КТП и ЕЧ, 21.01.2021

1. Групи на Лоренц и Поанкаре

а) на Лоренц / Lorentz

$$O(\underbrace{D-1}_{\#+},\underbrace{1}_{\#-}) \cong O(\underbrace{1}_{\#+},\underbrace{D-1}_{\#-})$$

$$= \left\{ \Lambda = (\Lambda^{\nu}_{\mu})_{\mu,\nu=0,\dots,D-1} \,\middle|\, \cancel{\sum_{\mu',\nu'}} \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} \eta_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu\nu} \right\}$$

конвенция за сумиране по повтарящи се горен и долен индекс

$$(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(-1,+1,\dots,+1)$$

или $= \mathrm{diag}(+1,\underbrace{-1,\dots,-1}_{D-1})$

$$SO(D-1,1) := \{\Lambda \in O(D-1,1) \mid \det \Lambda = 1\}$$

специална група на Лоренц

$$O(D-1,1) \supsetneq SO(D-1,1) \supsetneq SO_0(D-1,1)$$

$$O(D-1,1) \supsetneq O_{\uparrow}(D-1,1) \supsetneq SO_0(D-1,1)$$

$$SO_0(D-1,1) = SO(D-1,1) \cap O_{\uparrow}(D-1,1)$$

$$O_{\uparrow}(D-1,1) := \{\Lambda \in O(D-1,1) \mid \Lambda^0_0 > 0\}$$

ортохронна група на Лоренц

$SO_0(D-1,1)$ Собствена (свързана) група на Лоренц

$$\frac{SO(D-1,1)}{SO_0(D-1,1)} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{1, J_p, J_t, J_pJ_t\}$$

J_pJ_t: пълна инверсия при четно D

J_p: пространствено отражение

J_t: обръщане на времето

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/Streater_R.F.,_Wightman_A.S.,_PCT,_Spin_And_Statistics,_And_All_That_%5b2000%5d.pdf

- стр. 7 - 21

При унитарните представления в КТП

J_p, J_t са по правило "антиунитарни"

По теоремата на Вигнер за "квантовите симетрии"

https://en.wikipedia.org/wiki/Wigner%27s_theorem

$$U : SO_0(D-1,1) \to U(\mathcal{H}) \quad \text{- унитарната група на хилб. пр-во на състояния}$$
$$\Lambda \mapsto U(\Lambda)$$

така, че $U(\Lambda_1)\,U(\Lambda_2) = \xi_{\Lambda_1,\Lambda_2}\, U(\Lambda_1 \Lambda_2)$

където $\xi_{\Lambda_1,\Lambda_2} = \pm 1$.

Следствие: Може да се постигне $\xi_{\Lambda_1,\Lambda_2} = 1$, ако се премине към

$$\begin{tikzcd}
Spin(D-1,1) \arrow[d] \arrow[r] & U(\mathcal{H}) \\
SO_0(D-1,1) \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "\pm 1 \updownarrow +1"] &
\end{tikzcd}$$

"спинорна група на Лоренц"

$$SO_0(D-1,1) \cong SL(2,\mathbb{C})$$ при $D = 4$

Крайномерните неприводими представления на спинорната група на Лоренц $(SL(2,\mathbb{C}))$ се класифицират от две неотриц. полуцели числа $j_1, j_2 \in \{0, 1/2, 1, 3/2, \dots\}$

https://en.wikipedia.org/wiki/Representation_theory_of_the_Lorentz_group

Важни специални случаи:

- $(0,0)$ - скаларно представяне
- $(\frac{1}{2},0) \oplus (0,\frac{1}{2})$ - спинорно представяне (Дирак)
- $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ - векторното представяне в $\mathbb{R}^{3,1}$
- $(1,0) \oplus (0,1)$ - електромагнитно поле $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

б) Група на Поанкаре / Poincaré (нехомогенна група на Лоренц; група на псевдо-евклидовите движения)

Обща схема на т.нар. "полу-пряко произведение"

https://en.wikipedia.org/wiki/Semidirect_product

$$\mathcal{P} = SO(D-1,1) \ltimes \mathbb{R}^{D-1,1}$$

$$\underset{\cup}{\Lambda} \quad \underset{\cup}{a}$$

$$(\Lambda, a) \; : \; x \mapsto \Lambda x + a$$

$$(\Lambda_1, a_1)\big((\Lambda_2, a_2)(x)\big) = (\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2 x + a_2)$$

$$(\Lambda_1 \Lambda_2, \; a_1 + \Lambda_2 a_1)(x) = \Lambda_1 (\Lambda_2 x + a_2) + a_1$$

$$\Rightarrow \quad (\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_1 \Lambda_2, \; a_1 + \Lambda_1 a_2)$$

