\ \kappa_{j+1}^-$ и $\kappa_j^-\ \kappa_{j+1}^+ = \kappa_{j+1}^-\ \kappa_{j+2}^+$. От тук,

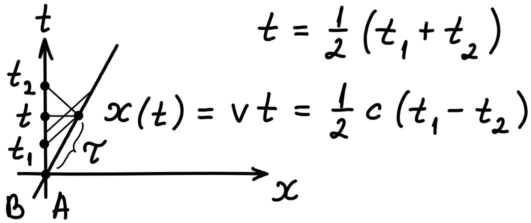
$(\kappa^+_{j+1})^2 = \kappa^+_j\ \kappa^+_{j+2}$ и $(\kappa^-_{j+1})^2 = \kappa^-_j\ \kappa^-_{j+2}$. Горните полагания могат да се извършат и в обратна посока на времето правейки индекса j отрицателен. Нека изберем тази посока на времето в която двата наблюдателя A и B се срещат. Естествено е да се предположи, че коефициентите $\kappa^\pm_j$ ще имат граница при клонене към момента на среща. Но от друга страна, рекурентната зависимост $\kappa^2_{j+1} = \kappa_j\ \kappa_{j+2}$ (не зависимо в коя посока на изменение на j) дава $\kappa_{j+n} = n(\kappa_{j+1} - \kappa_j) + \kappa_j$. Последното ще има граница при $n \to \pm\infty$ единствено ако $\kappa_j = \kappa_{j+1}$.

След като сме се убедили, че коефициентите $\kappa_{A,B}$ и $\kappa_{B,A}$ са константи (не зависещи от времето), то казваме, че времевите мащаби на A и B са *синхронизирани*, ако

$$\kappa_{A,B} = \kappa_{B,A}\,.$$

Това отново е израз на равноправието на всички инерциални отправни системи, заложено в първия принцип на Нютон. С това полагане постигаме синхронизация на времевите мащаби между произволни два инерциални наблюдатели. Оказва се, че това е максимално възможната синхронизация, които можем да постигнем. Както ще видим в последствие, след синхронизация на мащабите в общия случай не е възможна съгласувана синхронизация и на началните моменти от време, така че двата наблюдателя да имат еднакво понятие за едновременност. Едновременността ще се окаже *относителна*.

Коефициентът $\kappa = \kappa_{A,B} = \kappa_{B,A}$ се нарича *коефициент на Доплер* (Doppler) и изразява не какво да е, а срещания от всички ни в ежедневието ефект на Доплер, но отнасящ се в случая вместо за звукови – за светлинни сигнали. Нека пресметнем сега коефициента на Доплер за два инерциални наблюдателя A и B. За улеснение отново ще си начертаем пространство-времева диаграма.



Фигура 7: Пресмятане на коефициента на Доплер

Също за улеснение ще приемем, че в момента $t = 0$ по времето на A наблюдателите A и B се намират в една точка – началото на отправната система на A. Тогава, наблюдателя B се движи равно мерно и праволинейно по оста x със скорост v по закона $x(t) = vt$. Съгласно радио-локационния метод, в момента от време $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ (по времето на A) наблюдателя B ще се намира на разстояние $x = \frac{1}{2}c(t_2 - t_1)$. Така, заедно с $x = vt$ получаваме и връзката $v(t_1 + t_2) = c(t_2 - t_1)$. От друга страна, като използваме съображения за подобие можем да запишем $\tau = \kappa t_1$ и $t_2 = \kappa\tau$, където τ е момента от време по часовника на B отговарящ на събитието (x, t) от мировата линия на B (координатите x и t са поставени от A). За целта сме избрали началните моменти $t = 0$ и $\tau = 0$ и за двата наблюдателя така, че да отговарят на момента на срещата им. Следователно, $\kappa^2 = t_2/t_2$, а отношението t_2/t_2 се пресмята непосредствено от връзката $v(t_1 + t_2)$

$= c(t_2 - t_1)$:

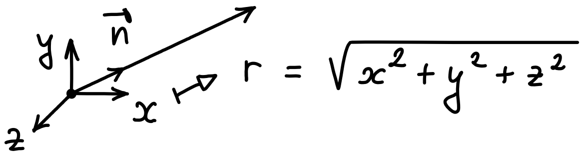
$$\kappa = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}\,.$$

В допълнение, можем още да изразим τ:

$$\tau = \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{c^2}}$$

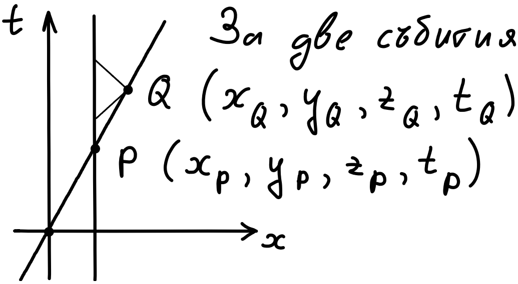
или също $\quad c^2\tau^2 = c^2t^2 - x^2\,. \quad (1.1)$

Нека сега малко обобщим ситуацията, като предположим, че наблюдателя B се движи вместо по оста x по произволна ос определена от единичен вектор $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ в пространството.



Фигура 8: При движение вместо по оста x по произволна ос определена от вектор $\mathbf{n}$ ролята на координатата x се заменя с разстоянието r по оста $\mathbf{n}$.

В такъв случай трябва да заместим x в (1.1) с разстоянието r по оста $\mathbf{n}$, което съгласно питагоровата теорема се дава от $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Нека максимално да обобщим ситуацията и да предположим, че в началните моменти от време наблюдателите A не се срещат (всъщност, те може и никога да не се срещнат). Нека P и Q са събития от мировата линия на B, които имат координати в отправната система на A съответно, (x_P, y_P, z_P, t_P) и (x_Q, y_Q, z_Q, t_Q).



Фигура 9: Релативистки интервал в общия случай на инерциални наблюдатели.

Тогава собственото време $\tau_{P,Q}$ измерено от наблюдателя B (по синхронизиран времеви мащаб с A) между събитията P и Q ще се даде от израза

$$c^2\tau_{P,Q}^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 , \quad (1.2)$$

където $\Delta x = x_Q - x_P$, $\Delta y = y_Q - y_P$, $\Delta z = z_Q - z_P$ и $\Delta t = t_Q -$

t_P. Действително, наблюдателя A винаги може да се свърже с друг наблюдател C, който е взаимно неподвижен спрямо A и се среща с B в събитието P. Тогава за C ролята на x, y, z, t ще играят разликите Δx, Δy, Δz и Δt, съответно.

Изразът (1.2), включващ собственото синхронизирано време $\tau_{P,Q}$ на инерциален наблюдател протекло между две събития P и Q от мировата му линия, е крайъгълен камък не само за специалната, но и за общата теория на относителността. Дясната страна на (1.2) се нарича **релативистки интервал** между събитията P и Q. Веднага се налагат няколко фундаментални извода.

1) За събития P и Q, за които релативисткия интервал (1.2) е отрицателен не съществува инерциален наблюдател, който минава през тях, тъй като той би отчел нереално собствено време $\tau_{P,Q}$ между P и Q. Такива събития ще наречем след малко *причинно несвързани* (acausal). Дори горният факт на несъществуване на инерциален наблюдател минаващ през двете събития е достатъчно основание за причинната им несвързаност. Ние ще посочим по-нататък и някои до-

пълнителни основания за това. По определение, две събития P и Q, за които релативисткия интервал (1.2) е отрицателен се наричат **пространствено-подобни** (space-like separated events). Забележете, че за пространствено-подобни събития, чийто разлики между координатите са Δx, Δy, Δz и Δt е в сила неравенството

$$\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{\Delta t} > c\,.$$

Поради това, мирова линия на инерциален наблюдател би минавала през две пространствено–подобни събития тогава и само тогава, когато наблюдателя се движи със свръх светлинна скорост. Това показва, че скоростта на светлината не може да бъде превишена.

2) За събития P и Q, за които релативисткия интервал (1.2) е положителен, следва че последния е еднакъв във всички инерциални отправни системи. Такива величини се наричат **релативистки инварианти**. Две събития P и Q, за които релативисткия интервал (1.2) е *неотрицателен* се наричат **времеподобни**, (time-like separated events).

3) Ако за събитията P и Q релативисткият интервал (1.2) е нула,

то те са свързани със светлинен сигнал, тъй като тогава разстоянието между събитията е равно на отчетеното в отправната система време между тях умножено по скоростта на светлината c. Така, по мировата линия на светлинен сигнал време не тече! Това ни дава отговор на въпроса какво ще се случи, ако "настигнем" светлината – нищо няма да се случи – няма да има време за това. Две събития P и Q, за които релативисткия интервал (1.2) е нула се наричат **светоподобни** или още **взаимно изотропни** (light-like events, mutually isotropic events).

2. Пространство на Минковски и псевдоевклидова геометрия. Преобразования на Лоренц

Нека въведем нови означения за координатите в пространство-времето, които са специфични за теория на относителността и които ще наричаме релативистки означения:

$$x^1 := x\,, \quad x^2 := y\,, \quad x^3 := z\,, \quad x^0 := ct\,. \tag{2.1}$$

Така, в настоящия курс от лекции, както и в много курсове по теоретична физика, горните индекси ще означават не само степени, но и индекси на координати. Предполага се, че внимателният читател умее да определя смисъла на горния индекс от контекста на формулата. Все пак, за улеснение в настоящия курс ще въведем специален изправен шрифт за самите четиримерни вектори,

$$\mathrm{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^\mu)_{\mu=0}^3 \\ = (x^\mu) \in \mathbb{R}^4 . \tag{2.2}$$

По такъв начин, обекти като скаларни квадрати $\mathrm{x}^2 \equiv \mathrm{x} \cdot \mathrm{x}$, които ще въведем след малко и които са много често срещани, по-лесно ще се разграничават от втората компонента x^2. Пространствената част на един четиримерния вектор x ще бележим, както и до сега, с удебелен изправен шрифт,

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x^j)_{j=1}^3 = (x^j) . \tag{2.3}$$

Прието е индексите на четиримерни вектори, като x (2.2) да се бележат с гръцки букви, като $\mu, \nu, \ldots$ (те пробягват стойности 0, 1, 2 и 3). Индексите на пространствени, тримерни вектори, като $\mathbf{x}$ (2.3) пък се бележат с латински букви като j, k, … (и пробягват стойности 1, 2 и 3). По нататък в настоящия курс ще се връщаме и към нерелативистките означения $(\mathbf{x}\ , t)$ за събитие в пространство-времето, които следвахме до сега, но ще използваме често и релативистките означения $(x^0,$

$\mathbf{x}$). Така, в релативистките означения времето предхожда пространството.

След това по-пространно въведение към релативистките означения, нека да запишем като начало в новите означения релативисткия интервал (1.2). Ако събитията P и Q имат четиримерни координати $\mathrm{x}_1 = (x_1^\mu)$ и $\mathrm{x}_2 = (x_2^\mu)$ в една инерциална отправна система, то интервалът (1.2) се записва като

$$(x_1^0 - x_2^0)^2 - (x_1^1 - x_2^1)^2 - (x_1^2 - x_2^2)^2 \\ -(x_1^3 - x_2^3)^2 =: (\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)^2 \,. \qquad (2.4)$$

В горната формула достигнахме до важна *квадратична форма*, която стои в основата на релативисткия интервал и е ключ към неговата релативистка инвариантност.

$$\begin{aligned}
\mathrm{x}^2 &:= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 \\
&- (x^3)^2 = \begin{pmatrix} x^0, x^1, x^2, x^3 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\
&= [\mathrm{x}]^T [\eta] [\mathrm{x}], \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

където:

- $[\eta] = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ е матрицата на тази квадратична форма, която се нарича още *метричен тензор*;

- в последния ред на (2.5) сме оз-

> начили с $[\mathrm{x}]$ и $[\mathrm{x}]^T$, съответно вектор-стълба и вектор-реда умножаващи отзад и отпред матрицата $[\eta]$ във второто равенство на същата формула.[8]

За вектори $\mathrm{x} = (x^\mu)$ и $\mathrm{y} = (y^\mu)$ нека въведем и *поляризацията* на квадратичната форма x^2,

$$\begin{aligned} \mathrm{x}\cdot\mathrm{y} &:= x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 \\ &= [\mathrm{x}]^T\,[\eta]\,[\mathrm{y}] = \mathrm{y}\cdot\mathrm{x}\,, \qquad (2.6) \\ \mathrm{x}^2 &= \mathrm{x}\cdot\mathrm{x}\,. \end{aligned}$$

По определение, векторното пространство $\mathbb{R}^4$ снабдено със *скаларното произведение* (2.6) се нарича

[8]Означението $[\mathrm{x}]$ за вектор-стълб, както и $[\eta]$ за матрица ще използваме само в тази точка във връзка с някои удобни матрични изводи. По-нататък в настоящите лекции обаче ще ползваме основно записите $\mathrm{x} = (x^\mu)$ и $\eta = (\eta_{\mu\nu})$.

пространство на Минковски (Minkowski space) или също, псевдо-евклидово (pseudo-euclidean) пространство със сигнатура $(1, 3)$ (един плюс и три минуса в диагоналната матрица η). Пространството на Минковски се бележи с M или също, с $\mathbb{R}^{1,3}$.

Така, зад релативисткия интервал (2.4) стои нов вид геометрия, наречена псевдо-евклидова геометрия. За да видим ролята на тази нова геометрия в специалната теория на относителността нека се върнем на физичните проблеми и да разгледаме прехода от една инерциална отправна система към друга такава. Ако означим с $\mathrm{x} = (x^\mu)$ координатите на едно произволно събитие в първата система, а $\mathrm{x}' = (x'^{\,\mu})$ са координатите му във втората, то най-общо

$$\mathrm{x}' = F(\mathrm{x})\,, \tag{2.7}$$

за някакво изображение $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Първото условие, което трябва да изпълнява F е, че то трябва да изобразява мировите линии на инерциалните наблюдатели отново в мирови линии на инерциални наблюдатели. Мировите линии на инерциалните наблюдатели са прави линии. Следователно, F трябва да изобрази прави линии от определен клас отново в прави линии.

Ще покажем схематично как от тук следва, че всяка права на $\mathbb{R}^4$ се изобразява от F в права. От опита знаем, че за всяка достатъчно малка по-големина скорост винаги съществува инерциален наблюдател движещ се с такава скорост. Така получаваме достатъчно много прави мирови линии на възможни инерциални наблюдатели, които следва да се изобразят от F отново в прави. От тук като използваме, че с прави могат да се "изтъкат" равнини и обратно, равнините когато се пресичат дават прави получаваме и това, което отбелязахме по-горе: F изобразява права в права. От теорията на линейната алгебра следва, че такива трансформации са единствено *афинните трансформации*, т.е., линейните нехомогенни изображения,

$$\mathrm{x}' = \Lambda(\mathrm{x}) + \mathrm{a}\,, \tag{2.8}$$

за някакво линейно изображение Λ, и четиримерен вектор а. В матричен вид, последното равенство можем да запишем като

$$[\mathrm{x}'] = [\Lambda]\,[\mathrm{x}] + [\mathrm{a}]\,, \tag{2.9}$$

където $\Lambda]$ е (4×4)–матрицата представяща линейното изображение Λ.

С това обаче условията върху трансформацията (2.7) не свършват: най-важното предстои. Както заключихме в края на предходната точка на тази лекция, релативисткия интервал между две събития x_1 и x_2 свързани с инерциален наблюдател не трябва да се променя при прехода с F:

$$\begin{aligned}\big(F(\mathrm{x}_1) - F(\mathrm{x}_2)\big)^2 &= (\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)^2 \\ \Longleftrightarrow \quad \big(\Lambda(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)\big)^2 &= (\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)^2\end{aligned} \tag{2.10}$$

(Λ е линейно изображение). Аргумента, че съществуват достатъчно много инерциални наблюдатели, който изтъкнахме по-горе ни показва, че всъщност за всички четиримерни вектори x е в сила

$$\Lambda(\mathrm{x})^2 = \mathrm{x}^2\,, \tag{2.11}$$

(указание: ако това е в сила за x принадлежащи на отворено множество на $\mathbb{R}^4$, то то е в сила и за всяко x). В матричен вид, (2.11) се записва като

$$[\mathrm{x}]^T\,[\Lambda]^T\,[\eta]\,[\Lambda]\,[\mathrm{x}] \;=\; [\mathrm{x}]^T\,[\eta]\,[\mathrm{x}]\,,$$
$$\Longleftrightarrow \quad [\Lambda]^T\,[\eta]\,[\Lambda] \;=\; [\eta] \qquad (2.12)$$

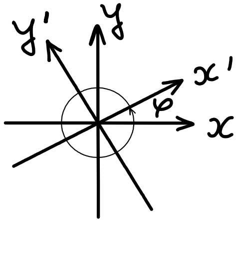
(действително, от вектора [x] се освобождаваме след като диференцираме два пъти по компонентите му).

Матрици изпълняващи равенство (2.12) се наричат *псевдо-ортогонални* (pseudo-orthogonal) матрици или още, лоренцови матрици (Lorentz matrix). В съответствие с това, линейни (хомогенни) преобразования от вида $\mathrm{x}' = F(\mathrm{x}) = \Lambda(\mathrm{x})$ определени от лоренцови матрици $[\Lambda]$

се наричат преобразования на Лоренц (лоренцови преобразования). Така, връщаме се отново до ролята на псевдо-евклидовата геометрия в теория на относителността. Забележете, че ако $[\eta]$ беше единичната матрица 1, то скаларното произведение $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = [\mathrm{x}]^T\ [\mathrm{y}]$ давано в този случай от (2.6) е евклидовото скаларно произведение. В този случай също така условието $[\Lambda]^T[\eta][\Lambda] = [\eta]$ от (2.12) би дало условието за ортогонална матрица, $[\Lambda]^T[\Lambda] = 1$ (единичната матрица). От своя страна, една ортогонална матрица представя въртене (с евентуално отражение) на евклидово пространство. Така, псевдо-ортогоналните матрици са псевдо-евклидов аналог на ротациите. Нека да онагледим този паралел между евклидова и псевдо-евклидова геометрия на двумерни пространство-времеви диаграми. Най-напред, ротация на ъгъл φ на евклидовата равнина се дава от матричното преобразование:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

и е изобразено на следната фигура.



Фигура 10: Евклидово въртене

В псевдо-евклидовия случай, тригонометричните функции в (2.13) преминават в хиперболични:[9]

$$\begin{pmatrix} x'^{\,0} \\ x'^{\,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & -\operatorname{sh}\chi \\ -\operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Матричното равенството $[\Lambda]^T[\eta][\Lambda] = [\eta]$, което в случая се записва като

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & -\operatorname{sh}\chi \\ -\operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & -\operatorname{sh}\chi \\ -\operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

може да се провери непосредстве-

---

[9] хиперболичните косинус и синус, ch и sh, се записват също cosh и sinh, съответно

но. Ако положим

$$\operatorname{sh}\chi := \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\operatorname{ch}\chi := \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{2.15}$$

то получаваме и така наречените *лоренцови трансформации* в техния обичаен вид:[10]

$$x'^{\,0} := \frac{x^0 - \frac{v}{c}\,x^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$x'^{\,1} := \frac{x^1 - \frac{v}{c}\,x^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.16}$$

Полагането (2.15) е свързано с това, че координатната ос $x'^{\,0}$ на при-

[10]Те се пренасят и в четиримерно пространство-време за случая на относително движение на примованата инерциална отправна система спрямо непримованата, което се извършва по оста x^1. Тогава $x'^{\,2} = x^2$ и $x'^{\,3} = x^3$.

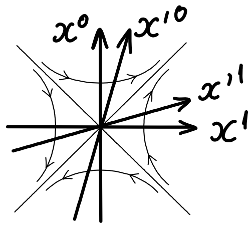
мованата отправна система трябва да съответства в непримованата отправна система на мировата линия на движещ се наблюдател с постоянна скорост v по оста x^1 :[11]

$$x'^{\,1}\,(=\,\mathrm{ch}(\chi)x^1-\mathrm{sh}(\chi)x^0\,)\,=\,0$$
$$\Longleftrightarrow\quad x^1\,=\,v\,\frac{x^0}{c} \tag{2.17}$$

(т.е., $x = vt$ в нерелативистите означения). Така, от (2.17) следва, че $\tanh\chi = \frac{v}{c}$.

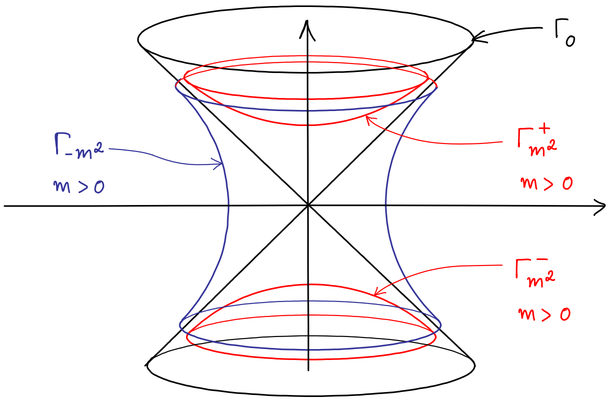
Псевдо-евклидовите въртения, или още наричани, хиперболични въртения са изобразени на следната фигура.

[11]координатната ос $x'^{\,0}$ в примованата система се характеризира от условието $x'^{\,1} = 0$



Фигура 11: Трансформации на Лоренц (псевдо-евклидови въртения). Стрелките върху кривите (които са хиперболи) отговарят на движението при изменението на параметъра χ в (2.14) от $-\infty$ до $+\infty$. Тук вече няма периодичност на движението, както в евклидовия случай на фигура 10.Осите $x'^{\,0}$ и $x'^{\,1}$ сключват еднакви ъгли съответно с осите x^0 и x^1.

Обърнете внимание, че на горната фигура 11 начертаните криви пресичащи координатните оси x^0, x^1, $x'^{\,0}$ и $x'^{\,1}$ са *хиперболи*, и те са псевдо-евклидовия аналог на окръжността на фигура 10. Двойката хиперболи пресичащи осите x^0 и $x'^{\,0}$ са решенията на уравнението $\mathrm{x}^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 = a$ за $a > 0$, а двойката хиперболи пресичащи осите x^1 и $x'^{\,1}$ са решенията на същото уравнение, но за $a < 0$. В по-високомерните случаи тези хиперболи се заменят с хиперболоиди: първата двойка се заменя с два свързани хиперболоида, а втората – е един свързан хиперболоид! Това е отразено на долната фигура



Фигура 12: Хиперболоиди. Във връзка с релативистката динамика, параметърът $\pm a > 0$ е положен като $a = m^2$ и новия параметър m ще има смисъл на релативистка маса.

където са въведени означенията

$$\Gamma_a := \left\{ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{1,3} \,\middle|\, x^2 = a \right\} \qquad (a \in \mathbb{R}) \,.$$

На фигура 12 между двата хиперболоида стои конусът задаван с уравнението x^2 $(= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2\,) = 0$. Този конус се нарича **светлинен конус** (с връх в началото на координатната система), тъй като включва според определението си всички събития, които са взаимно свето-подобни спрямо върха на конуса. (Последното е свързано с полагането $x^0 = ct$ в (2.1), поради което уравнението $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ описващо в нерелативистки означения разпространението на светлината излъчена в събитието в началото на отправната система, ще премине в релативистките означения в уравнението на светлинния конус, $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (x^0)^2$. Така, стените на светлинния конус ще сключват ъгъл 45 градуса спрямо вертикалната ос. Във връзка с този конус, нека да обърнем внимание и на това, че на фигура 11, двете кръстосани прави между хиперболите са двумерния аналог на светлинния конус от фигура 12. В случая на фигура 11, тези две прави формиращи светлинния конус са и мировите линии на светлинните сигнали минаващи през събитието лежащо в центъра на отправната система. На всички наши пространство-времеви диаграми мировите линии на светлинни сигнали са тези и само тези които сключват ъгъл 45 градуса спрямо вертикалната ос.

Забележка: Обръщаме внимание, че евклидовите ъгли, с които онагледяваме чертежите ни на фигури 11 и 12 са фиктивни и помощни. Геометрията на изобразяваното пространство не е евклидова, а псевдоевклидова. В частност, псевдо-евклидовата геометрия си има свое понятие за *ортогоналност*, което понякога се нарича още *псевдо-орто-*

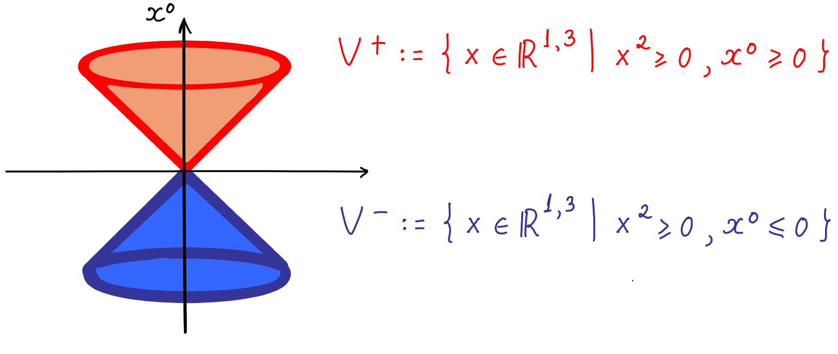
гоналност: два (четири)вектора x и y са (псевдо) ортогонални, ако е нула тяхното псевдо-евклидово скаларно произведение (2.6), $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = 0$. Например, координатните оси x^0 и x^1 на фигура 11 са (псевдо) ортогонални и също такива са и осите $x'^{\,0}$ и $x'^{\,1}$.

Фигура 11 ни води до ново фундаментално физическо заключение. Нека си припомним, че координатите (x^μ) в една отправна система са построени от един наблюдател благодарение на радио-локационния метод. Тези координати отразяват в себе определен времеви порядък на всички събития и заедно с това, и понятие за едновременност (посредством нулевата компонента x^0, която отговаря за времето). Така, в пространство-времевата диаграма на горната фигура 11 едновременността в непримованата отправната система (x^0, x^1) се задава от хоризонталните линии, успоредни на оста x^1 (тогава именно времето x^0 не се променя), но това описание на едновременността е различно за примованата отправната система $(x'^{\,0}, x'^{\,1})$, където линиите на едновременността ще бъдат успоредни на оста $x'^{\,1}$. **Едновременността е относителна**. По-точно е да се каже, че едновременността е *фиктивна и* *нефизична.* Това е просто помощно понятие зависещо от отправната система. Заедно с това и определена част от времевия порядък въведен от нулевата (времевата) координата x^0 също е нефизичен и фиктивен, тъй като и той се оказва относителен, и зависещ от отправната система. В повече от две пространство-времеви измерения, например във физическия случай на четиримерно пространство-време, фиктивното (помощно) понятие за едновременност, което всеки инерциален наблюдател въвежда за себе си, се определя не от линии на едновременност, а от (тримерни) повърхнини на едновременност. Забележете, че тези повърхнините на едновременност са тримерни равнини, които са ортогонални (в псевдо-евклидов смисъл) на мировата линия на инерциалния наблюдател, който ги определя.