Обобщава се за $Spin(D-1,1) \ltimes \mathbb{R}^{D-1,1}$ – спинорна група на Поанкаре

$$(\tilde{\Lambda}, a)$$

$$(\tilde{\Lambda}_1, a_1)(\tilde{\Lambda}_2, a_2) = (\tilde{\Lambda}_1 \tilde{\Lambda}_2, \; a_1 + \tilde{\Lambda}_1(a_2))$$

където за $\tilde{\Lambda} \in Spin(D-1,1)$ и $a \in \mathbb{R}^{D-1,1}$

$\tilde{\Lambda}(a) \in \mathbb{R}^{D-1,1}$ е действието на $Spin(D-1,1)$ върху $\mathbb{R}^{D-1,1}$, посредством проекцията $Spin(D-1,1) \twoheadrightarrow SO_0(D-1,1)$.

$$\boxed{\text{Кинематичният модел на една свободна релативистка частица е неприводимо унитарно представяне на (спинорната) група на Поанкаре.}}$$

2. Класификация на неприводимите унитарни представяния на (спинорната) група на Поанкаре с положителна енергия = кинематична класификация на свободни частици.

а) За унитарните представяния на непрекъснати групи

Barut A.O., Raczka R., Theory of Group Representations and Applications
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/Barut_A.O.,_Raczka_R.,_Theory_of_Group_Representations_and_Applications.pdf
точка 5.1 (+) - общи изисквания за непрекъснатост във безкрайно-мерния случай,
точка 11.1 (+) - следствие за представяния на генераторите

Elliott J.P., Dawber P.G., Symmetry in Physics (Vulums 1,2)
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/Elliott_J.P.,_Dawber_P.G.,_Symmetry_in_Physics_Volume_1-Principles_and_Simple_Applications.pdf
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/Elliott_J.P.,_Dawber_P.G.,_Symmetry_in_Physics-Further_Applications.pdf

Основно общо изискване за непрекъснатост на унитарни представяния

$$G \longrightarrow U(\mathcal{H})$$
$$g \longmapsto U(g)$$

- слабата непрекъснатост: $\forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H}:\ g \mapsto \langle \Phi | U(g) \Psi \rangle$ са непрекъснати по $g \in G$

$\Rightarrow$ $\exists$ генератори X - като ермитови оператори в обща, инвариантна деф. област $\subseteq \mathcal{H}$
Там те са съществено самоспрегнати и комутиращите имат съвместен спектър. (Теория на Гординг)

https://en.wikipedia.org/wiki/G%C3%A5rding_domain (както и цитата по-горе)

$\longrightarrow$ Математическата основа за представянето на непрекъснати групи.

б) Неприводимост:

$\nexists\, \mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$ т.че $U(g)(\mathcal{H}_1) \subseteq \mathcal{H}_1$

ненулево затворено подпр. $\forall g \in G$

Ако $\exists$ такова $\mathcal{H}_1$, то $U(g)\restriction_{\mathcal{H}_1}$ е само по себе си представяне – нарича се подпредставяне

<u>Теорема</u> Ако $\mathcal{H}_1$ е подпредставяне, то и $\mathcal{H}_1^\perp$ е подпредст. и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$ – пряка сума на представяния.

(Това е само за унитарни представяния !!!)

В общия случай, такива представяния се наричат разложими.

Разложими $\Rightarrow$ приводими

Неприводими $\Rightarrow$ неразложими

За унитарни представяния са $\Leftrightarrow$, но за по-общи – не.

в) Неприводимите представяния на гр. на Поанкаре – унитарни с полож. ен-я

$$U(\tilde\Lambda_1, a_1)\, U(\tilde\Lambda_2, a_2) = U(\tilde\Lambda_1 \tilde\Lambda_2, a_1 + \tilde\Lambda_1 a_2)$$

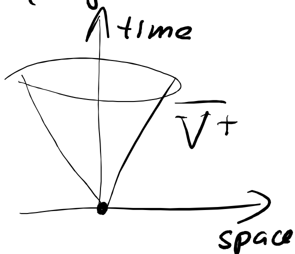
В частност: $U(1, a_1)\, U(1, a_2) = U(1, a_1 + a_2)$

За краткост: $U(a) := U(1, a)$

От обща теория $\Rightarrow$ $U(a) = e^{i a^\mu \hat P_\mu}$ $\quad \sum_\mu$

и $\hat P_\mu$ - взаимно комутиращи ермитови (същесв. самосир.) оператори със съвместен спектър

$$\mathrm{Spec}(\hat P_0, \dots, \hat P_3) \subseteq \overline{V}_+ = \{p \mid p^2 \le 0,\ p_0 \ge 0\}$$



↳ това е условието за положителност на енергията

Има единствено неприводимо тривиално представяне:
$U(\tilde\Lambda, a)\Psi = \Psi \quad \forall \Psi \in \mathcal{H}$: $\mathcal{H} = \mathbb{C}\Psi$ - вакуумно пр.

Теорема на Вигнер за класификацията

https://en.wikipedia.org/wiki/Wigner%27s_classification

Невакуумните неприводими унитарни представяния на спинорната група на Поанкаре с положителна енергия се определят с точност до еквивалентност от две реални числа: маса $m \in [0, \infty)$ и спин s.
В случая, когато $m > 0$, $s \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$ (полуцяло, неотриц.)
При $m = 0$ има два подслучая за s: а) полуцял, неотриц.
в този случай се нарича "helicity" б) непрекъснат

3. Доказателство и конструкция на класификацията на Вигнер

а) Структура на собствените подпространства

Нека за $p = (p\ ) \in \overline{V^+}$:

$$\mathcal{H}_p = \{ \Psi \in \tilde{\mathcal{H}} \mid \hat{P}_\mu \Psi = p_\mu \Psi \}$$

пространството включващо и т.нар. "несобствени вектори"

<u>Следствие 1</u> Ако $p \neq p'$ то $\mathcal{H}_p \perp \mathcal{H}_{p'}$

- понеже са собствени подпространства на ермитови оператори за различни собствени стойности. □

По-общо, за $S \subseteq \overline{V^+}$ - измеримо подмножество

нека $\Pi(S)$ е спектрален проектор на $(\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_{D-1})$

и нека $\mathcal{H}_S = \Pi(S)\mathcal{H}$

Тогава $\mathcal{H}_S = \int_{p\in S}^{\oplus} d\mu(p)\, \mathcal{H}_p$ - пряк интеграл (интегрална пряка сума).

https://en.wikipedia.org/wiki/Direct_integral

и ако $S_1 \cap S_2 = \phi$, то $\mathcal{H}_{S_1} \perp \mathcal{H}_{S_2}$

$$\mathcal{H}_{S_1 \dot{\cup} S_2} = \mathcal{H}_{S_1} \oplus \mathcal{H}_{S_2}$$

- понеже са разпънати от взаимно ортогонални $\mathcal{H}_p$.

<u>Лема 2.</u> За $\forall\, \tilde{\Lambda} \in Spin(D-1,1)$: $U(\tilde{\Lambda}, 0)\mathcal{H}_p \subseteq \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda} p}$

Доказателство. Нека $\Psi' := U(\tilde{\Lambda},0)\Psi$ – защо $\Psi' \in \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}p}$?

- $\Psi \in \mathcal{H}_p \iff \hat{P}_\mu \Psi = p_\mu \Psi \iff f(\hat{P}_\mu)\Psi = f(p)\Psi \quad \forall f$

  $\iff U(1,a)\Psi \left(\equiv e^{i a^\mu \hat{P}_\mu}\Psi\right) = e^{i a\cdot p}\Psi \quad \forall a \in \mathbb{R}^{D-1,1}$

- $U(1,a)\Psi' = e^{i a\cdot p'}\Psi'$ за $p' := \tilde{\Lambda}p$ и $\forall a$? – остава за док.

– наистина:

$$\Rightarrow U(1,a)\Psi' = \underbrace{U(1,a)U(\tilde{\Lambda},0)}_{U(1\tilde{\Lambda},a)}\Psi$$

$$= U(\tilde{\Lambda},0)U(1,a'), \text{ където } a' := \tilde{\Lambda}^{-1}a$$

$$\Rightarrow U(1,a)\Psi' = U(\tilde{\Lambda},0)\underbrace{U(1,a')\Psi}_{e^{ia'\cdot p}\Psi}$$

$$\Rightarrow U(1,a)\Psi' = e^{ia'\cdot p}\underbrace{U(\Lambda,0)\Psi}_{\Psi'}$$

$$\Rightarrow U(1,a)\Psi = e^{ia'\cdot p}\Psi$$

Но $a'\cdot p = (\tilde{\Lambda}^{-1}a)\cdot p = a\cdot(\tilde{\Lambda}p) = a\cdot p'$