Както ясно личи от последната фигура 11 единствено събитията лежащи над двете кръстосани светлинни линии (светлинния конус) ще бъдат във всяка инерциална отправна система с положителни времена, т.е., тези събития винаги ще лежат в бъдещето на събитието в центъра на диаграмата (центъра на координатната система). Това ни води до следното важно понятие: **конуса на бъдещето/миналото** (forward/backward cone) определен като

$$V^{\pm} := \left\{ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^{1,3} \middle| \mathrm{x}^2 \geqslant 0\,,\ \pm x^0 \geqslant 0 \right\}, \tag{2.18}$$

което графично е изобразено в тримерно пространство-време на следната фигура



Фигура 13: Конуси на бъдещето V^+ и миналото V^-

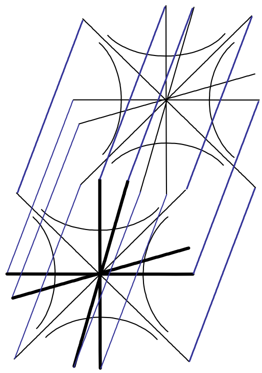
Забележете, че границата на обединението на конусите на бъдещето и миналото, $V^+ \cup V^-$, е светлинния конус (всички с център в началото на координатната система).

По-общо, конус на бъдещето/миналото с център в точка x на пространство-времето $\mathbb{R}^{1,3}$ наричаме множеството

$$V_{\mathrm{x}}^{\pm} := \left\{ \mathrm{y} \in \mathbb{R}^{1,3} \middle| (\mathrm{y} - \mathrm{x})^2 \geqslant 0 \,, \right. \\ \left. \pm \left(y^0 - x^0 \right) \geqslant 0 \right\} \\ \equiv \mathrm{x} + V^{\pm} \,. \tag{2.19}$$

Така, абсолютното и независещо от отправната система понятие за причинност става следното: събитието y е в бъдещето на събитието x тогава и само тогава, когато $\mathrm{y} \in V_{\mathrm{x}}^{+}$, т.е., когато $\mathrm{y} - \mathrm{x} \in V^{+}$. Забележете, че съгласно това определение, необходимото и достатъчно условие две събития да са причинно свързани, т.е. едното от двете да е в миналото на другото, е те да са времеподобни едно спрямо друго. Противоположното свойство е пространствено-подобието. Следователно, събития които са пространствено подобни едно спрямо друго, следва да бъдат причинно несвързани. Последното е нещо, което вече обявихме в края на първата точка. Ако погледнем отново предпоследната фигура 11 ще забележим, че пространствено-подобните събития спрямо началото на координатната система се намират извън светлинните конуси на бъдещето и миналото с център в началото. Така, тези събития лежат от ляво и от дясно на центъра на координатната система, между двете начертани светлинни линии, и за такива събития координатите x^0 и x'^0 може да приемат различни знаци. С други думи, именно такива събития нямат абсолютно определен времеви порядък спрямо началото на координатната система – те са причинно не свързани с началото.

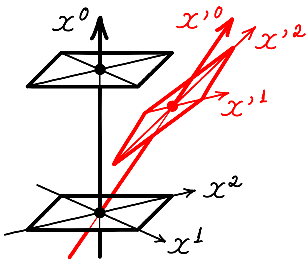
В повече от две пространство-времеви измерения диаграмата на фигура 11 се обобщава, като се заменят двете светлинни прави с *клин*, а не със светлинен конус, както е показано на фигурата по-долу. Този светлинен клин (light wedge) се получава при транслация на чертежа в перпендикулярни посоки на оставащите две пространствени измерения x^2 и x^3. Това обобщава лоренцовите трансформации от вида (2.15) в повече от две пространство-времеви измерения. Такъв вид лоренцови трансформации се наричат *лоренцови бустове* (Lorentz boost).



Фигура 14: Обобщение на ситуацията от фигура 11при многомерни лоренцови бустове.

Интуитивният смисъл на бустовете е, че те представят преход между две инерциални отправни системи, които са построени от наблюдатели A и B, така че началните им събития да съвпадат (A и B се срещат и пускат тогава часовниците си), и в този начален момент от време за двата наблюдателя техните пространствените оси "съвпадат". С други думи, това е преход, при който "базисните пространствени посоки не се менят". В последните две изречения не случайно са употребени кавички. Всъщност, пространствените оси в двете отправни системи въобще не са успоредни (в пространство-времето) и се изисква определена конвенция между A и B за да се определи в какво точно се изразява чувството на съвпадение. Оказва се обаче, че тази конвенция е нов пример за относително и фиктивно понятие: ако за три инерциални наблюдателя A, B и C, преходите от A към B и от B към C са бустове, то преходът от A към C

няма да е буст в най-общия случай. С други думи, в началните моменти от време, когато и тримата наблюдатели са заедно, A и C ще имат чувството, че пространствените им оси са завъртени едни спрямо други, въпреки че между A и B, както и между B и C няма да има в това отношение разминаване в чувствата. Математически, последното се изразява просто във факта, че произведение на лоренцови матрици, които са бустове не е буст. Въпреки това, лоренцовите бустове са полезен математически инструмент в много теоретични изводи, но поради тяхната техническа сложност няма да навлизаме по-детайлно в тяхното разглеждане.



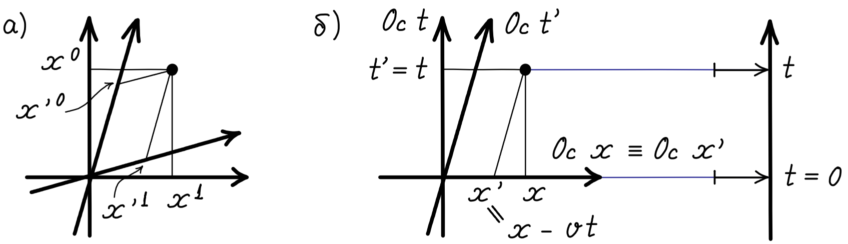
Фигура 15: Проблемът за съгласуване на пространствените направления между различни инерциални наблюдатели: както сме илюстрирали на фигурата, пространствените оси x^1 и x^2, както и $x'\,^1$ и $xx'\,^2$, лежат в равнини, които са ортогонални (в псевдо-евклидов смисъл) на времевите оси, x^0 и $x'\,^0$, съответно за двата наблюдателя. Припомняме, че за всеки инерциален наблюдател повърхнините на едновременност, в които именно то строи пространствената част на координатната си система, са винаги (псевдо) ортогонални на мировата линия на наблюдателя, която е и неговата времева ос.

Нека да резюмираме: какви лоренцови трансформации познаваме до тук? От лоренцовите бустове ние експлицитно записахме трансформацията (2.16) отразяваща движение по оста x^1. Разбира се не представлява никакъв проблем да заменим оста x^1 с x^2 или x^3. Има обаче и друг вид лоренцови трансформации. При тях наблюдателите A и B са с еднакви мирови линии, но са избрали различно пространствените си оси. Това отговаря на лоренцова матрица от вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ 0 & \Omega_{21} & \Omega_{32} & \Omega_{23} \\ 0 & \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{pmatrix}$$

където (3×3)–подматрицата $(\Omega_{jk})_{j,k=1}^{3}$ представя тримерно въртене (или малко по-общо, е ортогонална матрица). Не съвсем тривиална математическа теорема ни казва, че най- общата лоренцова матрица (т.е., изпълняваща условие (2.12), $[\Lambda]^T\ [\eta]\ [\Lambda] = [\eta]$, е произведение на матрици от вида на изброените до тук лоренцови матрици.

Нека да припомним, че освен лоренцовите преобразувания (трансформации), $\mathrm{x}' = \Lambda(\mathrm{x})$ има и по-общи смени на инерциалните отправни системи, задавани от нехомогенни линейни трансформации (2.8), $\mathrm{x}' = \Lambda(\mathrm{x}) + \mathrm{a}$. Такива преобразувания се наричат *трансформации на Поанкаре* (Poincaré transformations). Например, фигура 15 изобразява една (сравнително) обща трансформация на Поанкаре, тъй като включва и транслация на началото на отправната система.



Фигура 16: Паралел между трансформациите на Лоренц (фигура а) и Галилей (фигура б). Обърнете внимание, че както във всяко векторно пространство, така и на горните фигури координатите са спуснати с *успоредни* проекции върху осите. На фигура б) е илюстриран и факта, че съществува канонична (също и естествена) проекция на не релативисткото пространство време върху реалната права определяща абсолютното нютоново време. Очевидно, в релативисткия случай няма такава естествена проекция.

Лекция 3

Основи на специалната теория на относителността II

1. Айнщайнов закон за събиране на скоростите

До тук в изложението по специалната теория на относителността все още не сме изяснили окончателно, какви всъщност движения са възможни. Единственото, което заложихме, като изходно предположение беше, че във всяка инерциална отправна система са възможни движения, които се извършват с достатъчно малка по големина скорост (а също и ускорение). Какъв е точния предел на достижимата големина на скоростта в дадена (произволна) инерциална отправна система? Вече отбелязахме, че скорости по-големи или равни на скоростта на светлината c не могат да се постигнат от инерциални наблюдатели, тъй като проблема за собственото му време няма да има реално и положително решение. От друга страна, нека един инерциален наблюдател B се движи със скорост v спрямо друг инерциален наблюдател A и прехода от отправната система (x^μ) на A към тази на B, $(x'^{\,\mu})$, се дава от лоренцовата трансформация (Л2.2.16). Нека инерциален наблюдател C се движи спрямо B със скорост u по оста $x'^{\,1}$. Тогава, полагайки че $\dfrac{dx'^{\,1}}{dx'^{\,0}} = \dfrac{1}{c}\,\dfrac{dx'^{\,1}}{dt'} =: \dfrac{u}{c}$ (помним, че $t' = \dfrac{x'^{\,0}}{c}$) ние изразяваме скоростта $w := \dfrac{dx^1}{dt} = c\,\dfrac{dx^1}{dx^0}$ на C

спрямо A, посредством[12] (Л2.2.16). Получаваме $u = \dfrac{v - w}{1 - \dfrac{vw}{c^2}}$ или равносилно,

$$w = \frac{u + v}{1 + \dfrac{uv}{c^2}}. \qquad (1.1)$$

Последната формула е известния *айнщайнов закон* за събиране на скоростите (velocity-addition formula) в случая на колинеарни скорости. Формула (1.1) силно контрастира с *галилеевия закон* за събиране на скоростите, $w = v + u$. Независимо обаче, че айнщайновият закон дава за w по-малка стойност, от колкото га-

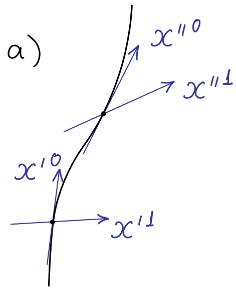
[12]на практика това означава да се раздели почленно второто равенство от (Л2.2.16) на първото и да се положи $\frac{x'^{\,1}}{x'^{\,0}} = \frac{u}{c}$ и $\frac{x^1}{x^0} = \frac{w}{c}$

лилеевия, все пак ако $0 < v < c$ и $0 < u < c$, то следва че $u < w$. С други думи, няма скорост по-малка по големина от скоростта на светлината, която да не може да бъде превишена. *Скоростта на светлината c е точния предел на скоростта на какъвто и да е наблюдател в произволна инерциална отправна система (като самата скорост c остава недостижима).*

В частност, потвърждаваме нашето очакване от края на точка 1 на предходната лекция, че две събития P и Q са причинно свързани, т.е., са време-подобни тогава и само тогава, когато съществува инерциален наблюдател, който минава през тях.

2. Метрична структура на пространство-времето

Полезно за по-нататъшното изложение се явява понятието *съпътстваща инерциална отправна система* на произволен наблюдател (възможно и неинерциален). Това е отразено на долната фигура с помощта мировата линия на наблюдателя.



Фигура 1: Съпътстващи инерциални от;равни системи

По определение, съпътстваща инерциална отправна система се задава за всяко събитие от мировата линия на разглеждания наблюдател. Както е изобразено на фигура 1а. във всеки един момент тази отправна система има за начало събитието, за което се отнася момента и за времева ос, оста която е допирателна към мировата линия в същото това събитие. Пространствените оси се менят с лоренцови бустове при преход от всяко събитие към достатъчно близко бъдещо събитие от мировата линия. Физически, можем да си мислим, че сме апроксимирали изследвания наблюдател с частично инерциални наблюдатели, както е изобразено на фигура 1б. Тоест, ускоряването на наблюдателя се извършва на кратковременни тласъци, които са изобразени на фигурата със събития N_1, N_2 и т.н., избрани достатъчно гъсто върху мировата линия. Така, между две последователни събития N_k и N_{k+1} движението е свободно (инерциално) и то определя съпътстващата инерциална отправна система за този отрязък от мировата линия.

Приведеното понятие с неговата физическа илюстрация ни позволяват да обобщим понятието за собствено време за произволен, неинерциален наблюдател. Нека P и Q са две събития от мировата линия на такъв наблюдател, като P предхожда Q и нека да изберем между тези събития, отново върху мировата линия, достатъчно гъсто разположени последователни събития $N_1 = P,\ N_2,\ \ldots,\ N_n = Q$. Тогава можем да апроксимираме собственото време $\tau_{P,Q}$ със сумата

$$\tau_{P,Q} \approx \tau_{N_1,N_2} + \tau_{N_2,N_3} + \cdots$$

$$+ \tau_{N_{n-1},N_n} = \sum_{k=2}^{n} (\mathrm{x}_k - \mathrm{x}_{k-1})^2 \,, \quad (2.1)$$

където x_k са координатите на събитието N_k в инерциалната отправна система, в която описваме движението на изследвания наблюдател. По такъв начин, в границата, когато $n \to \infty$ и точките N_1, N_2, $\ldots$, N_n равномерно гъсто покриват участъка от мировата линия между P и Q, получаваме че сумата (2.1) клони към интеграла

$$\tau_{P,Q} := \int_{t_P}^{t_Q} \sqrt{\left(\frac{d\mathrm{x}(t)}{dt}\right)^2} \, dt \,, \quad (2.2)$$

където кривата $\mathrm{x}(t)$ описва мировата в инерциалната отправна система-ма в която работим, а t_P и t_Q са времената, които съответстват на събитията P и Q. Забележете, че същият тип формула (2.2) в евклидовата геометрия дава понятието за дължина на отрязък от крива между две точки, само че скаларният квадрат $\left(\frac{d\mathrm{x}(t)}{dt}\right)^2$ е определен от евклидовото скаларно произведение. В частност, също както в евклидовия случай интегралът (2.2) е *репараметризационно инвариантен*: ако ние изберем друга параметризация на мировата линия, $\mathrm{x} = \mathrm{x}(s)$, която е определена от параметър $s = f(t)$, то ако заменим в (2.2) t с s и t_P, и t_Q, съответно с $s_P =$

$f(t_P)$, и $s_Q = f(t_Q)$, то ще получим същия резултат. Съвсем естествено е самото собствено τ време на наблюдателя също да бъде използвано за параметър по мировата линия: той е прието да се нарича *естествен параметър*. Характеристика на собственото време τ като параметър по мировата линия е, че първата производна $\frac{1}{c}\,\frac{d\mathrm{x}}{d\tau}$ (умножена по $\frac{1}{c}$) е *единичен вектор*:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathrm{x}}{d\tau}\right)^2 \,=\, 1\,. \tag{2.3}$$

Действително, по определение при преход от x към x$+\Delta$x по мировата линия, квадрата $(c\Delta\tau)^2$ на изменението на собственото време умножено по c е релативисткия интервал $(\Delta \mathrm{x})^2$ и следователно, $\frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta \tau}\right)^2 = 1$, което при граничния преход $\Delta\tau \to 0$ дава (2.3). В същото време, когато параметърът по мировата линия е времето в инерциалната отправна система, тогава $\mathrm{x}(t) = (x^0(t), \mathbf{x}(t)) = (ct, \mathbf{x}(t))$ и следователно, $\frac{d\mathrm{x}}{d\tau} = (c, \mathbf{v})$, където $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ е моментната скорост на движещия се наблюдател. Така,

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathrm{x}}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}, \qquad (2.4)$$

за $v =$ големината на $\mathbf{v}$. Тъй като, по верижното правило за диференциране на сложна функция имаме

$$\frac{d\mathrm{x}}{d\tau} = \frac{d\mathrm{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau} \tag{2.5}$$

то от (2.3) и (2.4) намираме

$$\frac{dt}{d\tau} = 1 \Bigg/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,, \tag{2.6}$$

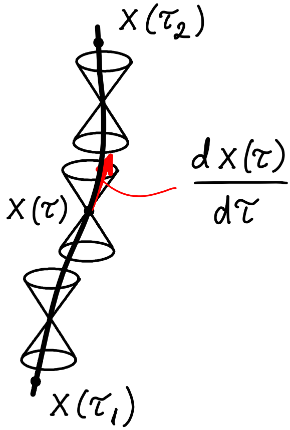
което е "вечния знаменател" в специалната теория на относителността.

По такъв начин, ние намерихме физическата интерпретация на псевдо-евклидовата дължина по *време-подобна линия* – това е собственото време на наблюдателя, чиято мирова линия е дадената линия. По определение, една крива $\mathrm{x}(\tau) \in \mathbb{R}^{1,3}$, $\tau \in \mathbb{R}$ се нарича *време-подобна кри-*

ва, ако

$$\frac{d\mathrm{x}(\tau)}{d\tau} \in V^{+} \cup V^{-} \quad \forall \tau$$

(където $V^{\pm}$ е конусите на бъдещето и миналото, (Л2.2.18)).



Фигура 2: Време-подобна мирова линия

Аналогично, *пространствено подобна крива* $\mathrm{x}(\tau) \in \mathbb{R}^{1,3}$ е такава крива, за която

$$\left(\frac{d\mathrm{x}(\tau)}{d\tau}\right)^2 < 0 \quad \forall \tau \,.$$

Дължина на пространствено подобна крива се определя с естествената корекция на формула (2.2):

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{-\left(\frac{d\mathrm{x}(\tau)}{d\tau}\right)^2}\, d\tau\,. \qquad (2.7)$$

Какъв е физическия смисъл на дължината (2.7)? Ако линията, по която определяме дължината е права отсечка между две пространствено-подобни събития P и Q с координати съответно, x_1 и x_2, то формула (2.7) възпроизвежда просто квадратния корен от модула на релативисткия интервал между x_1 и x_2:

$$\sqrt{\left|(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)^2\right|} \equiv \sqrt{-(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)^2}\,.$$

Оставяме на читателя да се убеди в качеството на лесно упражнение, че винаги съществува инерциална отправна система, в която събитията P и Q са едновременни (за интуиция може да използва и фигура Л2.11). От тук следва, че дължината на отсечката между P и Q е точно разстоянието, което инерциалния наблюдател, за който тези две събития изглеждат едновременни, би съпоставил въз основа на измервания по радио-локационния метод.

С това виждаме, че *псевдо-евклидовото скаларно произведение закодира в себе си в едно метрични-*

те структури на пространството и времето.

Едно интересно свойство на времевите дължини е "псевдо-евклидовото неравенство на триъгълника": За *взаимно време-подобни интервали между събития с координати* x, y и z, такива че x предхожда y и предхожда z е в сила:

$$\sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2}+\sqrt{(\mathrm{y}-\mathrm{z})^2} \leqslant \sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{z})^2}\,. \tag{2.8}$$

При това, равенство в горното неравенство е налице тогава и само тогава, когато трите вектори $\mathrm{x}-\mathrm{y}$, $\mathrm{y}-\mathrm{z}$ и $\mathrm{x}-\mathrm{z}$ са колинеарни и насочени в една посока. Обърнете внимание: в евклидовия вариант на неравенство (2.8) посоката е противоположна! Като инструкция за извода отбелязваме, че е достатъчно е да се докаже, че ако a, b, c, d, $e \geqslant 0$ са такива, че $a \geqslant b$, $c \geqslant d$, $b + d \geqslant e$, то

$$\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{c^2 - d^2} \leqslant \sqrt{(a + c)^2 - e^2}$$

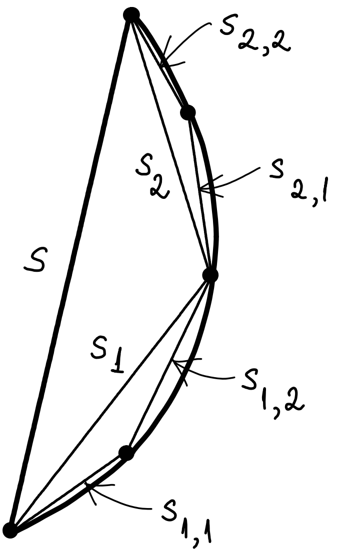
или дори само за $e^2 = (b + d)^2$.

По-общо, ако събитието с координати x е в миналото на събитието y, то измежду времеподобните криви съединяващи x и y правата отсечка има *най-голяма* дължина.

Илюстрация:

$s \geqslant s_1 + s_2$

$$\geqslant \underbrace{s_{1,1} + s_{1,2}}_{s_1 \geqslant} + \underbrace{s_{2,1} + s_{2,2}}_{s_2 \geqslant} \qquad \square$$



Фигура 3: Псевдо-евклидово неравенство на триъгълника

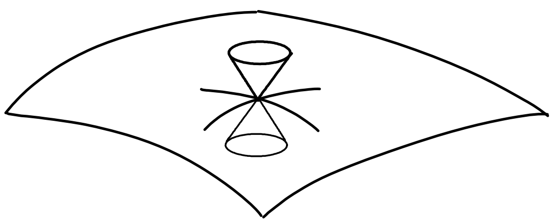
Последното твърдение на физичен език е така наречения "парадокс на близнаците": между две причинно свързани събития (⇔ време-подобни събития) най-голямо собствено време из между всички наблюдатели минаващи през двете събития отчита инерциалния наблюдател.

Забележка: Правите линии в плоското псевдо-риманово многообразие $\mathbb{R}^{1,3}$ са *геодезични* в смисъл, че са екстремали на действието "дължина"

$$\int \sqrt{\left|\left(\frac{d\mathrm{x}(\tau)}{d\tau}\right)^2\right|}\, d\tau\,.$$

Последното следствие ни показва, че за времеподобни прави това действие има максимум, а не минимум. Именно този функционал се приема за *действие на свободна релативистична частица*.

В заключение ще отбележим, че пространствено-подобните линии имат многомерно обобщение: *пространствено-подобна повърхност* Σ е такава повърхност в $\mathbb{R}^{1,3}$, която пресича *трансверзално* всеки конус $\mathrm{x} + V^{+}$ за $\forall\, \mathrm{x} \in \Sigma$.



Фигура 4: Пространствено-подобна повърхност

По-точно, искаме за $\forall$ крива $\big(\, \mathrm{x}(\tau)\, \big)_{\tau}$ $\subset \Sigma$

$$\frac{d\mathrm{x}(\tau)}{d\tau} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d\mathrm{x}(\tau)}{d\tau}\right)^{2} < 0\,.$$

Пространствено подобните повърхнини с размерност 3 можем да си мислим физически, като “обобщени повърхнини на едновременност”. В математиката (и математическата физика) такива повърхнини (с още малко технически ограничения) се наричат *повърхности на Коши* (Cauchy surfaces) и мога да служат за задаване на така наречените *начални условия* определящи еволюцията на описваната система.

3. Причинна структура на пространство-времето

Макар и да въведохме вече причинната наредба в пространство-времето тук ще резюмираме отново с известни допълнения.

От гледна точка на псевдо-евклидовата геометрия, причинната структура в пространство-времето, т.е., в пространството на Минковски $\mathbb{R}^{1,3}$ се въвежда от следната бинарна релация наречена *причинна наредба*:

$$\mathrm{x} \preccurlyeq \mathrm{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{y} - \mathrm{x} \in V^+ .$$

Това е релация на *частична наредба*, т.е. изпълнява следните свойства, които са дефиниционни за релации на частични наредби:

(o1) *рефлективност*: $\mathrm{x} \preccurlyeq \mathrm{x}$,

(o2) *антисиметрия*: $\mathrm{x} \preccurlyeq \mathrm{y}$ и $\mathrm{y} \preccurlyeq \mathrm{x}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{x} = \mathrm{y}$, (o3) *транзитивност*: $\mathrm{x} \preccurlyeq \mathrm{y}$ и $\mathrm{y} \preccurlyeq \mathrm{z}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{x} \preccurlyeq \mathrm{z}$,

за $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^{1,3}$. Наистина:

(o1) $\iff$ $0 \in V^+$ - изпълнено е;

(o2) $\iff$ $V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$ - изпълнено е;

(o3) $\iff$ $\mathrm{a} \in V^+$ и $\mathrm{b} \in V^+$ $\Rightarrow$ $\mathrm{a} + \mathrm{b} \in V^+$ - изпълнено е.

Да припомним *физическата интерпретация:*

$$\mathrm{x} \preccurlyeq \mathrm{y} \quad \iff$$

събитието x може да причини следствия в събитието y ,

както и някои от главните й *следствия:*

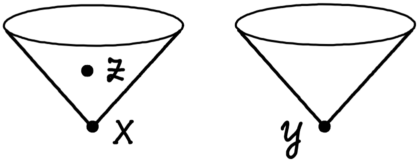
- $x \preccurlyeq y$ или $y \preccurlyeq x \iff (x-y)^2 \geqslant 0$. Такива събития нарекохме *време-подобни* (time-like separated) или също *причинно свързани*.

- не $x \preccurlyeq y$ и не $y \preccurlyeq x \iff (x-y)^2 > 0$. Такива събития се нарекохме *пространствено подобни* (space-like separated) или също *причинно несвързани*. Последното се означава с

$$x \sim y\,.$$

- Граничен случай между горните два: $(x-y)^2 = 0$. Такива събития са все още времеподобни и не пространствено подобни. В този специален случай събитията x и y нарекохме още *взаимно изотропни* или още *светоподобни* (light-like).

Забележки: 1) Пространствено-подобието $x \sim y$ **не е** релация на еквивалентност в $\mathbb{R}^{1,3}$. Например в ситуацията



Фигура 5: Пространствено-подобието не е транзитивно

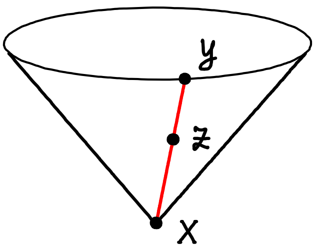
имаме, $x \sim y$ и $y \sim z$, но не $x \sim z$, тъй като $x \preccurlyeq z$.

2) В сила е следното твърдение: ако $x \preccurlyeq y$ и x и y са светоподобни, т.е.