– понеже $\tilde{\Lambda}$ действа псевдо-ортогонално: $(\tilde{\Lambda}a)\cdot(\tilde{\Lambda}b) = a\cdot b$

$$\Rightarrow U(1,a)\Psi = e^{ia\cdot p'}\Psi \quad \forall a$$

- $\Rightarrow \hat{P}_\mu \Psi' = p'_\mu \Psi'$ за $p' = \tilde{\Lambda}p$, т.е. $\Psi' \in \mathcal{H}_{p'}$. □

Следствие. 3 $U(\tilde{\Lambda},0)\mathcal{H}_S \subseteq \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}S}$

б) "Малката група на Лоренц" / "little group"

Това е: $Spin_0(D-1,1)_p := \{ \tilde{\Lambda} \in Spin(D-1,1) \mid \tilde{\Lambda} p = p \}$

└ стабилизатор / stabilizer на p

Лема 4 (а) За $\tilde{\Lambda} \in Spin_0(D-1,1)_p$: $U(\tilde{\Lambda},0)\mathcal{H}_p \subseteq \mathcal{H}_p$

– т.е. $\mathcal{H}_p$ е (унитарно) представяне на малката група

(б) За да бъде $\mathcal{H}$ неприводимо представяне на групата на Поанкаре е необходимо $\mathcal{H}_p$ да е неприводимо представяне на малката група.

Доказателство. (а) От Лема 3: $U(\tilde{\Lambda},0)\mathcal{H}_p \subseteq \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}p}$, но $\tilde{\Lambda}p = p$.

б) Нека $0 \neq \mathcal{H}_p' \subsetneq \mathcal{H}_p$ е подпредставяне за малката гр па.

Тогава $\mathcal{H}' := \overline{\mathrm{Span}} \{ U(\tilde{\Lambda},a)\mathcal{H}_p' \mid \forall (\tilde{\Lambda},a) \in$ гр. на Поанкаре $\}$

пораждано с линейни комбинации и затваряне

ще е подпредставяне на $\mathcal{H}$ за групата на Поанкаре.

Но $0 \neq \mathcal{H}' \subsetneq \mathcal{H}$ очевидно; понеже:

$$U(\tilde{\Lambda},a)\mathcal{H}_p' = U(\tilde{\Lambda},0)\underbrace{U(1,a')\mathcal{H}_p'}_{e^{ia'\cdot p}\mathcal{H}_p' \subseteq \mathcal{H}_p'} \subseteq U(\tilde{\Lambda},0)\mathcal{H}_p' \subseteq \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}p}, \quad a' = \tilde{\Lambda}^{-1}a$$

$\Rightarrow$ единствения начин да достигнем вектори от $\mathcal{H}_p \setminus \mathcal{H}_p'$ е чрез $\Lambda \in$ малката група (т.е., $\tilde{\Lambda}p = p$). Но $\mathcal{H}_p'$ е подпредставяне за малката група – тя не го изкарва извън себе си.

$\Rightarrow \mathcal{H}_p' = \mathcal{H}_p$. □

Извод. $\mathcal{H}_p$ е неприводимо унитарно предст. за малката група в) Носителя на представянето в $\overline{V^+}$

$$\mathrm{supp}_0 \mathcal{H} := \{ p \in \overline{V^+} \mid \mathcal{H}_p \neq 0 \}^{\cancel{\text{closure}}}$$

<u>Лема. 5</u> (a) $Spin(D-1, D)(\mathrm{supp}_0 \mathcal{H}) \subseteq \mathrm{supp}_0 \mathcal{H}$

тоест, supp $\mathcal{H}$ е (затворено) подмножество на $\overline{V^+}$, което е лоренц-инвариантно.

(b) Ако $S \subseteq \overline{V^+}$ е лоренц-инвариантно $\left(Spin(D-1,1)(S) \subseteq S\right)$, то $\mathcal{H}_S$ е подпредставяне на групата на Поанкаре.

<u>Доказателство.</u> (a) Преди всичко, $\overline{V^+}$ е самото то лоренц-инвариантно.

Ако $\mathcal{H}_p \neq 0$, то и $\mathcal{H}_{\tilde{\Lambda} p} \neq 0$, понеже $\mathcal{H}_{\tilde{\Lambda} p} \supseteq U(\tilde{\Lambda}, 0)\, \mathcal{H}_p \neq 0$.

$\Rightarrow \{ p \in \overline{V^+} \mid \mathcal{H}_p \neq 0 \}$ е лоренц-инвариантно.

(b) От формулите: $\mathcal{H}_S = \int^{\oplus}_{p \in S} d\mu(p)\, \mathcal{H}_p$, $U(\tilde{\Lambda}, a)\, \mathcal{H}_p \subseteq \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda} p}$

следва, че $U(\tilde{\Lambda}, p)\, \mathcal{H}_S \subseteq \mathcal{H}_S$, ако $\tilde{\Lambda}(S) \subseteq S$. □

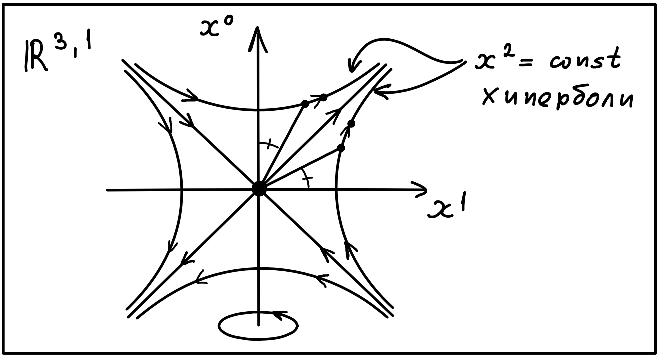
<u>Следствие 6</u> $\mathrm{supp}_0 \mathcal{H}$ е една орбита при действието на групата на Лоренц в $\mathbb{R}^{D-1,1}$.

Напомняме понятието "орбита" при действие на група G върху множество M:

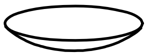
– орбита на $p \in M$ е $Gp := \{ p' \in M \mid \exists g \in G : p' = gp \}$

тоест, орбита е всяко минимално по отношение на включването подмножество на M, което е инвариантно под действието на G.

г) Геометрични факти



(1) Някои понятия: $\Gamma_a := \{ x \in \mathbb{R}^{3,1} \mid x^2 = a^2 \}$

- при $a = 0$ – светлинен конус  Γ_0
- при $a > 0$ – свързан хиперболоид  Γ_a ← De Sitter space
- при $a < 0$ – два свързани хипеболоида  Γ_a^+ ← масов хиперболоид

 Γ_a^-

$$\Gamma_a = \Gamma_a^+ \,\dot{\cup}\, \Gamma_a^-$$

$$\Gamma_a^{\pm} := \{ p \in \Gamma_a \mid \pm p_0 \geq 0 \}$$

(2) Орбитите на групата на Лоренц при действието ѝ в $\mathbb{R}^{D-1,1}$ са следните:

- $\{0\}$
- $\Gamma^+_{-m^2}$, за $m \geq 0$
- $\Gamma^-_{-m^2}$, за $m \geq 0$
- Γ_{m^2}, за $m > 0$

От тях:

първите две лежат в $\overline{V^+}$

последните две не пресичат $\overline{V^+}$

Случая на орбитата $\{0\}$ отговаря на вакуумното представяне.

д) <u>Теорема</u> (Първа формулировка на класификацията на Вигнер.)

Невакуумните неприводими унитарни представяния $\mathcal{H}$ на спинорната група на Поанкаре се фиксират с точност до еквивалентност от едно реално число $m \in [0, \infty)$ и едно неприводимо унитарно представяне $\mathcal{H}_p$ на малката група на Лоренц $Spin(D-1,1)_p$ за някое $p \in \Gamma^+_{-m^2}$

<u>Доказателство.</u> $\Rightarrow$ (Определянето на m и $\mathcal{H}_p$).

– това следва от Следствие 6 и извода от точка "б)".

$\Leftarrow$ (Еднозначно конструиране на $\mathcal{H}$ по m и $\mathcal{H}_p$.)

- Общо сведение за действие на група G върху множество M.

Ако $p, p' \in M$ са в една орбита на G, т.е., $p' = gp$, то $G_{p'} = g\, G_p\, g^{-1}$ – т.е., стабилизаторите са спрегнати (в частност, изоморфни).