$(x-y)^2 = 0$, тогава множеството[13]

$$[x,y] := \left\{ z \in \mathbb{R}^{1,3} \,\middle|\, x \preccurlyeq z \preccurlyeq y \right\} \tag{3.1}$$

е *линейно наредено*, т.е. за $\forall\, z,\, w \in [x,y]$ имаме $z \preccurlyeq w$ или $w \preccurlyeq z$.



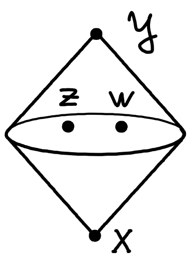
Фигура 6: Мировата линия на светлинен сигнал е образуваща права на светлинен конус

Както се вижда от картинката, множеството $[x,y]$ е права линия, лежаща върху границата на конуса на бъдещето с център в x, $x + V^+$, т.е. това е горната половина

[13]означението да не се възприема като това за комутаторите използвани в квантовата механика, а като затворен "интервал"

на светлинния конус с център в x, $x + \Gamma_0$. Физически множеството $[x, y]$ при светоподобни x и y има смисъл на *най-бърз сигнал*.

3) В останалия случай на времеподобни $x \preccurlyeq y$, но не светоподобни събития (т.е. $(x - y)^2 < 0$) множеството (3.1) не е линейно наредено: $\exists\, z, w \in [x, y]$, такава че $z \sim w$.



Фигура 7: Причиннта наредба не е линейна

Такива множества се наричат *двойни конуси* (double cones) или още *diamonds*.

4. Релативистка динамика

Това с което главно се занимавахме до тук в специалната теория на относителността може да се нарече “релативистка кинематика”, тъй като основно се концентрирахме върху описанието на движението на телата в условията на новата концепция за пространство и време. Въпреки това, срещнахме и елементи на динамика съдържащи се в понятията инерциален наблюдател и инерциална отправна система Тези понятия се отнасяха до свободното движение и необходимата модификация на първия принцип на Нютон при прехода към специалната теория на относителността. Фактически, в основата си първият принцип, като неотличимост и равноправност на свободно движещите се наблюдатели, и равномерността на относителното им движение един спрямо друг, остават същите и в специалната теория на относителността. Новият елемент беше свързан с отказване от нютоновия възглед за абсолютно време и едновременност, и замяната му с принципа за постоянство на скоростта на светлината. който на свой ред идва от налагане на принципа за равноправието на инерциалните отправни системи по отношение на законите на електромагнетизма.

Остава да намерим адекватна промяна на втория и третия принцип на Нютон в специалната теория на относителността. Това ще ни доведе до релативистките понятия за сила, импулс и енергия.

От известна философска гледна точка, вторият принцип на Нютон до някъде съдържа в себе си определение за сила: според първия принцип на Нютон при липсата на въздействие върху телата скоростта им не се променя. Следователно, ускорението на едно тяло може да се възприеме като мярка за интензивността на указаното въздействие. От друга страна, вторият принцип на Нютон има и смисъла на физичен закон, доколкото ние имаме понятие еднаквост на "интензивностите" на въздействие върху телата. Така, може да се установи, че ако в един случай на еднакво въздействие върху две тела те получават ускорения a_1 и a_2, а при друг случай на еднакво въздействие – ускорения b_1 и b_2 съответно, то имаме равенство на отношенията

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}\,. \tag{4.1}$$

Тогава, горното отношение може да се обяви за характеристика на телата. Това именно е отношението на техните маси, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$. Така достигаме и до известната формулировка на втория принцип на Нютон,

$$F = ma$$

записан в момента за простота в скаларен вид, за едномерни движения, но разбира се, винаги следва да помним, че в общия случай (на нютоновата механика) силата F и ускорението a са вектори в тримерното пространство, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{a}$ съответно. За простота обаче, в началото на този увод към динамиката ще разгледаме скаларния случай на едномерни движения.

Изложеният ход на мисли изглежда напълно уместен и по отношение на специалната теория на относителността. Веднага срещаме обаче принципно затруднение: ускорението $a = \dfrac{du}{dt}$ (u е скоростта на тялото) е лош кандидат за мярка на интензивността на въздействията, тъй като *не е релативистки инвариант*. При галилеевите трансформации, които описват прехода от една инерциална отправна система към друга в нютоновата механика се оказва, че скоростта u се трансформира в скорост w по закона $w = u + v$, където v е относителната скорост на едната отправна система спрямо другата. Диференцирайки по времето, тъй като v е константа (равномерно и праволинейно движение), получаваме

$$a \;:=\; \frac{du}{dt} \;=\; \frac{dw}{dt} \;=:\; a' \,, \qquad (4.2)$$

т.е., ускорението е *галилеев инвариант*, то не се променя при преход от една инерциална отправна система към друга. В релативисткия случай, равенството (4.2) отпада по две причини, галилеевия закон за събиране на скоростите $w = u + v$ се заменя с айнщайновия закон (1.1) от една страна и от друга, хода на времето също се модифицира. *Ускорението не е релативистки инвариант.* Нещо повече, при трансформацията си от една инерциална отправна система към друга ускорението в новата ще зависи и от моментната скорост на тялото, поради което отношения като $\dfrac{a_1}{a_2}$ в (4.1) няма да зависят само от вътрешните характеристики на телата, но ще зависят също и от техните скорости. Можем да кажем, че релативисткаta маса зависи от скоростта на тялото, което е широко разпространено схващане извън теоретичната физика. Ние обаче не искаме да казваме това. *В настоящия курс от лекции ще определим масата, като релативистки* *инвариант и тя няма да зависи от скоростта.* За да направим съответствие с терминологията в учебниците, където "масата зависи от скоростта", нашето понятие за маса ще съответства на това, което в тези учебници се нарича "маса на покой".

Изходът от затруднението с неинвариантността на ускорението е прост. Ще обявим закона (4.1) за изпълнен само при положение, че началната (моментната) скорост на телата в момента на въздействие е *равна на нула.* Или физически равносилно е да кажем, че закона (4.1) се изпълнява при малки скорости на телата (в сравнение със скоростта на светлината). Това сочи и експерименталният опит идващ от нютоновата механика. От теоретична гледна точка, предложеното решение означава да определяме релативистки ускорението на едно тяло винаги в съпътстващата го инерциална отправна система, която въведохме в началото точка 2 на настоящата лекция.

По такъв начин се очертава идеята, че за да се постигне релативистка инвариантност при описание на движението и ускорението, ние трябва да се стремим към използване на "вътрешни термини/понятия".

Именно такова понятие беше съпътстващата инерциална отправна система. Вътрешно понятие е и собственото време, което нарекохме още и естествен параметър на мировата линия.

За да сме по-коректни от този момент нататък ще говорим за *материална точка*, чието движение описваме с мирова линия. Физически, материалната точка може да се замени с достатъчно малко тяло.

Така, ако в работната инерциална отправна система движението изследваната материална точка се описва от мирова линия $\mathrm{x} = \mathrm{x}(\tau)$, параметризирана със собственото време τ по линията, то определяме *четиримерното* или още наричано, *релативистко ускорение на тялото*, като втората производна

$$\mathrm{a}(\tau) \ := \ \frac{d^2\mathrm{x}(\tau)}{(d\tau)^2} \tag{4.3}$$

(спрямо собственото време). Нека да означим също

$$\mathrm{n}(\tau) \ := \ \frac{1}{c}\frac{d\mathrm{x}}{d\tau}, \quad \mathrm{a}(\tau) \ = \ c\,\frac{d\mathrm{n}(\tau)}{d\tau}, \tag{4.4}$$

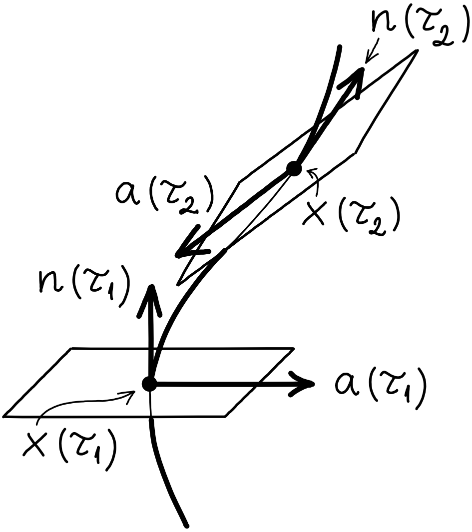
което е допирателния единичен вектор към мировата линия в момента τ, съгласно (2.3), т.е., $\mathrm{n}(\tau)^2 \equiv \mathrm{n}(\tau) \cdot \mathrm{n}(\tau) = 1$. Четиривекторът $\mathrm{n}(\tau)$ се нарича (*нормален*) *четиривектор на* (*моментната*) *скорост*. Ако диференцираме по τ равенството $1 =$

$\mathrm{n}(\tau) \cdot \mathrm{n}(\tau)$, то от *правилото на Лабниц* (Leibniz rule) ще получим $0 = \dfrac{d}{d\tau}\big(\mathrm{n}(\tau) \cdot \mathrm{n}(\tau)\big) = \dfrac{d\mathrm{n}(\tau)}{d\tau} \cdot \mathrm{n}(\tau) + \mathrm{n}(\tau) \cdot \dfrac{d\mathrm{n}(\tau)}{d\tau} = \dfrac{2}{c}\,\mathrm{a}(\tau) \cdot \mathrm{n}(\tau)$, т.е.,[14]

$$\mathrm{a}(\tau) \cdot \mathrm{n}(\tau) = 0\,. \qquad (4.5)$$

С други думи, релативисткото ускорение на материалната точка, в даден момент от време (дадено събитие) от мировата ѝ линия, е винаги (псевдо) ортогонално на (допирателната към) мировата линия в този момент.

[14]Свойството (4.5) на четиримерния вектор $\mathrm{a}(\tau)$ пряко обобщава ситуацията с нормалното ускорение при въртене по окръжност.



Фигура 8: Релативистко ускорение. То лежи винаги винаги в равнината, която е ортогонална (в псевдо-евклидов смисъл) към мировата линия в дадения момент.

Полезно упражнение е да се изрази моментното релативисткото ускорение a посредством съответните: моментна тримерна скорост $\mathbf{v}$ и моментно тримерно ускорение, което нека сега да означим с $\dot{\mathbf{v}} := \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, за да избегнем объркване с тримерната част $\mathbf{a}$ на четиривектора a. От равенството $\mathrm{a} = c\,\dfrac{d\mathrm{n}}{d\tau} = c\,\dfrac{d\mathrm{n}}{dt}\,\dfrac{dt}{d\tau}$ и формулите $\mathrm{n} = \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}(c, \mathbf{v})$ (съгласно (2.5) и (2.6)) получаваме:

$$\mathrm{a} = \left(\frac{\frac{\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \frac{\dot{\mathbf{v}} - \frac{v^2\,\dot{\mathbf{v}}}{c^2} + \frac{(\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}\right),$$

където е използвано равенството $\dfrac{d}{dt}(v^2) = \dfrac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = 2\,\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = 2\,\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}$ и за тримерните вектори $\mathbf{v}$ и $\dot{\mathbf{v}}$ е използвано евклидовото скаларно произведение $\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}$. В частност, при моментна скорост $\mathbf{v} = 0$, т.е., в съпътстващата инерциална отправна система на покой имаме

$$\mathrm{a} = (0, \dot{\mathbf{v}})\,.$$

Така, тримерната част на релативисткото ускорение a съвпада с обичайното тримерно ускорение $\dot{\mathbf{v}}$, когато е отчетено в съпътстващата инерциална отправна система.

И така, можем да положим като релативистка модификация на втория принцип на Нютон уравнението

$$\mathrm{F} = m\mathrm{a}\,, \tag{4.6}$$

където F ще наречем *четиримерна/релативистка сила*, а m е масата на материалната точка (малкото тяло), върху което действа тази релативистка сила. Формула (4.6) ни поднася обаче нови изненади. Както отбелязахме по-горе, релативисткото ускорение a е винаги ортогонално (в псевдо-евклидов смисъл) на четиримерната скорост n на точката (т.е., на допирателния вектор към мировата й линия). Следователно, и релативистката сила F е (псевдо) ортогонална на n, което на свой ред означава, че F трябва да "знае" накъде е насочена скоростта на точката, а не само да зависи от нейното положение. Разбира се и в класическата нютонова механика се разглеждат сили зависещи, както от положението, така и от скоростта на телата. Например, такава е магнитната сила, която обсъждахме в първата лекция. Само че в нютоновата механика се разглеждат и сили, които не зависят от скоростта: гравитационната сила на Нютон е например такава сила; електростатичната сила на Кулон е друг такъв пример. Следователно, последните два закона непременно следва да се модифицират за да станат релативистки инвариантни, т.е., за да изглеждат еднакво във всички инерциални отправни системи. Разбира се, нютоновата теория за гравитацията днес е заменена с общата теория на относителността, която надхвърля дори пределите на специалната теория на относителността. А що се отнася до електростатичната сила на Кулон, необходимата релативистка корекция се оказва не кое да е, а магнитната сила! Така, истинската релативистка електромагнитна сила има тримерна част съответстваща на силата на Лоренц. Последното указва, че тримерните вектори на интензитета на електричното поле и на магнитната индукция следва да се обединят в един общ обект при преход от една инерциална отправна система към друга. Именно това прави така наречения електромагнитен тензор на Максуел, който ще въведем в следващата точка.

След като обсъдихме релативистския аналог на втория принцип на Нютон нека да се обърнем към третия принцип – равенството на силите на действието и противодействието. Тук отново срещаме принципна трудност. Ако говорим за действие и противодействие, те трябва да стават в едно и също събитие, понеже нямаме абсолютна едновременност и мигновено въздействие на разстояние. Всъщност, третия принцип на Нютон има един еквивалентен израз, който е *закона за запаз-*

ване на импулса. Известно е, че Нютон е формулирал своя втори принцип във вида

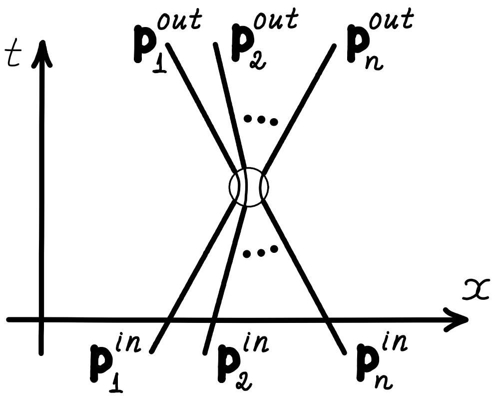
$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{p} := m\mathbf{v},$$

където $\mathbf{p}$ се нарича (*нерелативистки) импулс на тялото.* Ние след малко ще "иззремем" отново буквата $\mathbf{p}$ за нуждите на друг обект, тримерната част на релативисткия импулс p, но нека за момент да я използваме в нейното нютоновско предназначение. Така, съгласно третия принцип на Нютон, ако n точки с импулси $\mathbf{p}_1(t)$, $\mathbf{p}_2(t)$, $\ldots$, $\mathbf{p}_n(t)$ си взаимодействат единствено по между си, то

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{p}_1(t) + \cdots + \mathbf{p}_n(t)\big) = \mathrm{F}_1(t) + \cdots + \mathrm{F}_n(t) = 0 \qquad (4.7)$$

и следователно, сумарният импулс, $\mathbf{p}_1(t) + \cdots + \mathbf{p}_n(t)$, ще остава постоянен във времето. Последното именно е и закона за запазване на импулса. При изследвания с елементарни частици обикновено взаимодействието се извършва в изключително малка област от пространството за също така кратък момент от време. С други думи, от *макроскопична гледна точка* това е моментен точков сблъсък, както е изобразено на фигура 9 по-долу. Тогава, ако преди и след сблъсъка частиците са имали импулси $\mathbf{p}_1^{in}$, ..., $\mathbf{p}_n^{in}$ и $\mathbf{p}_1^{out}$, ..., $\mathbf{p}_n^{out}$, съответно, то ще е в сила равенството

$$\mathbf{p}_1^{in} + \cdots + \mathbf{p}_n^{in} = \mathbf{p}_1^{out} + \cdots + \mathbf{p}_n^{out} .$$



Фигура 9: Закон за запазване на импулса при сблъсък на n материални точки (тела): точки с *начални* (нерелативистки) импулси $\mathbf{p}_1^{in}$, ..., $\mathbf{p}_n^{in}$, взаимодействат в малка област на пространство-времето, което можем да си мислим в пределния случай, като моментен точков сблъсък. След сблъсъка те получават импулси съответно равни на, $\mathbf{p}_1^{out}$, ..., $\mathbf{p}_n^{out}$. Според закона за запазване на импулса: $\mathbf{p}_1^{in} + \cdots + \mathbf{p}_n^{in} = \mathbf{p}_1^{out} + \cdots + \mathbf{p}_n^{out}$.

Ситуацията с моментен точков сблъсък може да се пренесе без проблем и в теория на относителността, понеже тогава нямаме мигновено действие на разстояние. Така, можем да поискаме сумата на всички действащи релативистки сили, $\mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_n$, в малката област от пространство-времето, където става взаимодействието, да бъде равна на нула. Нека да въведем аналогично на Нютон *релативистки, четиримерен импулс* p, чиято скорост на изменение (но спрямо собственото време) е равна на действа-щата релативистка сила:[15]

$$\mathrm{F} = \frac{d\mathrm{p}}{d\tau},$$
$$\mathrm{p}(\tau) := m\frac{d\mathrm{x}(\tau)}{d\tau} = mc\,\mathrm{n}(\tau). \quad (4.8)$$

Така, преформулирайки ситуацията от фигура 9 за релативистки частици (материални точки), които влизат във взаимодействие в малка област на пространство-времето, ще получим релативисткия закон за

[15] Тук срещаме известен тънък момент свързан с това, че всяка частица си има свое индивидуално собствено време, за разлика от равенство (4.7), където времето е общо. Ние ще пренебрегнем това обстоятелство, понеже и без друго в граничния случай на моментен точков сблъсък мировите линии стават сингулярни (не гладки) и се губи смисъла на това какви точно са скоростите на изменение на собствените времена спрямо някое глобално зададено време в инерциална отправна система. В крайна сметка, закона за запазване на релативисткия импулс, към който се стремим, ще приемем за постулат. Впрочем, този закон добре се съгласува с експериментите при сблъсъци между елементарни частици.

запазване на импулса:

$$\mathrm{p}_1^{in} + \cdots + \mathrm{p}_n^{in} \;=\; \mathrm{p}_1^{out} + \cdots + \mathrm{p}_n^{out}\,, \tag{4.9}$$

който приемаме като постулат в специалната теория на относителността.

С това трите запазващи се компоненти на пълния импулс в нерелативистичния случай преминаха в четири запазващи се компоненти. Какъв е смисъла на новата добавена компонента, нулевата? За целта, нека първо да изразим всичките четири компоненти на релативисткия импулс с помощта на обикновената тримерна скорост $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}^2 =: v^2$):

$$\mathrm{p} \;=\; (p^0, \mathbf{p})\,, \tag{4.10}$$

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

От този момент нататък, p престава да означава нерелативисткия тримерен импулс (4.8) и става тримерната част на релативистки импулс. За да намерим тогава физическия смисъл на четирите компоненти на релативисткия импулс, нека да използваме таka наречения *принцип на съответствието*, който ще срещаме и понататък в този курс. Този принцип изразява известна приемственост при преход от стари към нови физични теории. Доколкото една нова физична теория е уточнение на стара теория, която макар и да е давала верни предсказания в даден диапазон от експериментални измервания, то е започнала да се отклонява от правилното описание на система при навлизане в нови области на състоянията. Затова, новата теория следва да обясни защо старата е давала добро приближение на експеримента до този момент. Заедно с това, естествено идва и съответствие между понятия и закони от новата и старата теория. Това в най-общи линии е принципа за съответствие, който освен тук ще използваме и при въвеждането на квантовата механика, като теория заместваща класическата механика.

Класическата нютонова механика може да се разглежда като приближение към специалната теория на относителността, което дава добър резултат за малки скорости на движение спрямо скоростта на светлината c. Формално, ако $c \to \infty$ то бихме имали безкрайна скорост на предаване на сигнали и следователно, абсолютна едновременност. И така, нека да развием по $\frac{\mathbf{v}}{c} \to 0$ изразите в (4.9) до първия ненулев порядък. Тази граница е прието да се нарича също *нерелативистична граница.* За целта използваме равенството[16]

$$(1-z)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\,z + O(z^2)\,.$$

Резултатът е следния:

$$cp^0 \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}\,, \quad \mathbf{p} \approx m\mathbf{v}\,.$$

Така, докато в нерелативистичната граница тримерната част $\mathbf{p}$ на релативисткия импулс клони към обичайния нютоновски тримерен импулс от (4.8), то нулевата му компонента p^0 (след доумножаване на c) клони към това, което се нарича *кинетична енергия на материална*

[16]по-обща формула идва от *биномиалната формула*:

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}\, z^n\,,$$

където $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

точка, но отместена с константата

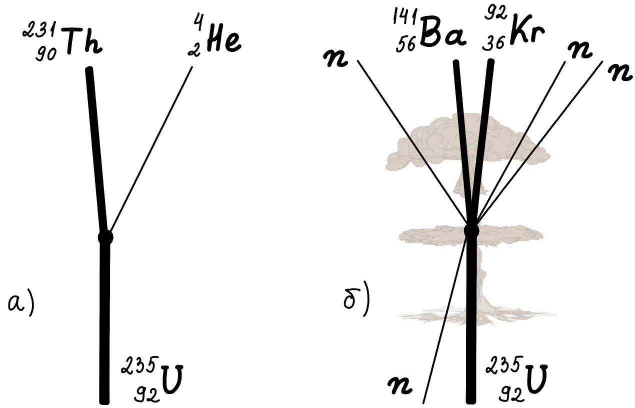
$$\mathcal{E}_{rest} = mc^2 \,.$$

Последното е знаменитата формула на Айнщайн, която се нарича енергия на покой на тяло с маса m. *Така, можем да кажем, че докато трите пространствени компоненти на релативисткия импулс* p *и тяхното запазване обобщават нерелативистки импулс и неговия закон за запазване, то нулевата компонента* p^0 *обобщава нерелативисткото понятие за енергия,*

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = cp^0 \,.$$

По тази причина релативисткия импулс се нарича още *четиривектор* *на енергията-импулса*, а неговото запазване – *релативистки закон за запазване на енергията-импулса*.

С понятието за релативистки импулс по същество завършваме темата за релативистка динамика. Следват някои бележки за по-доброто осмисляне на значимостта на приведените резултати. Преди всичко, кинетичната енергия от нерелативистката механика получи колосална добавка – енергията на покой mc^2. Така, в релативистката механика балансът на масата (запазването на масата) става част от закона за запазване на енергията! *Масата по отделно не се запазва, а в* *комбинация с пълната енергия на системата.* С други думи, масата може да се превърне в енергия! Този ефект се наблюдава експериментално в ядрените реакции и реакциите на елементарните частици и се нарича *дефект на масата.* На фигура 10.а е изобразен радиоактивния разпад на изотопа на урана с атомно тегло 235 (и атомен номер 92, който съответства на заряда на ядрото). На фигура 10.б е илюстриран може би най-забележителния случай на дефект на масата, който дори е променил коренно хода на нашата история. Самото слънце свети благодарение на дефекта на масата, изразен в ядрените реакции на така наречения *термоядрен синтез*.



Фигура 10: Дефект на масата. На фигура а) е представена пространство-времевата диаграма на радиоактивния разпад на уран 235, $^{235}_{92}\mathbf{U} \to {}^{231}_{90}\mathbf{He} + {}^{4}_{2}\mathbf{He}$. При този процес грубият баланс на масата, на ниво атомни единици за маса, се запазва, $235 = 231+4$ (закона за запазване на заряда е изпълнен точно: $92 = 90 + 2$). Въпреки това, при разпада се наблюдава липсваща маса от порядъка на 0.5% от атомната единица. При делението на същия изотоп на урана (фигура б)), ${}^{1}_{0}\mathbf{n} + {}^{235}_{92}\mathbf{U} \to {}^{141}_{56}\mathbf{Ba} + {}^{92}_{36}\mathbf{Kr} + {}^{1}_{0}\mathbf{n} + {}^{1}_{0}\mathbf{n} + {}^{1}_{0}\mathbf{n}$, което е в основата на верижната реакция в атомната експлозия, дефекта на масата е забележим почти на порядъка на атомна единица за маса – дефицитът е към 20% от тази единица за маса (грубото сравнение $1 + 235 = 141 + 92 + 1 + 1 + 1$ е отново изпълнено).

Забележете, че квадрата на релативисткия импулс на една частица е постоянен и пропорционален на квадрата на масата m на частицата:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}^2 &\equiv \mathrm{p} \cdot \mathrm{p} \\ &\equiv (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \\ &= m^2 c^2 \, . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Действително, съгласно (4.8), $\mathrm{p} = mc\,\mathrm{n}$ и $\mathrm{n}^2 = 1$. Обърнете внимание също, че поради равенството $\mathrm{p} = mc\,\mathrm{n}$ следва също и че p е винаги време-подобен вектор насочен към бъдещето (лежи в конуса на бъдещето). По такъв начин, при разпад на една частица (да речем, радиоактивен разпад на атомно ядро) според закона за запазване на енергията-импулса имаме

$$\mathrm{p} \;=\; \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 + \cdots + \mathrm{p}_n \,.$$

От друга страна обаче, псевдо-евклидовото неравенство на триъгълника (2.8) ни дава, че

$$\sqrt{\mathrm{p}^2} \;\geqslant\; \sqrt{\mathrm{p}_1^2} + \sqrt{\mathrm{p}_2^2} + \cdots + \sqrt{\mathrm{p}_n^2}$$

тоест,

$$m \;\geqslant\; m_1 + \cdots + m_n \,.$$

Дефектът на масата е неизбежен (!), тъй като равенството в горните неравенства е възможно *тогава и само тогава*, когато всички вектори са колинеарни, т.е, когато имаме разпад без разпръскване на продуктите.

5. Релативистка инвариантност

Релативистката инвариантност на физичните закони е тяхното свойство да изглеждат еднакво във всички инерциални отправни системи. Това отразява принципът за относителност: всички инерциални отправни системи са равноправни и не могат да се отличат една от друга с вътрешни физични експерименти. Релативистките означения, чието въвеждане започнахме в предходната точка на тази лекция, целят основно да направят явна и очевидна релативистката инвариантност на различните изрази включващи координатни зависимости. Най-напред, ще допълним тези означения с една важна договорка: това е **конвенцията за сумиране по повтарящи се горни и долни индекси**. Както може би читателите са забелязали, докато координатите на четиримерните вектори $\mathrm{x} = (x^{\mu})$ записвахме с горни индекси, то компонентите на метричния тензор $\eta = (\eta_{\mu\nu})$ записвахме с долни индекси. По такъв начин, формула (Л2.2.5) за квадратичната форма на релативисткия интервал се записва като

$$\mathrm{x}^2 \; (\equiv \mathrm{x} \cdot \mathrm{x}) \; = \; \sum_{\mu,\,\nu=0}^{3} \; \eta_{\mu\nu}\, x^{\mu} x^{\nu}$$

$$=: \; \eta_{\mu\nu}\, x^{\mu} x^{\nu} \, . \tag{5.1}$$

Последното дефиниционно равенство е нашият първи пример за споменатата конвенция за сумиране, която в по-общ вид се формулира така:

ако в един израз се срещат два еднакви индекса, веднъж като горен и веднъж като долен, то по тях се подразбира сумиране.