Наистина: $h' \in G_{p'} \iff h'p' = p' \iff h'gp = gp$

$$\iff g^{-1}h'g\,p = p \iff g^{-1}h'g \in G_p$$

Затова $h \in G_p \iff h' \in G_{p'}$ за $h' = g h g^{-1}$, $h = g^{-1} h' g$

- Нека приложим резултата от предния пункт за групата на Лоренц, $G = Spin(D-1,1)$ и $M = \Gamma^+_{-m^2}$. В този случай, M е една орбита (т.е. за $\forall\, p, p' \in \Gamma^+_{-m^2}$, $\exists\, \tilde{\Lambda} \in Spin(D-1,1)$ т.че: $p' = \tilde{\Lambda} p$; казва се още че $\Gamma^+_{-m^2}$ е хомогенно пространство за $Spin(D-1,1)$). Нека още:

– фиксираме точка $p^{(0)} \in \Gamma^+_{-m^2}$;

гладка зависимост искаме

– за $\forall p \in \Gamma^+_{-m^2}$ да изберем $\tilde{\Lambda}_p : p^{(0)} \mapsto p = \tilde{\Lambda}(p)\, p^{(0)}$;

– полагаме: $F := \mathcal{H}_{p^{(0)}}$ – хилбертово пространство;

– за $\forall p \in \Gamma^+_{-m^2}$: $\hat{V}(p) := U(\tilde{\Lambda}_p, 0)\big|_{\mathcal{H}_{p(0)}} : F \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_p$ – унитарен.

Тогава:

$$\mathcal{H} = \int^{\oplus}_{\Gamma^+_{-m^2}} d\mu(p)\,\mathcal{H}_p \xrightarrow[\int^{\oplus}_{\Gamma^+_{-m^2}} d\mu(p)\,\hat{V}(p)]{\sim} \int^{\oplus}_{\Gamma^+_{-m^2}} d\mu(p)\,\overbrace{F}^{\mathbb{C}\otimes F}$$

$$\cong \underbrace{\left(\int^{\oplus}_{\Gamma^+_{-m^2}} d\mu(p)\,\mathbb{C}\right)}_{L^2(\Gamma^+_{-m^2};\, d\mu)} \otimes F \cong L^2(\Gamma^+_{-m^2} \to F;\, d\mu)$$

където $L^2(\Gamma^+_{-m^2} \longrightarrow F;\, d\mu)$

$$:= \left\{ \begin{array}{l} \psi : \Gamma^+_{-m^2} \longrightarrow F \\ \quad p \longmapsto \psi(p) \end{array} \,\middle|\, \|\psi\| := \int_{\Gamma^+_{-m^2}} d\mu(p) \langle \psi(p) | \psi(p) \rangle_F \right\}$$

задава модел на $\mathcal{H}$ определен от m и F.

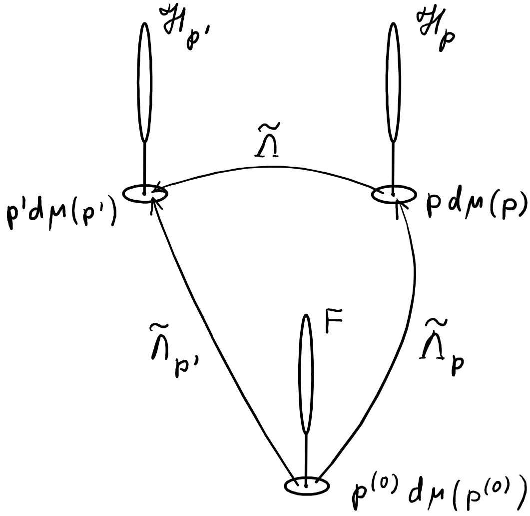
Лема 7 $\quad U(\tilde{\Lambda}, a)\psi =: \psi'$ се определя по:

$$\psi'(p') = e^{i a\cdot p'} \rho_{p'}(\tilde{\Lambda}^{-1}_{p'})\, \rho_p(\tilde{\Lambda})\, \rho_{p^{(0)}}(\tilde{\Lambda}_p)\, \pi_p(\tilde{\Lambda})(\psi(p))$$

където $p' = \tilde{\Lambda} p$,

$$\pi_p(\tilde{\Lambda}) := U(\underbrace{\tilde{\Lambda}^{-1}_{p'}\,\tilde{\Lambda}\,\tilde{\Lambda}_p}_{\in\, Spin_0(D-1,1)_{p^{(0)}}}) : F \longrightarrow F \text{ унитарно}$$

$$\rho_p(\Lambda) = \frac{d\mu(\tilde{\Lambda} p)}{d\mu(p)}, \quad \text{за } \forall p,\ \forall \tilde{\Lambda}.$$



https://encyclopediaofmath.org/wiki/Induced_representation

https://en.wikipedia.org/wiki/Induced_representation

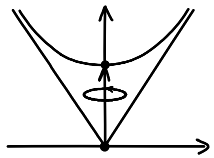
https://mathworld.wolfram.com/InducedRepresentation.html

http://sporadic.stanford.edu/bump/group/gind4_2.html

https://ncatlab.org/nlab/show/induced+representation е) Коя е малката група на Лоренц?

- $p^2 = -m^2 < 0$ За $p^{(0)} = (1, 0, \dots, 0)$:

$Spin(D-1,1)_{p^{(0)}} = Spin(D-1)$ (спинорната) група на въртене в системата на покой.



При $D-1 = 3$ – крайномерните неприводими предст. на $Spin(3) = SU(2)$ са

$(s) := \mathbb{R}^{2s+1}$ – представления с $\hat{J}_3 \in \{-s, \dots, +s\}$

за $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ – спин

- за $p^2 = -m^2 = 0$, $p^{(0)} = (1, 1, 0, \dots, 0)$

– нарушава се и ротац. симетрия (като при аксиалната калибровка)

$Spin(D-1,1)_p \cong$ Група на евклидови движения на $\mathbb{R}^{D-2}$

обобщава се при квадриката на Клайн-Дирак / Klein-Dirac наричана още конформна компактификация.

https://ncatlab.org/nlab/show/conformal+compactification

Цитира Sect. 4.2: https://arxiv.org/pdf/math-ph/0412039.pdf

Базира се на Част 1 в:
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/renormalization2020/notes/Nikolov_N.M.,_Dissertation_2002.pdf

Следва преставяне на файл:

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020/N.N._Slides_on-Are_elementary_particles_elementary.pdf

3. Връзка полета – частици

а) Аксиомите на Уайтман – резюме

I. Данни: (1) Хилбертово пространство $\mathcal{H}$,
гъсто линейно подпростр. $D \subseteq \mathcal{H}$, $\overline{D} = \mathcal{H}$

<u>Забележка:</u> Пространството на тест-функции е друго и ще го означаваме с друг "шрифт": $\mathcal{D}$, но за по-сигурно ще пишем вместо $f \in \mathcal{D} \iff f$ - т.ф. (тест-функция)
вместо $u \in \mathcal{D}' \iff u$ - о.ф. (обобщена функция)

(2) Унитарно представяне на собствената (свързаната) спинорна група на Поанкаре

$$U(\tilde{\Lambda}, a) : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{унит.}]{} \mathcal{H} \quad \forall \tilde{\Lambda} \in Spin(D-1,1),\ a \in \mathbb{R}^{D-1,1}$$

Забележка: още едно различно "D" – размерността на пр.-вр.

(3) $\forall f$ - т.ф. са определени оператори $\phi_A[f] : D \xrightarrow[\text{лин.}]{} D$
$A \in \{1, \dots, N\}$, N – крайно или безкрайно

(4) Зададени са и "четности" $p_A \in \{0, 1\}$

1 – ϕ_A е ферми; 0 – ϕ_A е бозонно

и "взаимни четности": $p_{A,B} \in \{0,1\}$
При "нормална статистика": $p_{A,B} = p_A p_B \mod 2$

(5) Зададено е реално линейно представяне

$$\pi : Spin(D-1,1) \to Mat_N(\mathbb{R})$$
$$\tilde{\Lambda} \mapsto \left(\pi(\tilde{\Lambda})^B_A\right)_{N \times N}$$

(6) Зададен е единичен вектор $\Omega \equiv |0\rangle \equiv |\Omega) \in D$ – "вакуум"

II. Аксиоми (условия за данните)

(1) За Поанкаре-симетрията

- $U(\tilde{\Lambda}, a)$ е унитарно представяне с положителна енергия (но възможно - приводимо !!!)
- $U(\tilde{\Lambda}, a)\,\Omega = \Omega$ за $\forall (\tilde{\Lambda}, a)$

  и ако $\Psi \in \mathcal{H}$ е такъв, че: $U(\tilde{\Lambda}, a)\,\Psi = \Psi \;\; \forall (\tilde{\Lambda}, a)$

  тогава $\Psi = \text{const}.\,\Omega$.
- $U(\tilde{\Lambda}, a)(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$
- Нека означим $\underline{f} := (f_A)_{A=1}^{N}$ - в.т.ф. (векторна), за f_A - т.ф.