(5.2)

Ако въведем така наречените *ковариантни* координати:[17]

$$x_\mu := \eta_{\mu\nu} x^\nu , \tag{5.3}$$

тогава релативисткия интервал (2.5) приема още по-простия вид

$$x_\mu x^\mu$$

[17] забележете, че $x^0 = x_0$, $x^1 = -x_1$, $x^2 = -x_2$ и $x^3 = -x_3$

$$(\equiv \; x_0 \, x^0 + x_1 \, x^1 + x_2 \, x^2 + x_3 \, x^3$$
$$= \; \eta_{\mu\nu} \, x^\mu \, x^\nu \,) \, . \tag{5.4}$$

Така, най-общо една линейна лоренцова трансформация $\mathrm{x}' = \Lambda(\mathrm{x})$ (2.8) при новата конвенция (5.2) може се запише много компактно във вида

$$x'^{\,\mu} \; = \; \Lambda^\mu_\nu \, x^\nu \; , \tag{5.5}$$

където числата Λ^μ_ν са организирани в матрица по следния начин

$$\Lambda = \left(\Lambda^\mu_\nu\right)^3_{\mu,\nu\,=\,0} \, .$$

При така въведените означения, запазването на релативисткия интервал, $\Lambda(\mathrm{x}) \cdot \Lambda(\mathrm{x}) = \mathrm{x} \cdot \mathrm{x}$ (виж. (2.11)), се записва като (следните равенства са аналогични на матричните равенства (2.12)):

$$\eta_{\mu\nu}\, x^{\mu}\, x^{\nu} \;=\; \eta_{\mu'\nu'}\, \Lambda^{\mu'}_{\mu}\, \Lambda^{\nu'}_{\nu}\, x^{\mu}\, x^{\nu}$$
$$\Longrightarrow \quad \eta_{\mu\nu} \;=\; \Lambda^{\mu'}_{\mu}\, \Lambda^{\nu'}_{\nu}\, \eta_{\mu'\nu'} \qquad (5.6)$$

(второто следва от първото, както преди, с вземане на частната производна $\dfrac{\partial^2}{(\partial x^{\mu})(\partial x^{\nu})}$). Ако с $(\eta^{\mu\nu})$ означим обратната матрица на $(\eta_{\mu\nu})$, т.е.,[18]

$$\eta^{\mu\nu}\, \eta_{\nu\rho} \;=\; \delta^{\mu}_{\rho}\,, \qquad (5.7)$$

където δ^{μ}_{ν} е **символът на Кронекер**,

$$\delta^{\mu}_{\nu} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{ако} \quad \mu \;=\; \nu\,, \\ 0 & \text{ако} \quad \mu \;\neq\; \nu\,, \end{cases} \qquad (5.8)$$

то условието (5.6) се презаписва

[18]всъщност в този конкретен случай, $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

като[19]

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^{\mu}_{\ \nu} \,=\, \eta^{\mu\mu'}\,\eta_{\nu\nu'}\,\Lambda^{\nu'}_{\ \mu'}\,, \qquad (5.9)$$

където Λ^{-1} е обратната матрица на Λ. От тук се извежда непосредствено, че

$$x'^{\,\mu} \,=\, \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\,x^{\nu} \quad \Longleftrightarrow \quad x'_{\mu} \,=\, \left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \mu}\,x_{\nu}\,. \qquad (5.10)$$

Съветваме читателя, който за първи път се сблъсква с конвенцията за сумиране (5.2), да проследи внимателно нейното прилагане във всички формули до тук, както и да направи всички пропуснати изводи, в качеството на полезно упражнение. Обръщаме внимание и на често сре-

[19]това равенство е равносилно на матричното равенство $[\Lambda]^{-1} = [\eta]^{-1}\,[\Lambda]^{T}\,[\eta]$

щаните формули за смятане с делта символа на Крьонекер, като δ^{μ}_{ν} $x^{\nu} = x^{\mu}$ и δ^{μ}_{ν} $x_{\mu} = x_{\nu}$, т.е., ако в едно сумиране участва индекс със съответен повтарящ се индекс на делта символ, то този сумационен индекс следва да се замени с другия индекс в делта символа, след което делта символа се премахва.

Като следствие от горните равенства и правила за смятане получаваме, че при трансформацията x′ = Λx (5.10) имаме следните трансформации на частните производни по x^{μ} и по $x'^{\,\mu}$:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\,\mu}} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \Lambda^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} . \tag{5.11}$$

По-подробно, ако направим произволна смяна на променливите $\mathrm{x}' = \mathrm{x}'(\mathrm{x})$ ($\Leftrightarrow$ $\mathrm{x} = \mathrm{x}(\mathrm{x}')$) в една функция $\phi(\mathrm{x})$, и преминем към функция $\phi'(\mathrm{x}') = \phi(\mathrm{x})$, то по верижното правило за диференциране на сложна функция получаваме,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big(\phi'\big(\mathrm{x}'(\mathrm{x})\big)\Big) \\ &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'^{\,\nu}}\big(\mathrm{x}'(\mathrm{x})\big)\, \frac{\partial x'^{\,\nu}}{\partial x^\mu}(\mathrm{x}) \\ &\equiv \frac{\partial x'^{\,\nu}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi'}{\partial x'^{\,\nu}} \end{aligned} \tag{5.12}$$

(сумира се по ν). В обратна посока на смяна на променливите формула

(5.12) се записва като

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x'^{\,\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\,\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} . \tag{5.13}$$

За да получим по нататък (5.11) остава да използваме формулата

$$\frac{\partial x'^{\,\mu}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda^{\mu}_{\nu} ,$$

която съвсем подробно може да се изведе, като диференцираме (5.10) и приложим правилата за сумиране с делта-символ:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\Lambda^{\mu}_{\rho} \, x^{\rho} \right) = \Lambda^{\mu}_{\rho} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda^{\mu}_{\rho} \, \delta^{\rho}_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} .$$

Разглеждайки формула (5.11) забелязваме, че горните индекси в знаменател на диференциален оператор се държат като долни индекси, а долните – като горни. Последното ни указва, че трябва да се третират еднотипно индексите на обекти, трансформиращи се при прилагане на лоренцови трансформации, като $x^\mu \rightarrow x'^{\,\mu}$ в (5.9) и такива индекси е прието да се наричат *контраварианти.* Индексите на обекти, трансформиращи се като $x_\mu \rightarrow x'_\mu$ в (5.9), е прието да се наричат *ковариантни.* Така, индексите на диференциалните оператори $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ и $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ са съответно, ковариантни и контраварианти. Поради направеното уточнение, по-коректен израз в конвенцията (5.2) е, че

$$\boxed{\text{ако в един израз се срещат два еднакви индекса, един ковариантен и един контравариантен, то по тях се подразбира сумиране.}} \tag{5.14}$$

Един от първите примери за лоренцова инвариантност, който ще разгледаме е *вълновото уравнение*,

$$\frac{\partial^2\phi}{(\partial x^0)^2}(\mathrm{x}) - \frac{\partial^2\phi}{(\partial x^1)^2}(\mathrm{x}) - \frac{\partial^2\phi}{(\partial x^2)^2}(\mathrm{x}) - \frac{\partial^2\phi}{(\partial x^3)^2}(\mathrm{x}) = 0\,, \tag{5.15}$$

или по-накратко,

$$\frac{\partial^2\phi}{(\partial x_\mu)(\partial x^\mu)}(\mathrm{x}) = 0\,. \tag{5.16}$$

От равенства (5.10) и (5.11) следва, че ако при трансформацията

(5.10) имаме $\phi(\mathrm{x}) = \phi'(\mathrm{x}')$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\phi(\mathrm{x}) \;=\frac{\partial}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\,\mu}}\,\phi'(\mathrm{x}')\,, \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}(\mathrm{x})\,\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}(\mathrm{x}) \;=\frac{\partial\phi'}{\partial x'_\mu}(\mathrm{x}')\,\frac{\partial\phi'}{\partial x'^{\,\mu}}(\mathrm{x}')\,. \tag{5.18}$$

Най-знаменитият пример на релативистки инвариантни уравнения са безспорно уравненията на Максуел.[20] За да се приведат тези уравнения във форма с явна лоренцова инвариантност се въвежда така на-

[20] *виж лекция 1*

речения *електромагнитен тензор*:

$$\left(F_{\mu\nu}\right)_{\mu,\,\nu=0}^{3} \equiv \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & -B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}\,,$$

$$F^{\mu\nu} := \eta^{\mu\mu_1}\,\eta^{\nu\nu_1}\,F_{\mu_1\nu_1}\,. \quad (5.19)$$

С това уравненията на Максуел във вакуум придобиват вида:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = 0\,, \qquad (5.20)$$

$$\varepsilon^{\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\,\mu_4}\,\frac{\partial F_{\mu_2\,\mu_3}}{\partial x^{\mu_1}} = 0\,, \quad (5.21)$$

където $\varepsilon^{\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\,\mu_4}$ е така наречения напълно антисиметричен символ определен с условията:

$$\varepsilon^{0,1,2,3} = 1\,,$$

$$\varepsilon^{\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\,\mu_4} \quad \text{е антисиметричен при}$$

$$\text{размяна на всеки два индекса}\,.$$

Така тези уравнения са инвариантни при трансформацията:

$$F_{\mu\nu}\,(\,\mathrm{x}\,) \longmapsto \Lambda_{\mu}^{\mu_1}\,\Lambda_{\nu}^{\nu_1}\,F_{\mu_1\nu_1}\,(\,\Lambda\mathrm{x} + \mathrm{a}\,) \tag{5.22}$$

за всяка лоренцова матрица Λ_{ν}^{μ} (т.е., изпълняваща (5.6)). Действително, инвариантността на уравнения (5.20) седва подобно на инвариантността във формули (5.17) и (5.18). Що се отнася до уравнения (5.21), то там се налага да използваме още една формула от линейната алгебра:

$$\Lambda^{\mu_1}_{\nu_1}\,\Lambda^{\mu_2}_{\nu_2}\,\Lambda^{\mu_3}_{\nu_3}\,\Lambda^{\mu_4}_{\nu_4}\,\varepsilon^{\nu_1\,\nu_2\,\nu_3\,\nu_4}$$
$$= \det(\Lambda)\,\varepsilon^{\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\,\mu_4}\,,$$

вярна за произволна матрица $\Lambda = (\Lambda^{\mu}_{\nu})^{3}_{\mu,\nu\,=\,0}$.

Забележка: За тези, които са запознати със смятането с диференциални форми, горните уравнения се записват като:

$$d*F \,=\, 0\,, \quad dF \,=\, 0 \quad \text{за}$$
$$F \,=\, F_{\mu\nu}\,(\,x\,)\;dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\,,$$

където $*$ е звездата на Ходж.

Ще разгледаме още един пример на релативистки инвариантен закон.

Това е локалния закон за запазване на заряда (Л1.2.3). Нека да положим

$$J^0 := c\rho\,, \tag{5.23}$$
$$J^1 := -j_x\,,\quad J^2 := -j_y\,,\quad J^3 := -j_z$$

и следователно, $J^0 = J_0$, $J^k = -J_k$ $(k = 1,2,3)$, т.е.,

$$J_1 := +j_x\,,\quad J_2 := +j_y\,,\quad J_3 := +j_z\,.$$

Тогава (Л1.2.3) придобива вида[21]

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} \;=\; 0 \tag{5.24}$$
$$\left(\equiv\; \frac{\partial J^0}{\partial x^0} + \frac{\partial J^1}{\partial x^1} + \frac{\partial J^2}{\partial x^2} + \frac{\partial J^3}{\partial x^3}\right).$$

Така, ако при трансформацията (5.5), $x'^{\,\mu} = \Lambda^\mu_\nu\, x^\nu$, положим подобен

[21] Обърнете внимание, че в следствие на уточненото сумационно правило (5.14), в случая на (5.24) имаме допустимо повторение на индекси, по които става сумиране: индексът на J^μ е контравариантен, докато индексът на частната производна $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ е ковариантен (макар и отново да е горен за променливата x^μ).

трансформационен закон за J^μ,

$$J'^\mu(\mathrm{x}') := \Lambda^\mu_\nu\, J^\nu(\mathrm{x})\,, \qquad (5.25)$$

то законът (5.24) ще стане релативистки инвариантен. Всъщност, горния закон има инвариантност далеч надхвърляща пределите на специалната теория на относителността. Този закон е инвариантен също и в нерелативисткта физика и то при същия трансформационен закон (5.25), в който разбира се вместо лоренцова матрица (Λ^μ_ν) се използва матрица съответстваща на галилеева трансформация.

В заключение на тази точка ще направим коментар по един въпрос, който до момента оставихме без дискусия: от къде всъщност идват *трансформационните закони*, като (5.22), (5.25) или дори най-простия, $\phi'(\mathrm{x}') = \phi(\mathrm{x})$? Възможни са няколко отговора. Първо, ние можем да нагласим трансформационните закони така, че да е налице релативистка инвариантност. Това може би не изглежда сврьх убедително, особено ако се окаже че има повече от един начин условието за инвариантност да се изпълни. Разбира се, в конкретните случаи има допълнителни съображения, които налагат трансформационните закони.

Например, за случая на електромагнитното поле такова условие е вида на силата на Лоренц, ако я представим изразена чрез $F_{\mu\nu}$. Непосредствена проверка показва, че според втория принцип на Нютон, съчетан със закона на Лоренц (Л1.1.3) от една страна и полагането (5.19), от друга, се получава

$$\begin{aligned} m\,\frac{d^2x^k}{(dt)^2} \;&=\; -q\,c\,F_{k,0} - q\,F_{k,1}\,\frac{dx^1}{dt} \\ &- q\,F_{k,2}\,\frac{dx^2}{dt} - q\,F_{k,3}\,\frac{dx^3}{dt} \\ &=\; q\,\eta^{k\mu}\,F_{\mu\nu}\,\frac{dx^\nu}{dt} \end{aligned} \tag{5.26}$$

(q е електричния заряд, а m е масата на частицата; отчели сме и че $\dfrac{dx^0}{dt} = c$). Така, съгласно предписанията на релативисткката динамика, ако приемем този закон за изпълнен преди всичко за малки скорости, то релативистката модификация на (5.27) е съвсем естествена – времето t се заменя със собственото време τ. Получаваме,

$$m\,\frac{d^2x_\mu(\tau)}{(d\tau)^2} \;=\; q\,F_{\mu\nu}\big(\mathrm{x}(\tau)\big)\,\frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau} \tag{5.27}$$

(понеже $\dfrac{d^2x^\mu}{(d\tau)^2} = \eta^{\mu\nu}\;\dfrac{d^2x_\nu}{(d\tau)^2}$). В частност убеждаваме се, как антисиметрията на $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ работи в полза на условието за (псевдо-)ортогоналност (4.5):

$$\frac{d^2\mathrm{x}}{(d\tau)^2}\cdot\frac{d\mathrm{x}}{d\tau} \equiv \frac{d^2x_\mu}{(d\tau)^2}\,\frac{dx^\mu}{d\tau}$$
$$= \frac{q}{m}\,F_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\,\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$= -\frac{q}{m} F_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 . \quad (5.28)$$

По такъв начин, условието за релативистка инвариантност на силата на Лоренц ни води до трансформационното условие (5.22). В други случаи на полета, трансформационните закони при смяна на инерциалната отправна система са обосновани от квантовата теория на полето. Както ще видим по-нататък в този курс, след преминаване към квантово описание, полетата съответстват на елементарни частици. Оказва се, че полевите трансформационни закони са директно свързани с това, което се нарича вътрешен ъглов момент на частицата или още, *спин* (spin) на частицата.

Лекция 4

Теория на класическите полета I.

1. Лапласовия детерминизъм във физиката и еволюционни уравнения

С успеха на нютоновата механика във физиката се утвърждава детерминистичното схващане за явленията и процесите в природата. Този възглед е съвсем ясно формулиран от Лаплас (Pierre-Simon Laplace) и затова обикновено се свързва с неговото име.

За да се опитаме да го формулираме в математически стил ще предположим, че с описваната от нас физична система във всеки един момент от време t може да се свърже определен набор числа

$$\vec{s} := (s_1, \ldots, s_N), \tag{1.1}$$

които се получават в следствие на измервания върху системата на N величини (в дадения момент t). Ако измерванията на величините (1.1) се повтарят в различни моменти от време t, то с това получаваме векторна функция

$$\vec{s} = \vec{s}(t) = \big(s_1(t), \ldots, s_N(t)\big)\,. \tag{1.2}$$

Разбира се, ние винаги можем да добавим нови величини към набора (1.1), ако искаме да постигнем по-точно описание на системата. Всъщност, какво точно целим с едно такова разширение на величините и още, очакваме ли това да има някакъв предел. Вторият въпрос ще ни даде отговора на първия, а що се отнася до самия втори въпрос, то отговорът му е, да. Ние очакваме, че съществуват пределни (максимални) набори от физични величини за изследваната система, по две тясно свързани причини.

- Първо, един набор от величини $\vec{s}$ (1.1) можем да считаме, че е максимален, ако стойността на всяка останала физична величина напълно се характеризира от този набор. С други думи, всяка друга величина е функция на $\vec{s}$. Нашата увереност, че това предположение е изпълнено е просто в следствие от вярата ни, че "света е познаваем".

- Един максимален набор от величини $\vec{s}$ (1.1) се очаква да има и друго свойство, което именно е лапласовия детерминизъм: ако познаваме този набор $\vec{s}_0$ в даден момент от време t_0, то съществува само един възможен ход на еволюцията $\vec{s} = \vec{s}(t)$, такъв че $\vec{s}(t_0) = \vec{s}_0$. Това изразява друг вид познаваемост: предсказуемостта на бъдещето въз основа на настоящето. По думите на самия Лаплас:[22] "ние можем да разглеждаме сегашното състояние на вселената, като следствие от ней-

[22]We may regard the present state of the universe as the effect of its past and the cause of its future.

ното минало и причина за нейното бъдеще ...”.

Тогава, ако пресметнем моментната скорост на изменение на величините $\vec{s}$ в момента t_0, $\dfrac{d\vec{s}}{dt}(t_0)$, то по която да е от горните две причини ще следва, че тази скорост ще бъде функция на $\vec{s}_0$ и t_0, $\dfrac{d\vec{s}}{dt}(t_0) = \vec{A}(\vec{s}_0, t_0)$. С други думи, ние ще можем да намерим такава векторна функция $\vec{A}(\vec{s}, t)$, която да има свойството, че всяка функция $\vec{s} = \vec{s}(t)$ изразяваща еволюцията на системата е решение на системата от *обикновени диференциални уравнения от пър-*

ви ред:[23]

$$\frac{d\vec{s}(t)}{dt} = \vec{A}\big(\vec{s}(t), t\big)\,. \qquad (1.3)$$

Преди да продължим с физическото повествование нека да въведем известна терминология. Казваме, че един пълен набор $\vec{s}$ (1.1) от физически величини характеризиращи системата задава (определя) нейното *състояние*. Самият вектор $\vec{s}$ ще наричаме "състояние", или по-точно *вектор на състоянието*. Множеството от всички възможни състояния $\vec{s}$ на описваната система е едно подмножество в $\mathbb{R}^N$, което се нарича *фазово пространство* (phase space). Диференциалните уравнения

[23] first order ordinary differential equations

(1.3) се наричат *уравнения за движение* на системата (equations of motions) или също, *уравнения на еволюцията / еволюционни уравнения / динамични уравнения*.

Обикновените диференциални уравнения (1.3) имат забележително математическо свойство, което позволява те обратно да изведат лапласовия детерминизъм. В сила е следната теорема:[24] за всеки набор $\vec{s}_0$ ($\in \mathbb{R}^N$) и всеки момент от време t_0 ($\in \mathbb{R}$) съществува единствено решение $\vec{s}(t)$ на уравненията (1.3) та-

[24]Тук привеждаме тази теорема качествено, пропускайки съзнателно специалните математически условия, съпътстващи всяко точно твърдение в математиката. Едно от може би най-важните такива уточнения е, че указаното решение $\vec{s}(t)$ съществува преди всичко за времена t близки до началния момент от време t_0.

кова, че $\vec{s}_0 = \vec{s}(t_0)$. Постановката на приведената теорема се нарича *задача на Коши* (Cauchy problem или също, initial value problem).

В доказателството на горната теорема е заложена една интуитивна и проста конструкция, която също стои и в основата на числените методи за решаване на обикновени диференциални уравнения. Нека да изберем достатъчно малка времева стъпка Δt и да положим $t_1 = t_0 + \Delta t, \ldots, t_{k+1} = t_k + \Delta t, \ldots$. Тогава можем да изчислим рекурсивна апроксимация за $\vec{s}_k = \vec{s}(t_k)$ като използваме, че $\frac{\vec{s}_{k+1} - \vec{s}_k}{\Delta t} \approx \frac{d\vec{s}(t_k)}{dt} =$

$\vec{A}(\vec{s}_k, t_k)$. Така, получената редица $\vec{s}_{k+1} = \vec{s}_k + \vec{A}(\vec{s}_k, t_k)\,\Delta t$ ще апроксимира все по-точно и по-точно търсеното решение с намаляването на времевата стъпка Δt.

Един начален пример от физиката е задачата за "тяло хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта". В нашия пример ще предположим, че движението се извършва в една равнина (x, y), оста x на която е насочена хоризонтално на земната повърхност, а y е насочена вертикално на горе и ще считаме още, че на тялото действа само силата на тежестта, която причинява земното ускорение $(0, -g)$. Тогава състоянието на тялото се определя от четири числа $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (x, y, v_x, v_y)$: координатите (x, y) на тялото и вектора на скоростта му (v_x, v_y). Уравненията за движение са

$$\frac{d}{dt}(s_1, s_2, s_3, s_4) = (s_3, s_3, 0, -g)\,,$$

което всъщност са уравненията $\frac{dx}{dt} = v_x$, $\frac{dy}{dt} = v_y$, $\frac{dv_x}{dt} = 0$ и $\frac{dv_y}{dt} = -g$. В този пример се откроява един допълнителен факт свързан с повечето физически системи. Оказва се, че в много случаи числото N е *четно* число, $N = 2n$ и ние можем да подберем величините $s_1, \ldots, s_N$ от (1.1), така че $s_{n+1}, \ldots, s_{2n}$ да бъдат скоростите на $s_1, \ldots, s_n$, съответно. В този случай набора от величини $(s_1, \ldots, s_n)$ описва така нареченото *конфигурационно пространство* (configuration space), а самите s_k и s_{k+n}, за $k = 1, \ldots, n$, се наричат *обобщени координати* и *обобщени скорости*, съответно. Числото $n = \dfrac{N}{2}$ се нарича *брой на степените на свобода* на системата (degrees of freedom).

Нека да отбележим, че самата начална постановка на нютоновия и лапласов детерминизъм изложена между формули (1.1) и (1.3) не хвърля никаква допълнителна светлина върху възможния произход на уравненията за движение, освен самия експеримент. В частност, няма и никакво указание защо числото N е четно. Това ще получим по-късно, като следствие от вариационния принцип към който ще преминем в следващата точка.

В заключение, нека да обсъдим и възможността N да бъде безкрайно число. Това означава, че изследваната система има *безкраен брой степени на свобода*. Тази ситуация е напълно възможна, както от практическа, така и от теоретична гледна точка, и това е случая на теория на полето, с която ще започнем от следващата точка. По-скоро идва въпросът, а не е ли това общия случай на реална физична система. Практическият отговор е, че това всъщност няма значение. Даже и да е крайно числото N, то може да е толкова голямо, като например числото на Авогадро (Avogadro), което е от порядъка на 6×10^{23}, така че в действителност да ни изглежда непостижимо голямо. Така, по-скоро ние следва да се научим как да работим в условията на *неограничен* брой степени на свобода, които евентуално да разделим на "съществени" и "несъществени" за целите на нашето описание. Това е една от главни цели в *статистичес-*

ката физика (statistical physics), но има отношение и към квантовата теория на полето.

2. Полета и полеви уравнения

Поле в класическата физика е съвкупност от физични величини, зададени за всяка точка на пространството и времето. Математически, едно такова физично поле се описва от функция $\phi(x, y, z, t)$ или по-общо, от система от функции[25] $\phi_1(x, y, z, t), \ldots, \phi_N(x, y, z, t)$ на пространствените координати (x, y, z) и времето t (в дадена отправна система). Например, в хидродинамиката поведението на един идеален флуид се описва от функциите на плътността $\varrho(x, y, z, t)$, на налягането $p(x, y, z, t)$ и на полето на скорос-

[25] Макар и да използваме същата буква N, която ползвахме в в предишната точка, тук тя има вече друго значение.

ти $\upsilon_x(x, y, z, t)$, $\upsilon_y(x, y, z, t)$, $\upsilon_z(x, y, z, t)$. В терминологичен план, едно физично поле може да се нарече една функция на пространството и времето, като например функцията на налягането $p(x, y, z, t)$ от предходния пример, но също и система от функции, като $\upsilon_x(x, y, z, t)$, $\upsilon_y(x, y, z, t)$, $\upsilon_z(x, y, z, t)$, което в този пример нарекохме поле на скоростите. Такова обединяване или разделяне на система от функции в едно или няколко полета е до известна степен условно. Друг пример на полева функция е разпределението на температурата $T(x, y, z, t)$ на едно тяло.

Според нютоновия и лапласовия детерминизъм познаването на стойностите на физичните полета заедно с техните производни по времето до определен ред,[26] за всички пространствени координати $(x,\ y,\ z)$, в определен момент от време t_0, например,

$$\phi_1(x,y,z,t_0),\ \ldots,\ \phi_N(x,y,z,t_0),$$
$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t}(x,y,z,t_0),\ \ldots,\ \frac{\partial\phi_N}{\partial t}(x,y,z,t_0),$$

определя напълно и еднозначно полевите функции $\phi_1(x,\ y,\ z,\ t),\ \ldots,$ $\phi_N(x,\ y,\ z,\ t)$ при всеки x, y, z, t. Математически това се осигурява като се подчинят полевите функции на едно или няколко *частни*

[26] в практиката, не по-голям от първи ред

диференциални уравнения. Например, в случая на идеален флуид това е системата от *уравнения на Навие–Стокс* (Navier–Stokes equations). В случая на полето на температурата $T(x, y, z, t)$ на едно хомогенно тяло, това е *уравнението на топлопроводността* (heat equation),

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,y,z,t) - \kappa^2 \Big(\frac{\partial^2 T}{(\partial x)^2}(x,y,z,t) + \frac{\partial^2 T}{(\partial y)^2}(x,y,z,t) + \frac{\partial^2 T}{(\partial z)^2}(x,y,z,t) \Big) = 0\,,$$

където κ^2 е константа (коефициент характеризиращ топлопроводимостта на средата). В последния пример познаването на температурната функция $T(x,\ y,\ z,\ t)$ в определен момент от време t_0 я определя напълно.

Един друг прост (за написване) пример на полево уравнение, което се среща в разнообразни физични проблеми е *вълновото уравнение* (wave equation),

$$\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\phi}{(\partial t)^2}(x,y,z,t)-\frac{\partial^2\phi}{(\partial x)^2}(x,y,z,t)$$
$$-\frac{\partial^2\phi}{(\partial y)^2}(x,y,z,t)-\frac{\partial^2\phi}{(\partial z)^2}(x,y,z,t)$$
$$=\ 0\,, \tag{2.1}$$

където υ е отново константа, в случая имаща значение на скорост. Уравнение (2.1) описва разпространение на вълна, което е отразено в поведението на функцията $\phi(x,\ y,\ z,\ t)$. За определяне на цялата функция $\phi(x,\ y,\ z,\ t)$ в този случай е достатъчно да я познаваме в един момент от време t_0, заедно с първата ѝ производна по времето за всички пространствени координати $(x,\ y,\ z)$,[27]

$$\phi(x,y,z,t_0),\ \frac{\partial\phi}{\partial t}(x,y,z,t_0)\,. \qquad (2.2)$$

Вълновото уравнение беше приведено в предходната лекция (виж (Л3.5.15)), като пример за релативистки инвариантно уравнение в случая когато $v=c$.

Приведените до тук примери на полеви системи с характеризиращи

[27]??? а граничните условия

ги (системи от) частни диференциални уравнения, в качеството на уравнения за движение, задават една основна част от областта на математиката наричана *уравнения на математическата физика*. В общия случай на частни диференциални уравнения задачите на Коши са значително по-сложни и трудни за установяване на съществуване и единственост на решения. Много често такива теореми се формулират за конкретни уравнения, като тези идващи от физиката, от колкото за общи класове от частни диференциални уравнения.

В заключение нека да отбележим,

че полевите системи очевидно излизат извън класа на физичните системи с краен брой степени на свобода. Действително, за да определим напълно еволюцията на системата ние следва да познаваме в дадем момент от време не краен набор от величини, а поне напълно една функция на пространствените координати (x, y, z). Дори само безкрайната редицата от производни на функцията в някоя точка на пространството е вече безкраен набор от независими величини.

3. Принцип на най-малкото действие

До тук, уравненията на които се подчиняват полевите системи приехме за даденост (обоснована от експеримента), подобно на уравненията за движение на частици в нютоновата механика. Съществува обаче един общ принцип на базата на който много уравнения, както в класическата механика така и в теория на полето, могат да бъдат изведени. Това е *вариационния принцип* (variational principle) известен също и като *принцип за най-малкото действие* (principle of least action).

За по-компактен запис на вариационния принцип от този момент на татък в настоящата лекция **преминаваме към релативистките означения за пространство-време**. Въпреки това, общите принципи от теорията на полето, които тук ще излагаме са независими от принципите на специалната теория на относителността. И така, една система от полета в релативистките означения ще се записва, като система от функции $\phi_1(\mathrm{x}), \ldots, \phi_N(\mathrm{x})$ на точките $\mathrm{x} = (x^\mu)_{\mu=0}^3$ на пространство-времето.[28]

За определеност, нека да наречем *полева конфигурация* една система от полеви функции $\phi_1(\mathrm{x}), \ldots, \phi_N(\mathrm{x})$,

---

[28]припомняме: $x^0 := ct$, $x^1 := x$, $x^2 := y$, $x^3 := z$.

не зависимо дали се подчинява или не на полевите уравнения. В една вариационна задача ние приемаме, че на описваната полева система при всяка полева конфигурация $\phi_1(\mathrm{x})$, $\ldots$, $\phi_N(\mathrm{x})$ е зададено число

$$S\Big\{\phi_1(\mathrm{x}),\ldots,\phi_N(\mathrm{x})\Big\} \equiv S\{\phi_1,\ldots,\phi_N\} \qquad (3.1)$$

наречено *действие* (action). Обръщаме внимание на два важни момента в горните означения.

(i) Първо, действието S (3.1) зависи от функциите $\phi_1(\mathrm{x}),\ldots,\phi_N(\mathrm{x})$ като цяло, а не само от стойностите им в определена точка x. За да подчертаем, че S зависи от всичките стойности на функциите $\phi_1(\mathrm{x})$,

$\ldots, \phi_N(\mathrm{x})$ ние сме поставили и аргументите на S във фигурни скоби, $S\{\cdots\}$. И така, S е изображение, на което аргументи са други функции. Ето защо, такива изображения като S е прието да се наричат *функционали* и по-нататък, винаги когато аргументите на изображение са поставени във фигурни скоби това ще означава, че работим с функционал. Нашият пръв пример за функционал ще бъде действието което се съпоставя в случая на вълновото уравнение (2.1):

$$S\{\phi(\mathrm{x})\} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}(\mathrm{x})\,\frac{\partial\phi}{\partial x_{\mu}}(\mathrm{x})\,d^4x\,, \quad (3.2)$$

където сме означили $d^4x := dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3$ и сме използвали конвенцията (Л3.5.14) за сумиране по повтарящи се индекси. Всъщност, подинтегралната функция в (3.2) вече беше разгледана, като пример за релативистки инвариантен израз (вж. (Л3.5.18)). По такъв начин, променливите $\mathrm{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ в лявата страна на равенствата (3.1) и (3.2) са фиктивни или още, *свързани*, подобно на интеграционните променливи в дясната страна на (3.2) и на такива променливи не можем да придаваме стойности, като на *свободни* променливи.

(ii) Второ, ние съпоставяме действие на всяка система от полеви функции $\phi_1(\mathrm{x}), \ldots, \phi_N(\mathrm{x})$, включително и на тези, които не се реализират физически (т.е., не само на тези функции, които удовлетворяват полевите уравнения). Така, ролята на S е да отдели физически реализируемите полеви функции посредством условието, че за тях S достига *локален минимум* или в малко по-уточнена формулировка, *локален екстремум.* Математически, последното условие означава при зададени $\phi_1(\mathrm{x}), \ldots, \phi_N(\mathrm{x})$ да е изпълнено

$$\frac{d}{d\varepsilon} S\Big\{\phi_1(\mathrm{x}) + \varepsilon\psi_1(\mathrm{x}), \ldots \tag{3.3}$$

$$, \phi_N(\mathrm{x}) + \varepsilon\psi_N(\mathrm{x})\Big\}\Bigg|_{\varepsilon\,=\,0} = 0\,,$$

при всеки избор на функции $\psi_1(\mathrm{x})$, $\dots$, $\psi_N(\mathrm{x})$. Лявата страна на уравнение (3.3) е функционален аналог на факта, че при локален екстремум производните по всички направления са нула.

В редица вариационни задачи се оказва, че производната в лявата страна на (3.3) се представя като

$$\frac{d}{d\varepsilon} S\Big\{\phi_1 + \varepsilon\psi_1, \dots, \phi_N + \varepsilon\psi_N\Big\}\Bigg|_{\varepsilon\,=\,0} = \int F^j(\mathrm{x})\,\psi_j(\mathrm{x})\,d^4x\,, \qquad (3.4)$$

където $F^1(\mathrm{x})$, $\dots$, $F^N(\mathrm{x})$ са функции на x, записани с горни индекси с цел да приложим и в този случай отново сумационното правило за по-голяма компактност! Обръщаме внимание на следната тънкост: функциите $F^j(\mathrm{x})$ при всяка фиксирана точка x са функционали на ϕ_1, $\ldots$, ϕ_N. По определение, функциите $F^j(\mathrm{x})$ се наричат *вариационни производни* и се означават по следния начин:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_j(\mathrm{x})}\big\{\phi_1, \ldots, \phi_N\big\} \;:=\; F^j(\mathrm{x}) \tag{3.5}$$

$(j = 1, \ldots, N)$. Така, уравненията (3.3) са равносилни на

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_j(\mathrm{x})}\big\{\phi_1, \ldots, \phi_N\big\} \;=\; 0 \tag{3.6}$$

$$\text{за} \quad j = 1, \ldots, N \, ,$$

тъй като ако (3.4) се анулира за всеки избор на функциите $\psi_j(\mathrm{x})$, то ще следва, че $F^j = 0$ за всичко j. Уравненията (3.6) се наричат *уравнения на Лагранж–Ойлер* (Lagrange–Euler / Euler–Lagrange equations). За действието (3.2) се получава, както ще изведем след малко,

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(\mathrm{x})}\{\phi\} = \frac{\partial^2 \phi(\mathrm{x})}{(\partial x^\mu)(\partial x_\mu)} \, , \qquad (3.7)$$

което възпроизвежда вълновото уравнение, като уравнение на Лагранж–Ойлер. Обърнете внимание, че във формули (3.5), (3.6) и (3.7) променливите $\mathrm{x} = (x^\mu)$ са вече свободни променливи, на които могат да се дават стойности. По такъв начин, вариационната производна $\dfrac{\delta}{\delta\phi(\mathrm{x})}$ обобщава частната производна $\dfrac{\partial}{\partial q_j}$, като индексът на променливите е преминал от дискретния j към континуалния набор $\mathrm{x} = (x^\mu)$.[29]

Нека сега да изведем уравненията на Лагранж–Ойлер в по–конкретен вид. За простота ще се ограничим до една полева функция $\phi(\mathrm{x})$. Ще предположим, че действието се задава във вида

$$S\{\phi(\mathrm{x})\} \tag{3.8}$$

[29]аналогът на q в $\frac{\partial}{\partial q_j}$ е ϕ в $\frac{\delta}{\delta\phi(x,y,z,t)}$, а на индекса j – наборът $(x,\, y,\, z,\, t)$

$$= \int\limits_{\Omega} L\Big(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\Big)\, d^4x\,,$$

където сме означили:

- $\dfrac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}) := \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x^{\alpha}}(\mathrm{x})\right)_{\alpha = 0}^{3}$;

- Ω е област в пространство-времето $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$, а функцията L е функция на $1 + 4 + 4 = 9$ аргументи,

$$L = L(u, \mathrm{w}, \mathrm{x}) \equiv L\big(u, (w_{\mu}), (x^{\mu})\big)$$
$$\equiv L(u, w_0, w_1, w_2, w_3, x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{3.9}$$

и се нарича *лагранжиан* (Lagrangean).

Така, диференцирайки сложна функция под знака на интеграла в (3.8) получаваме

$$\frac{d}{d\varepsilon}\,S\big\{\phi(\mathrm{x})+\varepsilon\psi(\mathrm{x})\big\}\Big|_{\varepsilon\,=\,0}$$

$$=\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,L\Big(\phi(\mathrm{x})+\varepsilon\psi(\mathrm{x}),$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{x}}(\mathrm{x})+\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{x}}\psi(\mathrm{x}),\mathrm{x}\Big)\Big|_{\varepsilon\,=\,0}\quad d^4x$$

$$=\int\limits_{\Omega}\Bigg(\frac{\partial L}{\partial u}\big(\phi,\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{x}},\mathrm{x}\big)\,\psi(\mathrm{x})$$

$$+\frac{\partial L}{\partial w_\mu}\big(\phi,\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{x}},\mathrm{x}\big)\;\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}(\mathrm{x})\Bigg)\,d^4x$$

$$=\int\limits_{\Omega}\Bigg(\frac{\partial L}{\partial u}\big(\phi,\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{x}},\mathrm{x}\big)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial w_\mu}\big(\phi,\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{x}},\mathrm{x}\big)\Bigg)\Bigg)\psi(\mathrm{x})\,d^4x\,,$$

където при последното равенство сме използвали интегриране по части при предположение, че функцията $\psi(\mathrm{x})$, с която варираме ϕ, се анулира в някаква околност на границата на областта Ω. Последното условие се приема като стандартно предположение при вариационните задачи. И така, получихме че

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta \phi(\mathrm{x})} &= 0 = \qquad (3.10)\\
&= \frac{\partial L}{\partial u}\Big(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\Big)\\
&- \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial L}{\partial w_{\mu}}\Big(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\Big)\right)
\end{aligned}
$$

е уравнението на Лагранж–Ойлер съответстващо на действието (3.8). Обръщаме специално внимание на факта, че във ф–ла (3.10) производните $\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ при $\mu = 0, 1, 2, 3$ диференцират сложна функция, тъй като L зависи допълнително от $\mathrm{x} = (x^\mu)$ посредством ϕ и нейните производни.

Често аргументите u и w_μ на лагранжиана L се записват като ϕ и $\partial_\mu\phi$, съответно, и тогава (3.10) придобива съвсем краткия вид

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{D}{Dx^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0\,, \quad (3.11)$$

където $\dfrac{D}{Dx^\mu}$ оказва, че се диференцира пълната зависимост на L от x, пряко и като сложна функция, посредством $\phi(\mathrm{x})$ и производните ѝ $\partial_\mu\phi(\mathrm{x})$.

В частност, потвърждаваме и ф–ла (3.7), която се получава от лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} w_\mu w^\mu . \tag{3.12}$$

По-внимателният читател вероятно е забелязал, че във вида на действието (3.8) използвахме произволна област Ω, която в последствие не играе роля в самите уравнения на Лагранж–Ойлер. Областта Ω в повечето физически текстове се приема не съвсем строго за цялото пространство и време $\mathbb{R}^4$, което може да доведе до проблеми с интегрирането над област с безкраен обем. От друга страна, вариационният принцип има локален характер в смисъл, че е достатъчно да варираме полевите функции $\phi_j(\mathrm{x})$ с отклонения $\varepsilon\psi_j(\mathrm{x})$, които са отлични от нула само в малка околност на произволна точка x. Това ни дава пълна информация за вариационната производна (3.5) в точката x. По такъв начин при вариационния принцип, лагранжианът L (3.9) играе по-фундаментална роля от действието (3.8), което може да бъде образувано по различни области Ω. Важно е също, че лагранжианът L участва винаги в интегриране по някаква област Ω и доколкото ние игнорирахме ролята на границата на Ω като избрахме вариращите функции $\varepsilon\psi_j(\mathrm{x})$ да се анулират в околност на тази граница, то вариационната задача и съответно, уравненията на Лагранж–Ойлер, няма да се променят, ако към L се прибави така наречената пълна дивергенция:

$$
\begin{aligned}
& L'\left(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\right) \\
& = L\left(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\right) \\
& + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(K^{\mu}\left(\phi(\mathrm{x}), \mathrm{x}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

(т.е., L и L' определят еднакви уравнения на Лагранж–Ойлер, което трудолюбивият читател може да установи и с непосредствена проверка).[30]

[30]Обърнете внимание, че доколкото в (3.13) аргументите на L, L' и K_s не са във фигурни скоби, то тук ние нямаме пред вид функционална зависимост от $\phi(\mathrm{x})$, а директна зависимост от стойността на ϕ и нейните производни в точката (x, y, z, t).

4. Симетрии и закони за запазване. Теорема на Ньотер

В началото на XX век Еми Ньотер (Emmy Nöther) открива важна връзка между законите за запазване и симетриите в теория на полето. Накратко, доказаната от Ньотер теорема гласи, че на всяка непрекъсната еднопараметрична симетрия на една полева система съответства една запазваща се величина. С други думи, получаваме закон за запазване. Преди да преминем към по-детайлното изложение на този резултат ще изброим качествено следствията от него, от които може да се види неговата значимост. Първата важна непрекъсната симетрия в теория на полето, а и в цялата физика, е симетрията спрямо транслации по пространството и по времето. Тази симетрия е свързана с концепцията за хомогенност на пространството и времето. Като следствие от теоремата на Ньотер получаваме, че закона за запазване, който е свързан с пространствената транслационна симетрия е законът за запазване на импулса. Аналогично, симетрията при транслация по времето води до запазването на енергията. Друг фундаментален пример на закон за запазване, следващ от теоремата на Ньотер, е закона за запазване на момента на импулса. Симетрията, която поражда този закон е симетрията спрямо въртене на пространството. Последната отразява концепцията за изотропност на пространството, т.е., равноправността на всички направления. Законът за запазване на електричния заряд в електродинамика също може да се породи от полева симетрия. Това дава първия пример на така наречените *вътрешни симетрии.* Обобщенията на тези вътрешни симетрии са довели до въвеждане на допълнителни типове запазващи се заряди в теорията на елементарните частици. В последствие физиците и математиците са осъзнали, че вътрешните симетрии могат да се усилят до така наречените локални или още, локални калибровачни симетрии, при които “вътрешната” полева трансформация се мени произволно от точка в точка на пространството и времето. Последното е свързано с добавянето на нов тип полета, наречени калибровачни полета, чийто геометричен смисъл е да определят правилото за пренасяне на полевите стойности от една точка на пространството и времето в друга точка. Физически тези полета придобиват смисъл на полетата пренасящи взаимодействията, понеже най-простия и първи пример на такова поле се оказва електромагнитното поле. Всички тези идеи, започнали до известен смисъл с осъзнаването на ролята на симетриите във физика, са довели до създаването на стандартния модел, който е и съвременната теоретична рамка на теорията на елементарните частици.

За простота в този параграф ще се ограничим отново до полева система, която се характеризира с едно поле $\phi(\mathrm{x})$ и на която е съпоставено действие (3.8). Динамиката на една такава система, т.е., пълната информация за полевата функция $\phi(\mathrm{x})$ се определя напълно от задаването ѝ в даден начален момент от време x^0, заедно с първата ѝ производна по времето,

$$\begin{aligned} \phi_0(\mathbf{x}) &:= \phi(x^0, \mathbf{x}), \\ \dot{\phi}_0(\mathbf{x}) &:= \frac{\partial \phi}{\partial x^0}(x^0, \mathbf{x}) \,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

В следствие на теоремата на Ньотер, която ще докажем, при наличие на една непрекъсната еднопараметрична симетрия на полевата система, ние ще можем да съпоставим функционал на началните условия (4.1),

$$\mathcal{J}\left\{\phi_0(\mathbf{x}), \dot{\phi}_0(\mathbf{x})\right\} \tag{4.2}$$

такъв, че стойността му не се

изменя с времето, т.е., стойността му не се изменя, ако в полагането (4.1) променяме времето x^0 при дадено (произволно) решение $\phi(x^0, \mathbf{x})$ на полевите уравнения (3.10).

Когато се говори за симетрия на една физична система, а в случая по-горе споменахме "непрекъсната еднопараметрична симетрия", ние ще подразбираме преди всичко, че имаме зададени някакви преобразувания върху данните, с които описваме системата. В теория на полето ще разглеждаме трансформации, при които се менят координатите x и полевите функции:

$$\left| \begin{array}{lcl} x'^{\,\mu} & = & F^{\mu}\,(\mathrm{x}) \qquad (\mu = 0,1,2,3) \\ u' & = & G\;(\mathrm{x},u)\quad , \end{array} \right. \tag{4.3}$$

където точката x се преобразува в x′, а една полева стойност u за x се трансформира в нова полева стойност u' над x′ в зависимост от целия изходен набор (x, u), както е изобразено на диаграмата

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{x},u) & \longmapsto & (\mathrm{x}',u') \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \mathrm{x} & \longmapsto & \mathrm{x}' \end{array} \quad . \tag{4.4}$$

По такъв, начин една полева функция $\phi(\mathrm{x})$ се преобразува в нова полева функция $\phi'(\mathrm{x})$ по формулата[31]

$$u' = \phi'(\mathrm{x}') = G\big(\mathrm{x}, \phi(\mathrm{x})\big) \qquad (4.5)$$

или по-подробно,

$$\phi'\big(\mathrm{F}(\mathrm{x})\big) = G\big(\mathrm{x}, \phi(\mathrm{x})\big) \qquad (4.6)$$

Функцията $\phi'(\mathrm{x})$ (4.5) физически се интерпретира като получена в резултат на трансформация на полевата система. Ето някои примери:

(a) транслацията по направление на четиримерен вектор $\mathrm{n} = (n^\mu)$, който е умножен по число ε, преобразува полевата функция $\phi(\mathrm{x})$ в

$$\phi^{(\varepsilon)}(\mathrm{x}) := \phi(\mathrm{x} - \varepsilon \mathrm{n}) \,. \qquad (4.7)$$

[31]едно просто мнемонично правило за трансформационния закон (4.5) е че заменяме в равенството $u = \phi(\mathrm{x})$ всички обекти с "примовани", $u' = \phi'(\mathrm{x}')$

В този случай диаграмата (4.4) придобива вида

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{x}, u) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (\mathrm{x}+\varepsilon\mathrm{n}, u) \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{x} \arrow[r, mapsto] & \mathrm{x}+\varepsilon\mathrm{n}
\end{tikzcd} \quad . \tag{4.8}$$

(б) Ротацията около някоя пространствена ос на ъгъл ε, например около оста x^3 $(= z)$, действа като

$$\begin{aligned}
&\phi'(x^0, x^1, x^2, x^3) \\
&:= \phi(x^0, x^1 \cos\varepsilon - x^2 \sin\varepsilon, \\
&x^1 \sin\varepsilon + x^2 \cos\varepsilon, x^3)\,.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

(Функция / поле, която се трансформира по горния закон се нарича *скаларна функция / поле.* В по-общи случаи на не скаларни полета може да се "въртят" и полевите стойности.)

(в) Нека определим и действие на *мащабната трансформация* посредством

$$\phi'(\mathrm{x}) := \lambda^{-1}\,\phi(\lambda^{-1}\mathrm{x})\,, \quad \lambda = e^{\varepsilon}\,. \tag{4.10}$$

Обърнете внимание, че в този пример на диаграмата (4.4) съответства[32]

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{x}, u) & \longmapsto & (\lambda\mathrm{x}, \lambda^{-1}u) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \mathrm{x} & \longmapsto & \lambda\mathrm{x} \end{array} \quad . \tag{4.11}$$

Приведените примери задават всъщност семейства от трансфор-

[32]малко по-общо, в (4.11) може да стои $\lambda^{-d}u$ вместо $\lambda^{-1}u$, като числото d се нарича *мащабна размерност* (scaling dimension) на u

мации

$$\left| \begin{array}{rcl} \mathrm{x}' &=& \mathrm{F}\,(\mathrm{x};\varepsilon) \\ u' &=& G\,(\mathrm{x},u;\varepsilon) \end{array} \right. , \tag{4.12}$$

непрекъснато зависещи от параметър $\epsilon \in \mathbb{R}$ и такива, че при $\varepsilon = 0$ съответстват на идентитета,

$$\mathrm{F}(\mathrm{x};0) = \mathrm{x}\,, \quad G(\mathrm{x},u;0) = u\,. \tag{4.13}$$

По такъв начин и трансформираната полева функция $\phi'(\mathrm{x})$ (4.5) зависи допълнително от параметъра ε, и може да се разглежда като семейство от полеви функции

$$\phi^{(\varepsilon)}(\mathrm{F}(\mathrm{x};\varepsilon)) = G\big(\mathrm{x},\phi(\mathrm{x});\varepsilon\big)\,. \tag{4.14}$$

Поради условието (4.13) имаме

$$\phi^{(\varepsilon)}(\mathrm{x})\Big|_{\varepsilon\,=\,0} = \phi(\mathrm{x})\,. \tag{4.15}$$

При зададена трансформация (4.3) ние следва сега да определим кога тази трансформация ще наричаме симетрия на полевата система. Съществуват няколко различни по сила определения за това.

(S_1) Най-слабата формулировка гласи, че трансформацията (4.3) задава симетрия на полевата система, тогава и само тогава, когато за всяко решение $\phi(\mathrm{x})$ на динамичните уравнения (3.10) функцията $\phi'(\mathrm{x})$ (4.5) е също решение на (3.10). Прието е такава симетрия да се нарича "on–shell" симетрия, т.е., симетрия върху решенията. Обърнете внимание, че при този тип симетрия няма значение как се трансформират функциите $\phi(\mathrm{x})$, които не са решения на динамичните уравнения.

(S_2) Една по–силна форма на симетрия гласи, че действието S (3.8) остава инвариантно при трансформацията (4.5) на полевите функции:

$$\int\limits_{\Omega} L\Big(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\Big)\, d^4x \qquad (4.16)$$

$$= \int\limits_{\Omega} L\Big(\phi'(\mathrm{x}'), \frac{\partial \phi'}{\partial \mathrm{x}'}(\mathrm{x}'), \mathrm{x}'\Big)\, d^4x'\,,$$

където Ω' е образа на областта Ω под действието на трансформацията (4.3) разглеждана в случая като смяна на променливите от x към x'. Ние искаме условието (4.16) да бъде изпълнено при всеки избор на изходната полева функция $\phi(\mathrm{x})$ в (4.3), а не само за решенията на полевите уравнения. Ето защо такава симетрия се нарича “off–shell”. Обръщаме внимание на тясната връзка на условието (4.16) с принципа на относителността, който в случая означава, че действието се записва еднакво във всички (инерциални) отправни системи. Така, самите полеви трансформации могат да се разглеждат и като смяна на (инерциалната) отправна система.

Доколкото полевите уравнения (3.10) са определени от действието (3.8), а последното от лагранжиана

(3.9), то следва импликацията

$$(S_2) \quad \Longrightarrow \quad (S_1)\,. \tag{4.17}$$

Вече сме готови да приведем формулировката на теоремата на Ньотер. Тя гласи, че ако е зададено еднопараметрично семейство от преобразования (4.12), то могат да се конструират изрази

$$\begin{aligned} & J^{\mu}(u, \mathrm{w}, \mathrm{x}) \\ & \big(=\ J^{\mu}\big(\phi, (\partial_{\mu}\phi), \mathrm{x}\big)\ \big) \\ & \text{за} \quad \mu \ =\ 0, 1, 2, 3\,, \end{aligned} \tag{4.18}$$

зависещи от стойността на полето и първите му производни, така че е в сила тъждеството

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\, J^{\mu}\Big(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\Big) \ =\ 0\,, \tag{4.19}$$

винаги когато $\phi(\mathrm{x})$ е решение на уравненията на Лагранж–Ойлер (3.10). Доказателството и конструкциите от теоремата на Ньотер сме поставили в приложение. Конструраните изрази са:

$$J^{\mu} = \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\,\partial_{\rho}\phi - L\,\delta^{\mu}_{\rho}\right) Z^{\rho}(\mathrm{x}) - \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\,R(\mathrm{x},\phi)\,, \tag{4.20}$$

където

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,F^{\mu}(\mathrm{x};\varepsilon)\Big|_{\varepsilon\,=\,0} &=: Z^{\mu}(\mathrm{x})\,, \\ \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,G(\mathrm{x},u;\varepsilon)\Big|_{\varepsilon\,=\,0} &=: R(\mathrm{x},u) \end{aligned} \tag{4.21}$$

(забележете, че изразите J^{μ} зависят единствено от първите производни на трансформационните закони (4.12) при $\varepsilon = 0$).

Нека да разтълкуваме значението на тъждеството (4.19). Съгласно него, след като заместим аргументите u и $\mathrm{w} = (w_\mu)$ на J^μ (4.18) със съответно, стойността на ϕ и нейните производни $\dfrac{\partial\phi}{\partial\mathrm{x}} = \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\right)$ в точката x, то получаваме система от функции $f^\mu(\mathrm{x})$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$, които изпълняват тъждеството

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\mu} = 0\,. \tag{4.22}$$

Такива функции се наричат запазващи се токове, а самото тъждество – *уравнение за непрекъснатост*. Всъщност, точно тази форма имаше и локалния закон за запазване на електричния заряд изразен в (Л1.2.3) и (Л3.5.24). Общото наименование "уравнение на непрекъснатост" идва от приложенията в хидродинамиката, където неговото прилагане е свързано с локания закон за запазването на веществото (масата). Нека в допълнение на нашите разсъждения от лекция 1 да приведем интерпретацията на закона (4.22) в контекста на търсения от нас закон за запазване, следващ от теоремата на Ньотер. За целта, ако интегрираме израза в лявата страна на (4.22)

$$0 = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\mu}(x^0, \mathbf{x})\ d^3x\, dx^0 \tag{4.23}$$

$(d^3x = dx^1\ dx^2\ dx^3)$, то съгласно теоремата на Стокс[33] ще получим

$$\int\limits_{\Omega_0} f^0(0, \mathbf{x})\, d^3x = \int\limits_{\Omega_0} f^0(x^0, \mathbf{x})\, d^3x + \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega_0} f^k(\tau, \mathbf{x})\, d\sigma^k d\tau\,, \tag{4.24}$$

където $\partial\Omega_0$ е границата на областта $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^3$, а $(d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3)$ векторът на диференциалната площ върху тази граница. В частност, ако $\Omega_0 =$

[33] Това е един от многото варианти на тази теорема. Нейното най-пълно и общо разбиране се постига в *диференциалната геометрия* с теорията на диференциалните форми и тяхното интегриране.

$\mathbb{R}^3$ и f^μ клонят достатъчно бързо към нула при $\mathbf{x} \to \infty$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f^0(0,\mathbf{x})\, d^3x = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f^0(0,\mathbf{x})\, d^3x\,. \tag{4.25}$$

Ако се върнем към J^μ (4.18), то последната формула, (4.25), ни дава следния израз за функционала (4.2)

$$\mathcal{J}\left\{\phi_0(\mathbf{x}), \dot{\phi}_0(\mathbf{x})\right\} \tag{4.26}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} J^0\Big(\underbrace{\phi_0(\mathbf{x})}_{u}, \underbrace{\dot{\phi}_0(\mathbf{x}), \frac{\partial\phi_0}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x})}_{\mathrm{w}=(w_0,\mathbf{w})}, \underbrace{x^0, \mathbf{x}}_{\mathrm{x}}\Big)$$

$$\times\ d^3x\,. \tag{4.27}$$

Изразите J^μ (4.18) се наричат още *ньотерови запазващи се токове.*

Този параграф ще завършим с

изброяване на приложенията на теоремата на Ньотер за някои от основните симетрии във физиката. Изводите на приведените формули читателя може да намери отново в приложението към тази глава.

(a) За транслационната симетрия (4.8) съответстващия Ньотеров ток има вида

$$J^{\mu} \,=\, T^{\mu}_{\nu}\, n^{\nu}\,, \quad \text{където}$$
$$T^{\mu}_{\nu}(u,\mathrm{w},\mathrm{x}) \,=\, \frac{\partial L}{\partial w_{\mu}}\, w_{\nu} - L\,\delta^{\mu}_{\nu}$$
$$\equiv\, \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\,\partial_{\nu}\phi - L\,\delta^{\mu}_{\nu} \qquad (4.28)$$

където $T^{\mu}_{\nu} = T^{\mu}_{\nu}\,(u,\,\mathrm{w},\,\mathrm{x})$ (за $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) се нарича *тензор на енергията–импулса* (stress–energy tensor). Запазващите се величини, които тази симетрия поражда са *хамилтониана* (Hamiltonian) или още, *енергията*[34] cP_0 на системата, която отговаря на избор на четиривектора $\mathrm{n} = (1, 0, 0, 0)$ и също, трите компоненти на *импулса* на системата, P_k за $k = 1, 2, 3$:

$$P_\mu\left\{\phi_0(\mathbf{x}), \dot{\phi}_0(\mathbf{x})\right\} \tag{4.29}$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} T^0_\mu\left(\phi_0(\mathbf{x}), \dot{\phi}_0(\mathbf{x}), \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}), x^0, \mathbf{x}\right)$$
$$\times\ d^3x$$

$(\mu = 0, 1, 2, 3)$. В частност, изразът за cT^0_0 играе роля на *обемна*

[34] P_0 подобно и на P_k има размерност на импулс, за да се премине към единици на енергия следва да се до умножи на скоростта на светлината c. Всичко това е просто в следствие на полагането на времевата координата за $x^0 = ct$.

плътност на полевата енергия, понеже след интегриране по тримерното пространство ни дава пълната енергия cP_0. За примера на вълновото уравнение определено от лагранжиана (3.12) получаваме

$$T^{\mu}_{\nu}\Big(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\Big) \tag{4.30}$$
$$= \frac{\partial \phi}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\rho}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\rho}} \delta^{\mu}_{\nu} \,.$$

Забележете, че за да бъде инвариантно действие спрямо транслационното преобразование (4.8) е необходимо и достатъчно лагранжиана $L(u, \mathrm{w}, \mathrm{x})$ да не зависи от x (явно). Именно такъв е лагранжиантът (3.12), за който по-горе изчислихме тензора на енергията-импулса.

Възниква естествен въпрос: на какви физически основания интерпретираме запазващите се величини (4.29) свързани с хомогенността на времето и пространството, като енергия $\mathcal{E} = cP_0$ и импулс (P_1, P_2, P_3) на полевата система? Преди всичко, основание е съвпадението на тези величини с вече въведени величини за енергия и импулс за физични системи от нютоновата механика и електродинамиката. Ние няма да се занимаваме тук с тези примери, но в последствие в този курс ще намерим допълнителни потвърждения на това, че запазващите се величини на енергията и импулса са свързани с трансформации на симетрия при транслация във времето и пространството.

Приложение А. Общ случай на уравненията на Лагранж-Ойлер

Нека

$$L = L\big(\underline{\phi}, \partial\underline{\phi}, \partial^2\underline{\phi}, \ldots, \partial^n\underline{\phi}, \mathrm{x}\big) \tag{A.1}$$

е лагранжиан на система от N полета $\underline{\phi}(\mathrm{x}) = \big(\phi_1(\mathrm{x}),\ \ldots,\ \phi_N(\mathrm{x})\big)$, зависещ от производните им до ред n (в точката x),

$$\partial^n\underline{\phi} := \big(\partial_{\mu_1,\ldots,\mu_n}\phi_j\big) \tag{A.2}$$

където $j = 1, \ldots, N$, $0 \leqslant \mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n \leqslant 3$ и наредбата е избрана в следствие на симетрията на частните производни

$$\partial_{\mu_1,\ldots,\mu_n}\phi_j := \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_n}}\,\phi_j \tag{A.3}$$

при разместване на $\mu_1, \ldots, \mu_n$. **Поради горните ограничения върху индексите, в тази точка за по-голяма яснота няма да следваме сумационната конвенция (Л3.5.14), но ще изписваме явно всяка сума.**

Така, условието (3.3) за функционала

$$
\begin{aligned}
&S\{\underline{\phi}(\mathrm{x})\} \qquad\qquad \text{(A.4)}\\
&= \int\limits_{\Omega} L\Big(\underline{\phi}(\mathrm{x}), (\partial_\mu \underline{\phi}(\mathrm{x})),\\
&\qquad \ldots, (\partial_{\mu_1,\ldots,\mu_n} \underline{\phi}(\mathrm{x})), \mathrm{x}\Big)\, d^4x
\end{aligned}
$$

води, подобно на пресмятането в

точка 3, до

$$\frac{d}{d\varepsilon}\,S\{\underline{\phi}(\mathrm{x})+\varepsilon\underline{\psi}(\mathrm{x})\}\Big|_{\varepsilon\,=\,0}$$

$$=\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,L\,\Big|_{\varepsilon\,=\,0}\;d^4x$$

$$=\int\limits_{\Omega}\sum_{\substack{1\,\leqslant\,j\,\leqslant\,N\\0\,\leqslant\,k\,\leqslant\,n\\0\,\leqslant\,\mu_1\,\leqslant\,\cdots\,\leqslant\,\mu_k\,\leqslant\,3}}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu_1,\ldots,\mu_k}\phi_j)}$$

$$\times\;\frac{\partial^k\psi(\mathrm{x})}{(\partial x^{\mu_1})\cdots(\partial x^{\mu_k})}\;d^4x$$

$$=\int\limits_{\Omega}\sum_{\substack{1\,\leqslant\,j\,\leqslant\,N\\0\,\leqslant\,k\,\leqslant\,n\\0\,\leqslant\,\mu_1\,\leqslant\,\cdots\,\leqslant\,\mu_k\,\leqslant\,3}}\psi(\mathrm{x})$$

$$\times\;\left(\prod_{r\,=\,1}^{k}\left(-\frac{D}{Dx^{\mu_r}}\right)\right)$$

$$\times\;\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu_1,\ldots,\mu_k}\phi_j)}\;d^4x\,,$$

където в последното равенства е използвано неколкократно интегриране по части при което всяка производна $\frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}}$ (за $r = 1, \ldots, k$) се прехвърля със знак минус от $\psi(\mathrm{x})$ към $\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu_1,\ldots,\mu_k}\phi_j)}$, вече като пълна производна $\frac{D}{Dx^{\mu_r}}$. Освен това, обърнете внимание, че членовете в горното пресмятане за случая $k = 0$ отговарят на липса на производни по x^μ. И така, съгласно аргументацията от точка 3 получаваме, че

$$\frac{\delta S}{\delta\phi_j(\mathrm{x})} = 0 = \tag{A.5}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \phi_j} - \sum_{\mu=0}^{3} \frac{D}{Dx^\mu}\Big(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_j)}\Big) + \cdots$$

$$+ \left(\prod_{r=1}^{k}\Big(-\frac{D}{Dx^{\mu_r}}\Big)\right)\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu_1,\ldots,\mu_k}\phi_j)}\,.$$

Обърнете внимание, че в общия случай уравненията на Лагранж–Ойлер са от ред два пъти по-голям от най-високия ред n на производните, които участват в лагранжиана, тъй като всяка пълна производна $\frac{D}{Dx^{\mu_r}}$ ще увеличи с единица реда на производните на ϕ_j в изразът на който действа. В тази връзка, полезна формула е формулата за пълните производни:

$$\frac{D}{Dx^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \sum_{j=1}^{N} (\partial_\mu \phi_j) \frac{\partial L}{\partial \phi_j}$$

$$+ \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant N \\ 0 \leqslant \nu \leqslant 3}} (\partial_{\mu,\nu} \phi_j) \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \phi_j)} + \cdots$$

$$+ \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant N \\ 0 \leqslant \nu_1 \leqslant \cdots \leqslant \nu_k \leqslant 3}} (\partial_{\mu,\nu_1,\dots,\nu_k} \phi_j) \frac{\partial}{\partial(\partial_{\nu_1,\dots,\nu_k} \phi_j)}$$

$$+ \cdots \tag{A.6}$$

където редът продължава докато се стигне до най високия ред $\partial_{\nu_1,\dots,\nu_n}\phi_j$ на производни на ϕ_j в израза върху който се прилага горния оператор. В частност, първите три члена в (A.6) остават в случая на лагранжиани и изрази, в които участват само първи производни на полетата.

Приложение Б. Доказателство на теоремата на Ньотер

Трансформационните функции (4.3) записваме накратко като

$$\left| \begin{array}{rcl} \mathrm{x}' & = & \mathrm{F}\left(\mathrm{x}\right) \\ u' & = & G\left(\mathrm{x}, u\right) \end{array} \right. . \qquad (\text{Б}.1)$$

В допълнение към това ние ще предположим, че всички примовани обекти зависят посредством $\mathrm{F} = (F^{\mu})$ и G от параметър на трансформация ε, както е в (4.12), заедно с условието (4.13). За краткост на означенията не винаги ще изписваме зависимостта от ε.

Ако преминем от x' към x в (4.16) ще имаме

$$\int\limits_{\Omega} L\Big(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\Big)\, d^4x$$

$$= \int\limits_{\Omega} L\Big(\phi'\big(\mathrm{F}(\mathrm{x})\big), \frac{\partial \phi'}{\partial \mathrm{x}'}\big(\mathrm{F}(\mathrm{x})\big), \mathrm{F}(\mathrm{x})\Big)$$

$$\times\ \frac{\mathcal{D}\mathrm{F}}{\mathcal{D}\mathrm{x}}(\mathrm{x})\ d^4x\,, \tag{Б.2}$$

където $\dfrac{\mathcal{D}\mathrm{F}}{\mathcal{D}\mathrm{x}}$ е якобиянът на трансформацията $\mathrm{x}' = \mathrm{F}(\mathrm{x})$. Тъй като по предположение (Б.2) е изпълнено за всяка област Ω, то

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Bigg(L\Big(\phi'\big(\mathrm{F}(\mathrm{x})\big), \frac{\partial \phi'}{\partial \mathrm{x}'}\big(\mathrm{F}(\mathrm{x})\big), \mathrm{F}(\mathrm{x})\Big)$$

$$\times\ \frac{\mathcal{D}\mathrm{F}}{\mathcal{D}\mathrm{x}}(\mathrm{x})\Bigg)\Bigg|_{\varepsilon\,=\,0} =\ 0\,. \tag{Б.3}$$

Следва преработка на равенство

(Б.3), която първо включва диференциране на сложната зависимост от ε. След това, с помощта на правилото на Лайбниц[35] ще прехвърлим всички частни производни по пространство-времевите координати от трансформационните функции (4.21) към лагранжиана. С това ще се отдели от една страна желаната *дивергенция* $\dfrac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu}$ и от друга страна, изрази умножени по полевите уравнения (виж. заключителното тъждество (Б.18)).

И така, преработвайки (Б.3) получаваме (виж поясненията след ра-

---

[35] $f(x)\,\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(f(x)g(x)) - \dfrac{\partial f}{\partial x}\,g(x)$

венствата):

$$0 = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Bigg(L\Big(G(\mathrm{x}, \phi(\mathrm{x})),\tag{Б.4}$$

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial \mathrm{x}'}\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\big(\phi'\big(\mathrm{F}(\mathrm{x})\big)\big), \mathrm{F}(\mathrm{x})\Big)$$

$$\times\ \frac{\mathcal{D}\mathrm{F}}{\mathcal{D}\mathrm{x}}(\mathrm{x})\Bigg)\Bigg|_{\varepsilon\,=\,0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Bigg(L\Big(G(\mathrm{x}, \phi(\mathrm{x})),\tag{Б.5}$$

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial \mathrm{x}'}\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\big(G(\mathrm{x}, \phi(\mathrm{x}))\big), \mathrm{F}(\mathrm{x})\Big)$$

$$\times\ \frac{\mathcal{D}\mathrm{F}}{\mathcal{D}\mathrm{x}}(\mathrm{x})\Bigg)\Bigg|_{\varepsilon\,=\,0}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial u}\Big(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\Big)\tag{Б.6}$$

$$\times\ \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}(\mathrm{x}, \phi(\mathrm{x}); \varepsilon)\ \Big|_{\varepsilon\,=\,0}$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial w_\mu}\Big(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\Big)\tag{Б.7}$$

$$\times \; \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \big(G(\mathrm{x}, \phi(\mathrm{x})) \big) \right) \Big|_{\varepsilon \, = \, 0}$$

$$+ \; \frac{\partial L}{\partial x^{\rho}} \left(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x} \right) \qquad (\text{Б}.8)$$

$$\times \; \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(F^{\rho}(\mathrm{x}; \varepsilon) \right) \Big|_{\varepsilon \, = \, 0}$$

$$+ \; L \left(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x} \right) \qquad (\text{Б}.9)$$

$$\times \; \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\mathcal{D}\mathrm{F}}{\mathcal{D}\mathrm{x}} \right) \Big|_{\varepsilon \, = \, 0} ,$$

където

- в равенства (Б.4) и (Б.5) предварително сме обработили израза в производната $\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big(\cdots \Big)$ както следва. В (Б.4), както и в (Б.5) сме използвали (4.6) за да се освободим от ϕ'. В (Б.4) сме използвали още и формулата за диференциране на сложна функция

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\big(G(\mathrm{x},\phi(\mathrm{x})\big)$$
$$= \frac{\partial \phi'}{\partial x'^{\mu}}\big(\mathrm{F}(\mathrm{x})\big)\,\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}(\mathrm{x})$$

и сме въвели обратната матрица на $\dfrac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$:

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\,\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \;=\; \delta^{\nu}_{\rho}\,. \qquad (\text{Б}.10)$$

- В (Б.6) – (Б.9) сме диференцирали по ε. Най-напред, в (Б.6) – (Б.8) сме диференцирали $L(u,$ w, x) по ε, последователно като сложна функция, след което сме положили $\varepsilon = 0$ в получените производни на L. Обърнете внимание, че

$$\Big(\phi'\big(\mathrm{F}(\mathrm{x})\big), \frac{\partial \phi'}{\partial \mathrm{x}'}\big(\mathrm{F}(\mathrm{x})\big), \mathrm{F}(\mathrm{x})\Big)\Big|_{\varepsilon\, =\, 0}$$

$$= \Big(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\Big)\,,$$

$$\frac{\mathcal{D}\mathrm{F}}{\mathcal{D}\mathrm{x}}(\mathrm{x})\Big|_{\varepsilon\, =\, 0} = 1\,.$$

- И последно, в (Б.9) остава диференцирания по ε якобиян $\dfrac{\mathcal{D}\mathrm{F}}{\mathcal{D}\mathrm{x}}$.

По–нататък, въвеждайки $Z^\mu(\mathrm{x})$ и $R(\mathrm{x}, u)$ по (4.21) и извеждайки от (Б.10)

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\Big)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\Big) = 0$$

$$\underset{\varepsilon = 0}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\,\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\Big|_{\varepsilon\, =\, 0}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial F^\nu}{\partial x^\mu}\Big|_{\varepsilon = 0} =$$

$$- \frac{\partial Z^\nu}{\partial x^\mu}(u, x)$$

ние заместваме

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u}\left(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\right) R(\mathrm{x}, \phi(\mathrm{x})) \tag{Б.11}$$

$$- \frac{\partial L}{\partial w_\mu}\left(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\right) \tag{Б.12}$$

$$\times \frac{\partial Z^\nu}{\partial x^\mu}(\mathrm{x}) \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}(\mathrm{x})$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial w_\mu}\left(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\right) \tag{Б.13}$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\big(G(\mathrm{x}, \phi(\mathrm{x}); \varepsilon)\big)\right)\Big|_{\varepsilon = 0}$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial x^\rho}\left(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\right) Z^\rho(\mathrm{x}) \tag{Б.14}$$

$$+ L\left(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\right) \frac{\partial Z^\rho}{\partial x^\rho}(\mathrm{x}), \tag{Б.15}$$

където в (Б.15) сме използвали формулата

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\mathcal{D}\mathrm{F}}{\mathcal{D}\mathrm{x}}\right)\Big|_{\varepsilon\ =\ 0} = \frac{\partial Z^{\rho}}{\partial x^{\rho}}\,.$$

По-нататък, като отчетем в (Б.13), че

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Big(G(\mathrm{x},\phi(\mathrm{x});\varepsilon)\Big)\right)\Big|_{\varepsilon\ =\ 0} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Big(R(\mathrm{x},\phi(\mathrm{x}))\Big)\,,$$

то сумата на членове (Б.11) и (Б.13) ни дава

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}.\mathcal{L}.\{\phi\}(\mathrm{x})\ \cdot\ R(\mathrm{x},\phi(\mathrm{x})) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[\frac{\partial L}{\partial w_{\mu}}\left(\phi(\mathrm{x}),\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{x}}(\mathrm{x}),\mathrm{x}\right)\right. \\
&\quad \left.\times\ R(\mathrm{x},\phi(\mathrm{x}))\right], \qquad (\text{Б}.16)
\end{aligned}$$

където

$$\mathcal{E}.\mathcal{L}.\{\phi\}(\mathrm{x}) \;=\; \frac{\delta S}{\delta\phi(\mathrm{x})}$$

е дясната страна на уравненията на Лагранж–Ойлер (3.7). Сумата на останалите членове (Б.12), (Б.14) и (Б.15) е равна на

$$\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left[L\left(\phi(\mathrm{x}),\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{x}}(\mathrm{x}),\mathrm{x}\right)\; Z^\rho(\mathrm{x})\right]$$
$$-\;\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial w_\mu}\left(\phi(\mathrm{x}),\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{x}}(\mathrm{x}),\mathrm{x}\right)\right.$$
$$\left.\times\;\; Z^\rho(\mathrm{x})\,\frac{\partial\phi}{\partial x^\rho}(\mathrm{x})\right]$$
$$-\,\mathcal{E}.\mathcal{L}.\{\phi\}(\mathrm{x})\;\cdot\; Z^\rho(\mathrm{x})\,\frac{\partial\phi}{\partial x^\rho}(\mathrm{x})\,. \tag{Б.17}$$

С това, получаваме

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,J^\mu\left(\phi(\mathrm{x}),\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{x}}(\mathrm{x}),\mathrm{x}\right)$$

$$= \left(R(\mathrm{x}, \phi(\mathrm{x})) - Z^\rho(\mathrm{x}) \, \frac{\partial \phi}{\partial x^\rho}(\mathrm{x}) \right) \times \; \mathcal{E}.\mathcal{L}.\{\phi\}(\mathrm{x}) \tag{Б.18}$$

където

$$J^\mu(u, \mathrm{w}, \mathrm{x}) \; = \; \frac{\partial L}{\partial w_\mu}(u, \mathrm{w}, \mathrm{x}) \times \big(Z^\rho(\mathrm{x}) \, w_\rho - R(\mathrm{x}, u) \big) - L(u, \mathrm{w}, \mathrm{x}) \, Z^\mu(\mathrm{x}) \tag{Б.19}$$

в потвърждение на (4.20).

Равенство (Б.18) е централното тъждество в теоремата на Ньотер. То именно показва, че ако $\phi(\mathrm{x})$ е решение на уравненията на Лагранж-Ойлер, то тогава е в сила тъждеството (4.19), $\dfrac{DJ^\mu}{Dx^\mu} = 0$.

На първия пример от точка 4 –

транслационната симетрия – имаме

$$F^{\mu}(\mathrm{x}) = x^{\mu}+\varepsilon\, n^{\mu}\,, \quad G(\mathrm{x},u;\varepsilon) = u$$

От тук, $Z^{\mu} = n^{\mu}$ и $R = 0$, което веднага възпроизвежда формула (4.28) като следствие от (Б.19).

Лекция 5

Теория на класическите полета II.

1. Как да си приготвим теория: общи съвети

В тази точка ще въведем някои общи "рецепти" за строене на физични теории базирани на вариационния принцип. Подобно на обикновеното готварство и тук водещия принцип е принципа на добавянето на разни специално подбрани съставки, в случая – към действието: $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$.

а) *Комбиниране / сдвояване на вече построени полеви модели.*

Най-напред, ако имаме две отделни полеви теории определени от действия $S_1\left\{\phi_1^{(1)}, \ldots, \phi_{N_1}^{(1)}\right\}$ и

$S_2\big\{\phi_1^{(2)}, \ldots, \phi_{N_2}^{(2)}\big\}$ за системи от полета $\phi_1^{(1)}(\mathrm{x}), \ldots, \phi_{N_1}^{(1)}(\mathrm{x})$ и $\phi_1^{(2)}(\mathrm{x}), \ldots, \phi_{N_2}^{(2)}(\mathrm{x})$, съответно, то можем да определим комбинирана теория с действие

$$\begin{aligned} & S\big\{\phi_1^{(1)}, \ldots, \phi_{N_1}^{(1)}, \phi_1^{(2)}, \ldots, \phi_{N_2}^{(2)}\big\} \\ & = S_1\big\{\phi_1^{(1)}, \ldots, \phi_{N_1}^{(1)}\big\} \\ & + S_2\big\{\phi_1^{(2)}, \ldots, \phi_{N_2}^{(2)}\big\}\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Непосредствено се убеждаваме, че полевите уравнения за действието S (1.1) са просто обединение на полевите уравнения за системите $\phi_1^{(1)}(\mathrm{x}), \ldots, \phi_{N_1}^{(1)}(\mathrm{x})$ и $\phi_1^{(2)}(\mathrm{x}), \ldots, \phi_{N_2}^{(2)}(\mathrm{x})$. С други думи, това е просто обединено разглеждане на полеви системи, които не взаимодействат по между си. В потвърждение на последното говори и факта, че пълните енергия P_0 и импулс (P_1, P_2, P_3) на комбинираната система са сума на тези на подсистемите:[36]

$$
\begin{aligned}
& P_\mu \big\{ \phi_1^{(1)}, \dots, \phi_{N_1}^{(1)}, \phi_1^{(2)}, \dots, \phi_{N_2}^{(2)} \big\} \\
& = \; P_\mu^{(1)} \big\{ \phi_1^{(1)}, \dots, \phi_{N_1}^{(1)} \big\} \\
& + \; P_\mu^{(2)} \big\{ \phi_1^{(2)}, \dots, \phi_{N_2}^{(2)} \big\}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

($\mu = 0, 1, 2, 3$). Всъщност, непосредствено се проверява, че всеки ньотеров ток за обща симетрия на двете комбинирани теории е сума на из-

[36]Обърнете внимание, че по конструкция P_μ са функционали не на пълните полеви функции, а на началните условия, както е отбелязано за всяка ньотерова запазваща се величина в (Л4.4.2) и (Л4.4.26). За краткост обаче във формулите тук сме ги записали, като функционали просто на полетата, без това да се използва съществено.

ходните токове,

$$J^{\mu} = J_1^{\mu} + J_2^{\mu} \,.$$

б) *Включване на взаимодействие* (*interaction*).

Енергиите и импулсите $(P_{\mu}^{(1)})$ и $(P_{\mu}^{(1)})$ на две невзаимодействащи полеви системи се запазват както по отделно, така разбира се и сумарно (1.2). При наличие на взаимодействие само пълните енергия и импулс следва да се запазват. Разгледаното в предходната подточка до известна степен формално и идеализирано обединение на две теории е първата стъпка при описание на взаимодействащи полеви системи. Например, така постъпваме в електродинамиката, когато искаме да опишем взаимодействие на електромагнитно поле с полета описващи (токове на) заредени частици. В последния случай, както и в много други теории на взаимодействащи полеви системи се приема, че взаимодействието може да се опише с *адитивна* добавка[37] към действието (1.1), която се нарича *член на взаимодействие* S_{int},

$$\begin{aligned} & S_{tot}\left\{\phi_1^{(1)}, \ldots, \phi_{N_1}^{(1)}, \phi_1^{(2)}, \ldots, \phi_{N_2}^{(2)}\right\} \\ = & \; S_1\left\{\phi_1^{(1)}, \ldots, \phi_{N_1}^{(1)}\right\} \\ + & \; S_2\left\{\phi_1^{(2)}, \ldots, \phi_{N_2}^{(2)}\right\} \\ + & \; S_{int}\left\{\phi_1^{(1)}, \ldots, \phi_{N_1}^{(1)}, \phi_1^{(2)}, \ldots, \phi_{N_2}^{(2)}\right\}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

[37]адитивна добавка = израз добавен с операция на сумиране; мултипликативна добавка = израз добавен с операция на умножение

Ако имаме полева симетрия на горното действие S_{tot} (1.3), то пълният ньотеров ток J^μ ще е сума на приноси J_1^μ, J_2^μ, J_{int}^μ, идващи съответно от отделните членове S_1, S_2 и S_{int}:

$$J_{tot}^\mu = J_1^\mu + J_2^\mu + J_{int}^\mu \, .$$

В частност, за пълната енергия и импулс на системата имаме

$$\begin{aligned} & P_\mu^{(tot)}\left\{\phi_1^{(1)}, \ldots, \phi_{N_1}^{(1)}, \phi_1^{(2)}, \ldots, \phi_{N_2}^{(2)}\right\} \\ & = P_\mu^{(1)}\left\{\phi_1^{(1)}, \ldots, \phi_{N_1}^{(1)}\right\} \\ & + P_\mu^{(2)}\left\{\phi_1^{(2)}, \ldots, \phi_{N_2}^{(2)}\right\} \\ & + P_\mu^{(int)}\left\{\phi_1^{(1)}, \ldots, \phi_{N_1}^{(1)}, \phi_1^{(2)}, \ldots, \phi_{N_2}^{(2)}\right\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Забележете, че сега $P_\mu^{(1)}$, $P_\mu^{(2)}$ и $P_\mu^{(int)}$ не се запазват по отделно, а единствено тяхната сума $P_\mu^{(tot)}$. Друго следствие е, че ако искаме да говорим за енергия и импулс ($P_\mu^{(1)}$) и ($P_\mu^{(2)}$) на подсистемите, то общата енергия–импулс ($P_\mu^{(tot)}$) не е тяхната (векторна) сума. Съществува трети принос ($P_\mu^{(int)}$) в ($P_\mu^{(tot)}$), който играе ролята на "резервоар" за енергия–импулс и той се дължи на взаимодействието. Всъщност, при класическия закон за запазване на енергията в нютоновата механика също се въвежда подобен "резервоар" на енергия от който отделните кинетични енергии на взаимодействащи помежду си частици могат да черпят. Това е *потенциалната енергия*. Така, енергията–импулс на взаимодействие се явява обобщение на понятието за потенциална енергия.

в) Динамичен фон (dynamical background).

Да разгледаме лагранжиана водещ до вълновото уравнение,

$$L = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\,\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}(\mathrm{x})\,\frac{\partial\phi}{\partial x^{\nu}}(\mathrm{x})\,, \qquad (1.5)$$

където $(\eta^{\mu\nu})$ беше обратната матрица на метричния тензор $(\eta_{\mu\nu})$. В общата теория на относителността се предлага $(\eta_{\mu\nu})$ да се замени с (тензорно) поле $(\eta_{\mu\nu}(\mathrm{x}))$. В момента няма да обсъждаме дълбоките мотиви за тази замяна. Ще отбележим, че метричния тензор е един от първите примери във физиката на *фоново поле* (background field) в теория. Има и много други ситуации, когато се въвеждат фонови полета. Например, при описание на система от частици във външно електромагнитно поле, последното е фоново поле. Обикновено когато се говори за фонови полета, то те не са динамични: по тях не извършваме вариации и не им налагаме допълнителни уравнения. В този случай фоновите полета участват, като "полеви параметри" в уравненията на Лагранж-Ойлер. Ако решим обаче да "добавим" динамика на фоновите полета, т.е., да ги направим динамичен фон, то това става с адитивна добавка към действието. Последната добавка отговаря за динамиката на фона сам по себе си.

г) *Базисни членове на действието.*

И така, както отбелязахме до тук действието в една полева теория се строи основно на *адитивен принцип*, т.е., като сума на базисни членове. А как се подбират базисните членове?

Едно от първите съображения при избор е обикновено простотата и естествеността. Образец за това миже да ни служи лагранжиана (1.5). Съществуват разбира се и допълнителни съображения. Ако от базисните членове в действието се очаква да описват самостоятелни полеви подсистеми, преди "включването" на взаимодействие, то на нас са ни нужни изрази за действие, съответстващи на така наречените *свободни полета* (free fields). Подобно на свободните частици в механиката, които се движат равномерно и праволинейно, също и свободните полета могат най-общо да се характеризират, като подчинени на *линейни* полеви уравнения.

От своя страна, полевите уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_j} - \sum_{\mu=0}^{3} \frac{D}{Dx^\mu}\Big(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_j)}\Big) = 0 \qquad (1.6)$$

са линейни тогава тогава и само тогава, когато лагранжиантът L е полином от степен две спрямо полетата и техните производни. Такива лагранжиани ще наричаме *квадратични*. Например, (1.5) е квадратичен лагранжиан.

По-нататък, транслационната симетрия, водеща до запазването на енергията и импулса, изисква лагранжианите да не зависят явно от точките x на пространство-времето,

$$L = L\Big(\phi_1(\mathrm{x}), \ldots, \phi_N(\mathrm{x}),$$

$$\frac{\partial\phi_1(\mathrm{x})}{\partial\mathrm{x}},\ldots,\frac{\partial\phi_n(\mathrm{x})}{\partial\mathrm{x}}\Big).$$

Така, лагранжианите на сводните полета остават *едиствено* квадратни полиноми на полетата и просизводните им. Това силно ограничава произвола: един квадратен полином се определя от краен брой параметри.

Следва съображението за ротационна и по-общо, за релативистка инвариантност. То допълнително намалява броя на свободните параметри в лагранжиана и за *скаларни* полета, като това участващо в (1.5) остава само още една възможност

$$\phi(\mathrm{x})^2\,.$$

Така, лагранжиянът (1.5) може най-общо да се обобщи до вида

$$L = \frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}(\mathrm{x})\,\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}(\mathrm{x}) + \frac{\beta}{2}\,\phi(\mathrm{x})^2\,.$$

Тук следва да отбележим, че единият от горните два параметъра α и β е несъществен, понеже може да се “погълне” от полето. Например, ако предефинираме $\phi(\mathrm{x}) \mapsto \sqrt{|\alpha|}\,\phi(\mathrm{x})$ ще стигнем до вида

$$L = \sigma_1\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} + \sigma_2\,\frac{m^2}{2}\,\phi^2\,, \tag{1.7}$$

където $\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1$, а $m \geqslant 0$ е свободен непрекъснат параметър.

Поредното условие, които ще изтъкнем има физичен характер: това е изискването енергията да е *не-*

отрицателна. По-нататък в този курс ние допълнително ще обсъдим това изискване, а в момента ще изтъкнем само, че положителността на енергията е свързана с физическото изискване за стабилност на полевата система. От условието за неотрицателност на плътността енергията T_0^0 (виж (Л4.4.28), (Л4.4.29) и (Л4.4.30))) следва, че в (1.7) $\sigma_1 = -\sigma_2 = 1$, понеже

$$T_0^0 = \frac{\sigma_1}{2}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)^2\right) - \frac{\sigma_2\, m^2}{2}\,\phi^2\,.$$

Така, най-общият физически допустим вид на лагранжиан на скаларно релативистко поле е:

$$L = \frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} - \frac{m^2}{2}\phi^2 . \quad (1.8)$$

По нататък в този курс ще видим, че параметърът $m \geqslant 0$ в (1.8) има смисъл на маса на частиците, описвани от полето $\phi(\mathrm{x})$ в квантовата теория. По-общо, ние ще разгледаме квантовомеханичната (кинема–тична) класификация на елементарните частици и ще видим, че те се характеризират от два параметъра: един непрекъснат параметър, който има смисъл на маса $m \geqslant 0$ и един дискретен, наречен *спин* (spin или още, вътрешен ъглов момент) s

$= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$. При съответствието между полета и частици в квантовата теория на полето на всеки тип (свободна) частица съответства лагранжиан (на свободно поле). В частност, лагранжианът (1.8) съответства на частици с маса m и спин $s = 0$.

Обсъдените до тук методи за конструиране на базисни членове в лагранжиана и действието представляват едни от най-основните принципи за това. Някои допълнителни възможности се състоят във въвеждане на членове *без производни* по дадени полета. Съгласно уравненията за движение (1.6) полетата, които участват без производни в лагранжиана изпълняват само алгебрични, а не диференциални уравнения. Последното означава, че всъщност такива полета се изразяват алгебрично от останалите полета (и техните производни). Така, това са нединамични полета, които обикновено се въвеждат като спомагателни полета.

Остана да обсъдим възможностите за членовете в действието, които отговарят за взаимодействието. Съображенията за естественост и простота разбира се отново се намесват. Една възможност е продиктувана от ситуацията в класическата електродинамика. Уравненията на Максуел в присъствие на заряди и токове имат вида на *линейни нехомогенни частни диференциални уравнения*. В общия случай на уравненията (1.6) това би означавало да се замени дясната страна с ненулеви *източници* $K^j(\mathrm{x})$ (за $j = 1, \ldots, N$). За да се генерира с лагранжиан такава добавка към уравненията на Лагранж–Ойлер е необходимо просто да се добави член в действието от вида[38]

$$\int\limits_{\Omega} \phi_j(\mathrm{x})\, K^j(\mathrm{x})\, d^4x\,.$$

В случая на уравненията на Мак-

[38]сумира се по $j = 1, \ldots, N$

суел източниците допълнително се оказват ньотерови токове изградени от други полета (виж (2.6) понататък в тази лекция).

Съществува обаче по-елегантен и естествен метод за въвеждане на взаимодействия. Този метод, който бихме могли да наречем ‘метод на фоновите полета”, се състои във въвеждане на допълнителни полета в лагранжианите на свободните полета. Ние вече показахме как метричният тензор (метриката) може да бъде трансформиран във фоново поле и това следва да се направи за всеки един базисен член на лагранжиана. Тъй като метриката в общата теория на относителността описва гравитацията, то ние получаваме автоматично метод по който да описваме взаимодействието между гравитационното поле и всяко друго поле! В следващите точки на тази лекция ще въведем друг основен тип фонови полета: *калибровъчните полета* (gauge fields). В този случай частните производни $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ на полетата се заменят така наречените *ковариантни производни* ∇_μ, които имат красива и естествена геометрична интерпретация. По такъв начин, калибровъчните полета днес се явяват основните преносители на взаимодействия, включващи в себе си и електромагнитното поле.

2. Действие и лагранжиан на електромагнитното поле

За да приведем действие пораждащо уравненията на Максуел ще отбележим най-напред, че втората група (Л3.5.21) от уравнения може да се реши чрез полагането

$$F_{\mu\nu}(\mathrm{x}) := \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}(\mathrm{x}) - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}(\mathrm{x})\,, \tag{2.1}$$

където четирите функции $\big(A_\mu(\mathrm{x})\big)_{\mu=0}^{3}$ се наричат *електромагнитни потенциали*. Съществуването на електромагнитните потенциали следва от уравнения (Л3.5.21) благодарение на така наречената *лема на Поанкаре*. Така, можем да считаме, че анзаца (полагането) (2.1) е равносилен на уравнения (Л3.5.21), в следствие на което остават само групата уравнения (Л3.5.20).

Така, като първа стъпка към действието на електромагнитното поле, преминаваме към основни полета $A_\mu(\mathrm{x})$, а полетата $F_{\mu\nu}$ приемаме като зависещи от тях

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\Big(\frac{\partial A}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x})\Big)$$
$$\Big(= \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\Big)\,. \qquad (2.2)$$

Тогава действието

$$S_{\mathrm{EM}}\Big\{(A_\mu(\mathrm{x}))_{\mu=0}^3\Big\}$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_{\Omega} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \, d^4x \qquad (2.3)$$

води до уравненията

$$0 = \frac{\delta S_{\mathrm{EM}}}{\delta A^{\mu}(\mathrm{x})} = \frac{\partial^2 A_{\nu}}{\partial x_{\nu} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 A_{\mu}}{\partial x_{\nu} \partial x^{\nu}} \, , \qquad (2.4)$$

което са точно уравнения (5.20) със заместени $F_{\mu\nu}$ от (2.2). Ако се върнем към векторите на интензитета $\mathbf{E}$ на електричното поле и магнитната индукция $\mathbf{B}$, чрез които изразихме $F_{\mu\nu}$ в (Л3.5.19) то ще получим за лагранжиана на електромагнитното поле израза

$$\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{E}^2}{c^2} - \mathbf{B}^2 \right) .$$

Друга интересна формула е за *плътността на енергията* T_0^0 *на елект-*

ромагнитното поле (припомняме, че съгласно формула (Л4.4.29) T_0^0 ни дава пълната енергия P_0 след интегриране по тримерното пространство):

$$T_0^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{E}^2}{c^2} + \mathbf{B}^2\right).$$

Важно свойство на електромагнитните потенциали е, че те са определени от $F_{\mu\nu}$ с точност до така наречените калибровачни трансформации:

$$A'_\mu(\mathrm{x}) = A_\mu(\mathrm{x}) + \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(\mathrm{x}) \tag{2.5}$$

$$\Longrightarrow \quad F_{\mu\nu}\left(\frac{\partial A}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x})\right) = F_{\mu\nu}\left(\frac{\partial A'}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x})\right)$$

(в следствие на спомената по-горе лема на Поанкаре следва и обратната импликация в (2.5)). Аналогична е ситуацията с потенциалната енергия във физиката, която е определена с точност до константата. Фактически, функцията A_0 непосредствено обобщава електростатичния потенциал. Така, самите калибровъчни трансформации не описват реална симетрия, а по-скоро описват свободата или още, произвола, във въведените допълнителни полеви степени на свобода посредством електромагнитните потенциали. Наблюдаваните физични ефекти не трябва да зависят от този допълнителен произвол.

В теорията на електромагнетизма също се показва, че при наличие на електрични заряди към действието на електромагнитното поле се прибавя добавка

$$\int\limits_{\Omega} A_{\mu}(\mathrm{x})\, J^{\mu}(\mathrm{x})\, d^4x\,, \tag{2.6}$$

където $J^{\mu}(\mathrm{x})$ е функция на пространство-времето с четиримерни векторни стойности, която характеризира разпределението и движението на електричните заряди и се нарича *четири-вектор на тока*. Тази функция изпълнява закона за запазване на електричния заряд, който подобно на (4.22) се задава в диференциална форма с уравнението

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\, J^{\mu} \,=\, 0\,. \tag{2.7}$$

По такъв начин пълният електричен заряд при зададен момент от време x^0 се определя по формулата

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} J^0(x^0, \mathbf{x})\, d^3x \tag{2.8}$$

и не се променя с времето x^0. В следствие на (2.7), добавката към действието (2.6) се оказва калибровъчно инвариантна,

$$\int\limits_{\Omega} A_\mu(\mathrm{x})\, J^\mu(\mathrm{x})\, d^4x \tag{2.9}$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left(A_\mu(\mathrm{x}) + \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(\mathrm{x}) \right) J^\mu(\mathrm{x})\, d^4x\,,$$

което се показва с интегриране по части (теоремата на Стокс), при естественото предположение, че произведението $J^\mu f_\mu$ изчезва върху границата на областта Ω.

3. Вътрешни симетрии и електричния заряд

Транслационната симетрия е основната пространствената симетрия. Тук ще разгледаме и един нов полева тип симетрия, наречена *вътрешна симетрия*.

За целта ще разгледаме още един пример на действие,

$$S\Big\{\psi(x^0,\mathbf{x}),\overline{\psi(x^0,\mathbf{x})}\Big\} \tag{3.1}$$

$$= \int\limits_{\Omega}\Big(i\,\overline{\psi(x^0,\mathbf{x})}\,\frac{\partial\psi}{\partial x^0}(x^0,\mathbf{x})$$

$$-\;\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^1}\,\frac{\partial\psi}{\partial x^1}-\;\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial x^2}$$

$$- \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^3} \frac{\partial\psi}{\partial x^3}\Big) \, d^4x$$

което възпроизвежда *уравнението на Шрьодингер* (Schr0̈dinger) за една свободна нерелативистична квантова частица,

$$0 = \frac{\delta S}{\delta\psi(x^0, \mathbf{x})} \tag{3.2}$$

$$= i \, \frac{\partial\psi}{\partial x^0}(x^0, \mathbf{x}) + \frac{\partial^2\psi}{(\partial x^1)^2}(\cdots)$$

$$+ \, \frac{\partial^2\psi}{(\partial x^2)^2}(\cdots) + \frac{\partial^2\psi}{(\partial x^3)^2}(x^0, \mathbf{x}) \, ,$$

$$0 = \frac{\delta S}{\delta\overline{\psi(x^0, \mathbf{x})}}$$

$$= \; -i \, \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t}(x^0, \mathbf{x}) + \frac{\partial^2\overline{\psi}}{(\partial x)^2}(\cdots)$$

$$+ \, \frac{\partial^2\overline{\psi}}{(\partial y)^2}(\cdots) + \frac{\partial^2\overline{\psi}}{(\partial z)^2}(x^0, \mathbf{x}) \, .$$

Ние в последствие ще се върнем отново към това уравнение във връзка с основните принцип на квантовата механика и в момента ни интересува единствено полевия аспект свързан с теоремата на Ньотер.

Обръщаме най-напред внимание на това че варираната функция $\psi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ е комплексно значна и поради това действието S (3.1) е фактически действие за две реални функции, реалната и имагинерна части, $\mathrm{Re}\,\psi$ и $\mathrm{Im}\,\psi$, на $\psi(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Вместо обаче да разглеждаме зависимостта на S от $\mathrm{Re}\,\psi$ и $\mathrm{Im}\,\psi$ ние сме разгледали, еквивалентно, зависимостта на S от ψ и комплексно спрегнатата функция $\overline{\psi}$. Втора забележка е, че S взема реални стойности, ако $\psi(x^0, \mathbf{x})$ изчезва върху границата на Ω, тъй като тогава с интегриране по части получаваме

$$\int\limits_{\Omega} i\, \overline{\psi(x^0, \mathbf{x})}\, \frac{\partial \psi}{\partial x^0}(x^0, \mathbf{x})\, d^4$$

$$= - \int\limits_{\Omega} i\, \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x^0}(x^0, \mathbf{x})}\, \psi(x^0, \mathbf{x})\, d^4 x\,.$$

Последното свойство на реалност на действието S е пряко следствие от това, че в S участват модулите на ψ и нейните производни. Ето защо не е изненада, че при трансформацията

$$\psi'(x,y,z,t) = e^{i\varepsilon}\,\psi(x,y,z,t)\,,$$
$$\overline{\psi'(x,y,z,t)} = e^{-i\varepsilon}\,\overline{\psi(x,y,z,t)} \quad (3.3)$$

действието S (3.1) е инвариантно,

$$S\big\{\psi(x^0,\mathbf{x}),\overline{\psi(x^0,\mathbf{x})}\big\}$$
$$= S\big\{\psi'(x^0,\mathbf{x}),\overline{\psi'(x^0,\mathbf{x})}\big\}\,. \qquad (3.4)$$

Колкото и елементарна да е горната трансформация, тя поражда изключително важен запазващ се функционал за решенията на уравнението на Шрьодингер (3.2). Това е така наречената *хилбертова норма* на функцията ψ,

$$\mathcal{Q} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(x^0,\mathbf{x})}\,\psi(x^0,\mathbf{x})\,d^3x \qquad (3.5)$$

(или по-точно, нейния квадрат). Съответният ньотеров ток е

$$
\begin{aligned}
J^0 &= \overline{\psi(x^0,\mathbf{x})}\,\psi(x^0,\mathbf{x})\,,\\
J^k &= \overline{\psi(x^0,\mathbf{x}))}\,\frac{\partial\psi}{\partial x^k}(x^0,\mathbf{x})\\
&\quad - \overline{\frac{\partial\psi}{\partial x^k}(x^0,\mathbf{x})}\,\psi(x^0,\mathbf{x})\,, \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

$k = 1, 2, 3$. Читателят може непосредствено да се убеди, че при полагането (3.6) закона за запазване

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\,J^0+\frac{\partial}{\partial x^1}\,J^1+\frac{\partial}{\partial x^2}\,J^2+\frac{\partial}{\partial x^3}\,J^3 = 0$$

следва пряко от уравнението на Шрьодингер (3.2) (и неговото комплексно спрегнато уравнение).

Прието е симетрията свързана с трансформацията (3.3) да се нарича *вътрешна симетрия*, тъй като тя не е свързана с трансформация в пространството и времето, а само засяга стойностите на полето. Освен това тази симетрия се нарича също и *глобална калибровачна симетрия*, значението на което ще поясним по-нататък в точка 4. Още едно название на трансформацията (3.3), което е широко разпространено в литературата е $U(1)$–*глобална симетрия*. Да припомним, че $U(1) = \{e^{i\varepsilon} | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ е групата на комплексните числа по модул 1, което пояснява произхода на последния термин.

4. Абелеви калибровъчни теории

Следното елементарно математическо наблюдение е довело до грандиозни последствия във физиката и по-специално в теория на полето и описанието на фундаменталните взаимодействия. В сила е тъждеството:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\, e^{if(\mathrm{x})}\, \psi(\mathrm{x}) = e^{if(\mathrm{x})} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + i \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}(\mathrm{x}) \right) \psi(\mathrm{x}) \tag{4.1}$$

за производна комплексна функция $\psi(\mathrm{x})$ и реална функция $f(\mathrm{x})$. Следователно, ако положим

$$\nabla_{\mu} := \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - iA_{\mu}(\mathrm{x})\,, \qquad \nabla'_{\mu} := \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - iA'_{\mu}(\mathrm{x})\,, \tag{4.2}$$

$$\psi'(\mathrm{x}) \,=\, e^{if(\mathrm{x})}\,\psi(\mathrm{x})\,,$$

$$A'_\mu(\mathrm{x}) \,=\, A_\mu(\mathrm{x}) + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \qquad (4.3)$$

то получаваме

$$\nabla'_\mu\,\psi'(\mathrm{x}) \,=\, e^{if(\mathrm{x})}\,\nabla_\mu\psi(\mathrm{x})\,. \qquad (4.4)$$

Въведените оператори ∇_μ (4.2) се наричат ковариантни производни и имат красива геометрична интерпретация на която ще се спрем по-подробно в следващия параграф.

Нека сега да разтълкуваме значението на горните математически тъждества. Преди всичко, внимателният читател е разпознал вече втората от формули (4.3), която задава калибровачна трансформация на електромагнитни потенциали (2.5)

А относно първата от формули (4.3), тя пък обобщава трансформацията на вътрешна симетрия (3.3), с която се запознахме на примера на уравнението на Шрьодингер. Разликата е, че в (3.3) факторът $e^{i\varepsilon}$ е константа и не зависи от точките на пространство-времето, което се заменя с променливия фактор $e^{if(\mathrm{x})}$ в (4.3). По такъв начин, с направения математически трик ние осигуряваме инвариантност на действието на Шрьодингер, при трансформация $\psi'(\mathrm{x}) = e^{if(\mathrm{x})}\psi(\mathrm{x})$, ако го разширим полевата система, като включим в нея и електромагнитните потенциали.

Нека формулираме по-общо направения извод. Нека

$$S_0\{\phi, \overline{\phi}\} = \int_\Omega L\Big(\phi(\mathrm{x}), \overline{\phi(\mathrm{x})}, \frac{\partial\phi(\mathrm{x})}{\partial\mathrm{x}}, \overline{\frac{\partial\phi(\mathrm{x})}{\partial\mathrm{x}}}, \mathrm{x}\Big) \times d^4x \tag{4.5}$$

е действие за една комплексна функция $\phi(\mathrm{x})$ (която може дори да е и векторно значна). Да предположим, че лагранжиантът L има инвариантността

$$L\Big(\phi(\mathrm{x}), \overline{\phi(\mathrm{x})}, \frac{\partial\phi(\mathrm{x})}{\partial\mathrm{x}}, \overline{\frac{\partial\phi(\mathrm{x})}{\partial\mathrm{x}}}, \mathrm{x}\Big) \tag{4.6}$$

$$= L\Big(\phi'(\mathrm{x}), \overline{\phi'(\mathrm{x})}, \frac{\partial\phi'(\mathrm{x})}{\partial\mathrm{x}}, \overline{\frac{\partial\phi'(\mathrm{x})}{\partial\mathrm{x}}}, \mathrm{x}\Big)$$

при трансформацията $\phi'(\mathrm{x}) = e^{i\varepsilon}$

$\phi(\mathrm{x})$. Тогава разширеното действие

$$S\Big\{\phi(\mathrm{x}), \overline{\phi(\mathrm{x})}, A(\mathrm{x})\Big\} = \int\limits_{\Omega} L\Big(\phi(\mathrm{x}), \overline{\phi(\mathrm{x})}, \big(\nabla_\mu \phi\big)_{\mu=0}^{3}, \big(\overline{\nabla_\mu \phi}\big)_{\mu=0}^{3}, \mathrm{x}\Big)\, d^4x\,, \tag{4.7}$$

където $\nabla_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} - iA_\mu$ (както в (4.2)), е инвариантно при трансформацията $\phi'(\mathrm{x}) = e^{if(\mathrm{x})}\,\phi(\mathrm{x})$, $\overline{\phi'(\mathrm{x})} = e^{-if(\mathrm{x})}\,\overline{\phi(\mathrm{x})}$, и $A'_\mu(\mathrm{x}) = A_\mu(\mathrm{x}) + \dfrac{\partial f}{\partial x^\mu}$.

Получаваме проста универсална рецепта за включване на електромагнитното поле към всяко действие с глобална $U(1)$–симетрия (термина виж в края на параграф ??):

$$\boxed{\text{всички частни производни на полетата трябва да се заменят с ковариантни производни.}} \tag{4.8}$$

Сега ще дадем допълнителна мотивация от физиката за горната рецепта (4.8). Освен, че използването на ковариантните производни води до естествена намеса на калибровачните трансформации на електромагнитните потенциали (2.5), трансформацията $\psi'(\mathrm{x}) = e^{if(\mathrm{x})}\,\psi(\mathrm{x})$ за една вълнова функция, участваща в уравнението на Шрьодингер, се налага също съвсем естествено. Нека си припомним, че съгласно квантово механичната интерпретация единствено модулът $\left|\psi(x^0, \mathbf{x})\right|^2$ на вълновата функция $\psi(x^0, \mathbf{x})$ има пряка физическа интерпретация, като плътност на вероятността да намерим частицата в точката $\mathbf{x}$ на пространството в момента от време x^0. По такъв начин изменението на фазата на вълновата функция ψ с фактор $e^{if(\mathrm{x})}$, което не е съпроводено с изменението на плътността на вероятността, е равносилно на въвеждане на фиктивни електромагнитни потенциали $\dfrac{\partial f}{\partial x^\mu}$ с нулеви интензитети $F_{\mu\nu}$ и следователно, не свързани с наблюдаеми физични ефекти. Тази дискусия допълнително ни навежда на мисълта как всъщност можем да сравняваме полевите стойности в различни точки на пространство–времето и води до дълбока и красива, геометрична интерпретация на ковариантните производни, като задаващи инфинитезимален паралелен пренос. На тази допълнителна интерпретация ще се спрем по-подробно в следващия параграф.

В края на настоящия параграф ще приведем още една физична мотивация за рецепта (4.8). Това ни дава повод и да дадем още един пример на фундаментално полево уравнение във физиката –

уравнението на Дирак (Paul Dirac):

$$i\gamma^{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,\psi(\mathrm{x}) - m\,\psi(\mathrm{x}) \;=\; 0\,, \qquad (4.9)$$

$$\psi(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathrm{x}) \\ \psi_2(\mathrm{x}) \\ \psi_3(\mathrm{x}) \\ \psi_4(\mathrm{x}) \end{pmatrix},$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Както се вижда, това е едно уравнение за векторно значна, комплексна функция $\psi(\mathrm{x})$, наречена *спинорна функция на Дирак* (spinor function). Уравнението (4.9) е записано в матрична форма с помощта на матриците γ^μ, които носят името *матрици на Дирак.* Въпросите свързани с уравнението на Дирак заемат цели монографии, което значително надхвърля нашите цели тук. Ние ще се спрем единствено на аспекта свързан с действието, което възпроизвежда уравнението на Дирак и неговата калибровачна $U(1)$–симетрия. Едно такова действие е:

$$
\begin{aligned}
& S_0\big\{\psi(\mathrm{x}),\overline{\psi}(\mathrm{x})\big\} && (4.10)\\
&= \int\limits_{\Omega} \overline{\psi}(\mathrm{x})\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\psi(\mathrm{x})\, d^4x\,,
\end{aligned}
$$

където $\overline{\psi}(\mathrm{x})$ е така наречената *дираково спрегната спинорна функция*, определена като

$$
\begin{aligned}
& \overline{\psi}(\mathrm{x}) := \psi(\mathrm{x})^+\,\gamma^0 && (4.11)\\
& \equiv \left(\overline{\psi_1(\mathrm{x})}\,,\ \overline{\psi_2(\mathrm{x})}\,,\ \overline{\psi_3(\mathrm{x})}\,,\ \overline{\psi_4(\mathrm{x})}\right)\gamma^0
\end{aligned}
$$

$$= \left(\overline{\psi_1(\mathrm{x})}\,,\ \overline{\psi_2(\mathrm{x})}\,,\ -\overline{\psi_3(\mathrm{x})}\,,\ -\overline{\psi_4(\mathrm{x})}\right).$$

Прилагайки рецептата (4.8) към S_0 ние получаваме

$$\begin{aligned} & S\big\{\psi(\mathrm{x}),\overline{\psi}(\mathrm{x}),A(\mathrm{x})\big\} \qquad (4.12) \\ &= \int\limits_{\Omega} \overline{\psi}(\mathrm{x})\left(i\gamma^{\mu}\,\nabla_{\mu}+m\right)\psi(\mathrm{x})\,d^4x \\ &= S_0\big\{\psi(\mathrm{x}),\overline{\psi}(\mathrm{x})\big\} \\ &+ \int\limits_{\Omega} A_{\mu}(\mathrm{x})\,J^{\mu}\big(\psi(\mathrm{x}),\overline{\psi}(\mathrm{x})\big)\,d^4x\,, \end{aligned}$$

където $J^{\mu}\big(\psi(\mathrm{x}),\overline{\psi}(\mathrm{x})\big)$ се оказва точно ньотеровия ток съответстващ на глобалната $U(1)$–симетрия на S_0,

$$\begin{aligned} & S_0\big\{\psi(\mathrm{x}),\overline{\psi}(\mathrm{x})\big\} \\ &= S_0\big\{e^{i\varepsilon}\psi(\mathrm{x}),e^{-i\varepsilon}\overline{\psi}(\mathrm{x})\big\} \end{aligned}$$

и той се задава по формулата

$$J^{\mu}\big(\psi(\mathrm{x}), \overline{\psi}(\mathrm{x})\big) \,=\, \overline{\psi}(\mathrm{x})\,\gamma^{\mu}\,\psi(\mathrm{x})\,. \tag{4.13}$$

По такъв начин J^{μ} изпълнява диференциалния закон за запазване (2.7) и представлява естествен кандидат за четиривектор на тока на електрични заряди описвани от уравнението на Дирак. Освен това при прилагането на рецептата (4.8) действието S_0 приема добавка точно от вида (2.6), както се предписва от класическата електродинамика. Последното следва от спецификата на действието S_0, в което първите производни на полетата участват линейно и не е вярно за действия с лагранжиани от вида (??). Ето защо избрахме именно уравнението на Дирак за да илюстрираме тази допълнителна съгласуваност на предписанието (4.8) с други закони на класическата електродинамика.

Забележка: Във физиката е прието пред израза за тока в (4.13) да се поставя допълнителен числов фактор e, който се явява характеристика на електричния заряд на полето описвано от уравнението на Дирак,

$$J^{\mu}\big(\psi(\mathrm{x}),\overline{\psi}(\mathrm{x})\big) \;=\; e\,\overline{\psi}(\mathrm{x})\,\gamma^{\mu}\,\psi(\mathrm{x})\,. \tag{4.14}$$

За да се съгласува това с (4.8) ние следва да модифицираме и определението за ковариантна производна

$$\nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\, e\, A_\mu(\mathrm{x})\,. \qquad (4.15)$$

И така, пълното действие на спинорно поле на Дирак с електромагнитно поле е

$$\begin{aligned}
& S_{\mathrm{Tot}}\big\{\psi(\mathrm{x}), \overline{\psi}(\mathrm{x}), A(\mathrm{x})\big\} \qquad (4.16)\\
&= S_{\mathrm{EM}}\big\{A(\mathrm{x})\big\}\\
&+ S\big\{\psi(\mathrm{x}), \overline{\psi}(\mathrm{x}), A(\mathrm{x})\big\}\\
&= S_{\mathrm{EM}}\big\{A(\mathrm{x})\big\} + S_0\big\{\psi(\mathrm{x}), \overline{\psi}(\mathrm{x})\big\}\\
&+ \int\limits_\Omega A_\mu\, J^\mu\, d^4x\,.
\end{aligned}$$

Това е именно действието, с което се започва и в квантовата електродинамика за описание на електрона и по такъв начин, то има претенцията да описва голяма част от свойствата на заобикалящата ни природа и в частност, всички химични явления. Във формула (4.16) се открива и адитивния принцип за строене на действието: $S_{\rm Tot}$ е сума на действията S_0 и $S_{\rm EM}$, които съответстват на свободни, невзаимодействащи полета, съответно, поле на Дирак и електромагнитно поле; последния член в $S_{\rm Tot}$ е от вида (2.6) и описва добавката на взаимодействието.

Ще завършим настоящия параграф с кратка забележка поясняваща термина "абелеви", в заглавието на параграфа. Ако приложим последователно две калибровачни трансформации

$$\begin{aligned}\psi(\mathrm{x}) &\longmapsto e^{if_1(\mathrm{x})}\,\psi(\mathrm{x}) \\ &\longmapsto e^{if_2(\mathrm{x})}\,e^{if_1(\mathrm{x})}\,\psi(\mathrm{x})\,,\end{aligned}$$

то забелязваме, че резултата не зависи от последователността, тъй като $e^{if_2(\mathrm{x})}e^{if_1(\mathrm{x})} = e^{if_1(\mathrm{x})}e^{if_2(\mathrm{x})}$. Това е свойството на комутативност или още наречено, *абелевост*, в математиката. Поради това и разгледаните тук $U(1)$–калибровачни теории са в класа на *абелевите калибровачни модели.*

5. Как да си приготвим теория: общи съвети

Нека $\phi(\mathrm{x}) = \big(\phi_a(\mathrm{x})\big)_{a=1}^{N}$ е многокомпонентно (т.е., векторно значно), комплексно поле. (Така, всяка компонента $\phi_a(\mathrm{x})$ е комплексно-значна функция.) Да разгледаме следното обобщение на лагранжиана (**??**):[39]

$$\begin{aligned} & L\Big(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\Big) \\ = \ & \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} \overline{\frac{\partial \phi_a}{\partial x_\mu}}(\mathrm{x}) \, \frac{\partial \phi_a}{\partial x^\mu}(\mathrm{x}) \\ \equiv \ & \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}(\mathrm{x}) \, , \, \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}(\mathrm{x}) \right\rangle \, , \end{aligned} \tag{5.1}$$

където

$$\langle \Phi, \Psi \rangle := \sum_{a=1}^{N} \overline{\Phi_a} \, \Psi_a \, ,$$

е ермитово (хилбертово) скаларно произведение в $\mathbb{C}^N \ni \Phi = \big(\Phi_a\big)_{a=1}^N$, $\Psi = \big(\Psi_a\big)_{a=1}^N$. Векторното

[39]конвенцията (5.10) тук прилагаме само към пространствени индекси, докато по a, по преценка на автора, ще пишем сумата експлицитно

пространството $\mathbb{C}^N$, в което полето $\phi(\mathrm{x})$ приема стойности, ще означим абстрактно с

$$V^{(N)} := \mathbb{C}^N$$

и то може да се нарече пространство на вътрешните степени на свобода или още, вътрешно пространство. В последствие, ние ще стигнем до идеята, че над всяка точка x на пространство–времето ние следва да разглеждаме независимо копие на $V^{(N)}$, което може да се означи с $V_{\mathrm{x}}^{(N)}$. (над точката x).

Лагранжианът (5.1) има естествена вътрешна симетрия

$$L\Big(\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\Big) \tag{5.2}$$

$$= L\Big(U\phi(\mathrm{x}), \frac{\partial U\phi}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\Big)\,,$$

където $U\phi(\mathrm{x}) := \Big(\sum_{b=1}^{N} U_{ab}\,\phi_b(\mathrm{x})\Big)_{a=1}^{N}$ и $U = \big(U_{ab}\big)_{a,b=1}^{N}$ е *унитарна* матрица,[40]

$$U^+ U \,=\, 1 \,=\, U\,U^+$$
$$\Longrightarrow\quad \big\langle U\Phi, U\Psi\big\rangle = \big\langle \Phi, \Psi\big\rangle\,.$$

Множеството на унитарни $(N\times N)$–матрици е затворено спрямо операцията умножение на матрици, съдържа единичната матрица и обратната на всяка от принадлежащите му матрици. Тоест, това множество е група и тя се бележи с $U(N)$. За-

[40] $U^+ \;\equiv\; \overline{U}^T \;\equiv\; \big(\overline{U_{ba}}\big)_{a,b=1}^{N}$ е ермитово спрегнатата матрица. Унитарните матрици са основен елемент от апарата на квантовата механика. Да си припомним, че $U = e^{iT}$ е унитарна матрица, ако T е ермитова, т.е., $T^+ = T$.

това и горната вътрешна симетрия (5.2) се нарича $U(N)$*–симетрия* (глобална калибровачна). Очевидно, тази симетрия е неабелева, тъй като при последователно прилагане на две трансформации $\phi(\mathrm{x}) \mapsto U_j\phi(\mathrm{x})$ за $\ = 1,2$ резултатите по принцип са различни, $U_1U_2\phi(\mathrm{x}) \neq U_2U_1\phi(\mathrm{x})$.

Първата идея за въвеждане на вътрешна неабелева симетрия в теория на елементарните частици е на Паули (Wolfgang Pauli), който допуска, че поради близките маси на протона и неутрона, както и тяхната еквивалентност при силните (ядрени) взаимодействия. това е всъщност една частица в две различни вътрешни състояния. Така, той предлага протона и неутрона да се описват от едно двукомпонентно поле с $U(2)$–вътрешна симетрия. Това поле приема стойности в $V^{(2)}$, като компонентата $\phi_1(\mathrm{x})$ по първия базисен вектор $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ отговаря за протона, а компонентата $\phi_2(\mathrm{x})$ по втория базисен вектор $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ отговаря за неутрона. $U(2)$–симетрията обаче указва, че всеки друг избор e_1' и e_2' на ортонормиран репер в $V^{(2)}$ задава равноправно описание.

Естествено е да се опитаме да направим симетрията (5.2) от глобална – локална симетрия, т.е., зависеща от точките на пространство–времето

$$\phi'(\mathrm{x}) \,=\, U(\mathrm{x})\,\phi(\mathrm{x})\,, \tag{5.3}$$

където $U(\mathrm{x})$ е функция на точките на пространство–времето, чийто стойности са унитарни матрици. Това е равносилно на свободен избор на ортонормирани репери в $V^{(N)}$ по отделно за всяка точка от пространство–времето и е пряко обобщение на ситуацията в абелевите калибровачни теории. Допълнително физично съображение идва от специалната теория на относителността, според която съществуват причинно не свързани събития и за такива няма основание в теорията да има съгласуваност в избора на реперите на вътрешните пространства $V^{(N)}$. Приведените съображения показват, че на практика ние можем да говорим за независими копия на $V_{\mathrm{x}}^{(N)}$ на вътрешното пространство над всяка точка x на пространство-времето, които макар и да са абстрактно изоморфни по между си, не са канонично отъждествени едно с друго. Това е езика на така наречените разслоени пространства (разслоения), с теорията на които читателя може допълнително да се запознае в [?].

В съответствие с трансформацията (5.3) тъждеството (4.1) се обобщава до

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Big(U(\mathrm{x})\, \phi(\mathrm{x}) \Big) \tag{5.4}$$

$$= U(\mathrm{x}) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + U(\mathrm{x})^{-1} \frac{\partial U(\mathrm{x})}{\partial x^{\mu}} \right) \phi(\mathrm{x})\,.$$

Следователно, ако на мястото на (4.2) и (4.3) положим

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \; &:= \; \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - iA_{\mu}(\mathrm{x})\,, \\ \nabla'_{\mu} \; &:= \; \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - iA'_{\mu}(\mathrm{x})\,, \qquad (5.5) \\ A'_{\mu}(\mathrm{x}) \; &= \; A_{\mu}(\mathrm{x}) \\ &\quad - \; i\, U(\mathrm{x})^{-1} \frac{\partial U(\mathrm{x})}{\partial x^{\mu}} \qquad (5.6) \end{aligned}$$

то получаваме

$$\nabla'_{\mu}\, \phi'(\mathrm{x}) \; = \; U(\mathrm{x})\, \nabla_{\mu} \phi(\mathrm{x})\,. \tag{5.7}$$

С тези полагания ние директно обобщаваме принципа (4.8) в рецепта за получаване на теории с локална $U(N)$–симетрия от теории с глобална $U(N)$–симетрия. Както и в абелевия случай, това става с цената на въвеждане на нови полета A_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), чийто стойности сега се оказват $(N \times N)$–матрици.

Нека да приведем сега едно геометрично тълкуване на нововъведените матрично значни полета A_μ. Те възникват във връзка с понятието за производна. При вземане на обикновена производна на поле по направление на някакъв вектор

$\mathrm{a} = (a^\mu)$ ние образуваме границата

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\phi(\mathrm{x} + \varepsilon \mathrm{a}) - \phi(\mathrm{x})}{\varepsilon} = a^\mu \frac{\partial \phi(\mathrm{x})}{\partial x^\mu}$$

В последната формула обаче става изваждане на стойности на полета-та в две различни точки, а ние ве-че допуснахме, че векторните прос-транства $\mathbb{C}^N$ над различни точки могат да имат независимо избрани репери. Следователно, нужно ни е средство за сравняване и такава ро-ля играе понятието *паралелен пре-нос*. Нека допуснем, че при преход от точка x към $\mathrm{x}+\varepsilon\mathrm{a}$ по съединява-щата ги отсечка $\varepsilon\mathrm{a}$ ($\mathrm{a} = (a^\mu)$) стой-ността $\phi(\mathrm{x})$ на полето в x се пренася с умножение на някаква унитарна матрица (унитарността е за да може ортонормиран репер да се изобрази отново в ортонормиран репер):

$$\phi(\mathrm{x}) \overset{\substack{\text{папалелен}\\\text{пренос}}}{\longmapsto} \left(\widehat{1}+i\varepsilon\, a^{\mu}\, A_{\mu}(\mathrm{x})+O(\varepsilon^{2})\right)$$

$$\times\, \phi(\mathrm{x})\,,$$

където пренасящата матрица е записана като $\widehat{1}+i\varepsilon\, a^{\mu}\, A_{\mu}(\mathrm{x})+O(\varepsilon^{2})$, тъй като в границата $\varepsilon \to 0$, тя трябва да съвпада с единичната матрица $\widehat{1}$. Условието за унитарност ни дава,

$$\begin{gathered}\left(\widehat{1}+i\varepsilon\, a^{\mu}\, A_{\mu}(\mathrm{x})+O(\varepsilon^{2})\right)^{+}\\ =\, \left(\widehat{1}+i\varepsilon\, a^{\mu}\, A_{\mu}(\mathrm{x})+O(\varepsilon^{2})\right)^{-1}\\ =\, \widehat{1}-i\varepsilon\, a^{\mu}\, A_{\mu}(\mathrm{x})^{+}+O(\varepsilon^{2})\\ \widehat{1}-i\varepsilon\, a^{\mu}\, A_{\mu}(\mathrm{x})+O(\varepsilon^{2})\,=\\ \Longleftrightarrow\quad A_{\mu}(\mathrm{x})^{+}\,=\,A_{\mu}(\mathrm{x})\,,\end{gathered}$$

т.е., матрицата $A_\mu(\mathrm{x})$,задаваща инфинитезималния паралелен пренос по оста μ, трябва да е унитарна за всяко $\mu = 0, 1, 2, 3$. Обръщаме внимание, че последното допълнително условие за ермитовост на A_μ напълно се съгласува с трансформационния закон (5.6), тъй като лесно се показва, че добавката $-i\,U(\mathrm{x})^{-1}$ $\dfrac{\partial U(\mathrm{x})}{\partial x^\mu}$ е има винаги ермитови стойности, ако $U(\mathrm{x})$ приема унитарни стойности.

В светлината на въведената интерпретация на матричната функция $A_\mu(\mathrm{x})$, като задаваща инфинитезималния паралелен пренос по оста μ за всяко $\mu = 0, 1, 2, 3$, ние достигаме до следната геометрична интерпретация на ковариантната производна, която е пояснена на диаграмата:

$$\begin{tikzcd}
 & \phi(\mathrm{x}+\varepsilon\mathrm{a}) \\
 & - \\
\phi(\mathrm{x}) \arrow[r, mapsto, "\substack{\text{папалелен}\\ \text{пренос}}"] & \Gamma(\mathrm{x};\varepsilon)\,\phi(\mathrm{x}) \\
\mathrm{x} \arrow[u, mapsto] & \mathrm{x}+\varepsilon\,\mathrm{a} \arrow[uuu, mapsto, bend right=90]
\end{tikzcd}$$

$$\text{където}\ \ \Gamma(\mathrm{x};\varepsilon) \\ := \ \left(\widehat{1} + i\varepsilon\, a^{\mu}\, A_{\mu}(\mathrm{x}) + O(\varepsilon^2)\right).$$

С други думи, диференчното частно над точка $\mathrm{x} + \varepsilon\mathrm{a}$ се образува от стойността $\phi(\mathrm{x} + \varepsilon\mathrm{a})$ на полето в $\mathrm{x} + \varepsilon\mathrm{a}$ и пренесената му стойност над точката x. Така, получаваме

$$\frac{\phi(\mathrm{x}+\varepsilon \mathrm{a}) \;-\; \Gamma(\mathrm{x};\varepsilon)\,\phi(\mathrm{x})}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \; a^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,\phi(\mathrm{x})\,.$$

С това достигаме до красивата геометрична интерпретация на допълнителните полета $A_{\mu}(\mathrm{x})$, които се въвеждат за да се постигне локална калибровачна симетрия: тези полета задават инфинитезимално понятие за паралелен пренос в пространството на вътрешните степени на свобода на изходните полета.

Ние искаме да продължим по-нататък аналогията с електромагнетизма и да направим полетата $A_{\mu}(\mathrm{x})$ динамични, със своя собствена част в пълния лагранжиан. Тази добавка към лагранжиана трябва да обобщава (2.3) и така, преди всичко възниква въпроса какъв е геометричния смисъл на полетата $F_{\mu\nu}(\mathrm{x})$ в новата интерпретация. Както отбелязахме, $\nabla_\nu \phi(\mathrm{x})$ изменението на полето $\phi(\mathrm{x})$ по посока на оста μ спрямо паралелния пренос на стойността му. Да пресметнем разликата от две такива изменения, направени последователно по две различни оси, при размяна на реда на осите:

$$\begin{aligned}
&\nabla_\mu\big(\nabla_\nu \phi(\mathrm{x})\big) \\
&- \nabla_\nu\big(\nabla_\mu \phi(\mathrm{x})\big) \\
&= -i\, F_{\mu\nu}\left(A(\mathrm{x}), \frac{\partial A(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}}\right) \phi(\mathrm{x})\,,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

където $F_{\mu\nu}$ се задава с израза

$$F_{\mu\nu}\Big(A(\mathrm{x}),\frac{\partial A(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}}\Big) = \frac{\partial A_\nu(\mathrm{x})}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu(\mathrm{x})}{\partial x^\nu} - i\left(A_\mu(\mathrm{x})\,A_\nu(\mathrm{x}) - A_\mu(\mathrm{x})\,A_\nu(\mathrm{x})\right). \tag{5.9}$$

Първото забележително следствие от горното пресмятане е, че в дясната страна на (5.8) не участват производни на $\phi(\mathrm{x})$. Фактически, тази страна би била равна на нула, ако $A_\mu = 0$ за всяко μ, което изразява симетрията на частните производни $\frac{\partial^2\phi}{(\partial x^\mu)(\partial x^\nu)} = \frac{\partial^2\phi}{(\partial x^\nu)(\partial x^\mu)}$. Второ, изразът (5.9) за $F_{\mu\nu}$ възпроизвежда (2.2) в случая когато $A_\mu(\mathrm{x})$ са числови функции. Така, намираме и желаната геометрична интерпретация на $F_{\mu\nu}$ заедно с търсеното обобщение в неабелевия случай. Системата от полетата $F_{\mu\nu}$ се нарича *тензор на кривината*. Може да се покаже също, че при пренос по инфинитезимален затворен контур представляващ успоредник с връх в точката x и страни отсечки по направления εa и εb се получава:

$$\begin{aligned}
&\phi(\mathrm{x}) \longmapsto \exp\Big(i(-\varepsilon\, b^\nu)\, A_\nu(\mathrm{x}+\varepsilon \mathrm{b})\Big)\\
&\times\ \exp\Big(i(-\varepsilon\, a^\mu)\, A_\mu(\mathrm{x}+\varepsilon\mathrm{a}+\varepsilon \mathrm{b})\Big)\\
&\times\ \exp\Big(i\varepsilon\, b^\nu\, A_\nu(\mathrm{x}+\varepsilon \mathrm{a})\Big)\\
&\times\ \exp\Big(i\varepsilon\, a^\mu\, A_\mu(\mathrm{x})\Big)\,\phi(\mathrm{x})\\
&=\ \Big(\widehat{1} - i\varepsilon^2\, a^\mu\, b^\nu\, F_{\mu\nu} + O(\varepsilon^3)\Big)\,\phi(\mathrm{x})
\end{aligned}$$

и в съответствие с това, $F_{\mu\nu}$ задава отклонението от идентитета, в първия ненулев порядък, при пренос по инфинитезимален успоредник с връх в точката x разпънат от осите μ и ν.

Друго забележително свойство на тензора на кривината е неговата трансформация при калибровачни трансформации (5.6):

$$F_{\mu\nu}\left(A'(\mathrm{x}), \frac{\partial A'(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}}\right) \tag{5.10}$$

$$= U(\mathrm{x})\, F_{\mu\nu}\left(A(\mathrm{x}), \frac{\partial A(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}}\right) U(\mathrm{x})^{-1}.$$

Един кратък извод на (5.10) се получава, като запишем (5.7) и (5.8) в операторен вид:

$$\nabla'_{\mu} = U(\mathrm{x})\, \nabla_{\mu}\, U(\mathrm{x})^{-1}$$

$$\Longrightarrow \ \nabla'_\mu \nabla'_\nu - \nabla'_\nu \nabla'_\mu$$
$$= \ U(\mathrm{x}) \big(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu \big) U(\mathrm{x})^{-1} \, .$$

С това, вече сме готови да дадем неабелевия аналог на лагранжиана в действието (2.3)

$$L_{\mathrm{YM}}\Big(A(\mathrm{x}), \frac{\partial A(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}} \Big)$$
$$= \ \frac{1}{4} \int\limits_{\Omega} \mathrm{Tr}\big(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \big) \, d^4 x$$
$$= \ L_{\mathrm{YM}}\Big(A'(\mathrm{x}), \frac{\partial A'(\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}} \Big) \, , \quad (5.11)$$

където $\mathrm{Tr}(M) = \sum\limits_{a=1}^{N} M_{a,a}$ е следата на матрица $M = \big(M_{a,b} \big)_{a,b= \ ,1}^{N}$. Лагранжианът (5.11) (и действието, което той поражда) носи имената на Янг и Милс – неговите откриватели, заедно и с уравненията на Лагранж–Ойлер определени от него.

Съгласно съвременния стандартен модел на елементарните частици, наблюдаваните взаимодействия между частиците се описват от комбинация от абелеви и неабелеви калибровачни полета $A_\mu(\mathrm{x})$.

Приложение А. Лагранжиан за уравнението на Шрьодингер

/...тук ще бъде преместена частта от настоящата точка 3 свързана с уравнението на Шрьодингер.../

Приложение Б. Уравнение на Дирак

/...тук ще бъде преместена частта от настоящата точка 4 свързана с уравнението на Дирак.../

Приложение В. Кривина и лагранжиан на Янг–Милс

/...тук ще бъде преместена по-техническата част от настоящата точка 5 свързана с лагранжиана на Янг–Милс.../