$$\underline{\phi}[\underline{f}] := \sum_{A=1}^{N} \phi_A[f_A] : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$

и за $\forall (\tilde{\Lambda}, a)$: $\underline{f}^{(\Lambda, a)} := (f'_A)$:

$$f'_A(x) := \sum_{B=1}^{N} \left(\pi(\tilde{\Lambda})^{-1}\right)_A^B f_B\left(\tilde{\Lambda}^{-1}(x-a)\right)$$

Тогава: $\quad U(\tilde{\Lambda}, a)\, \underline{\phi}[\underline{f}]\, U(\tilde{\Lambda}, a)^{-1} = \underline{\phi}[\underline{f}^{(\tilde{\Lambda}, a)}]$

- Искаме ако $p_A \neq p_B$ то $\pi(\tilde{\Lambda})_A^B = 0 \;\; (\forall \tilde{\Lambda})$

  (т.е. бозони се трансформират във бозони, фермиони във фермиони).

Забележка: При "ненормална статистика" p_A не играят роля.

(2) Операторно-значни обобщени функции:

$\forall A \in \{1,\dots,N\}$, $\forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{D}$ съответствието

$$f \text{ - т.ф. } \longmapsto \langle \Phi | \phi_A[f]\, \Psi \rangle \text{ - число } \in \mathbb{C}$$

е обобщена функция (числово-значна)

(3) $\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{D}$, f - т.ф. : $\langle \Phi | \phi_A[f]\, \Psi \rangle = \langle \phi_A[f]\, \Phi | \Psi \rangle$

- ермитовост

(4) Локалност / локална причинност / причинност

За $\forall f_1, f_2$ - т.ф., такива че

ако $f_1(x_1) \neq 0$ и $f_2(x_2) \neq 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 > 0$

- пространствено подобие: $x_1 \sim x_2$

имаме:

$$\phi_A[f_1]\, \phi_B[f_2] - (-1)^{p_{A,B}}\, \phi_B[f_2]\, \phi_A[f_1] = 0$$

(при нормална статистика:

$$\phi_A[f_1]\, \phi_B[f_2] - (-1)^{p_A p_B}\, \phi_B[f_2]\, \phi_A[f_1] = 0$$

т.е, бозони комутират с всички на пространствено-подобни разделения, а фермионите антикомутират по между си.)

(5) Пълнота: линейното подпространство $\mathcal{D}_0$ породено от

Ω, $\phi_{A_1}[f_1] \cdots \phi_{A_n}[f_n]\, \Omega$, когато $n = 1, 2, \dots$, $A_1, \dots, A_n = 1, \dots, N$,

$f_1, \dots, f_n$ - т.ф. - произволни

е гъсто в $\mathcal{H}$. Забележете: $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$

някой път ги полагат равни

Това са пълните аксиоми на Уайтман.

До днес не са известни модели на тези аксиоми в $\mathbb{R}^{3,1}$ ($D=4$), които да не могат да се реализират, като "под-модели" на т. нар. "обобщено-свободни полета".

Такива (т.е., "несвободни") са построени за $D=2$ и $D=3$.

Аксиомите на Уайтман са общоприетия стандарт днес, как трябва да бъде зададен математически всеки модел на квантови полета (над пространството на Минковски).

Свидетелство за това е и формулировката на един от милениум-проблемите:

https://en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Prize_Problems

Yang–Mills existence and mass gap

Оригинален източник: http://www.claymath.org/millennium-problems
http://www.claymath.org/millennium-problems/yang%E2%80%93mills-and-mass-gap

Yang–Mills Existence and Mass Gap:
Prove that for any compact simple gauge group G, a non-trivial quantum Yang–Mills theory exists on R^4 and has a mass gap $\Delta>0$. Existence includes establishing axiomatic properties at least as strong as those cited in[45, 35].

[45] R. Streater and A. Wightman,PCT, Spin and Statistics and all That, W. A. Benjamin, NewYork, 1964

Аксиомите на Уайтман в символичния запис на обобщени ф.

$$\phi_A[f] =: \int_{\mathbb{R}^D} d^Dx\, \phi_A(x)\, f(x)$$

$$U(\tilde{\Lambda}, a)\, \underline{\phi}[\underline{f}]\, U(\tilde{\Lambda}, a)^{-1} = \underline{\phi}[\underline{f}^{(\tilde{\Lambda}, a)}]$$

$$U(\tilde{\Lambda}, a)\, \phi_A(x)\, U(\tilde{\Lambda}, a)^{-1} = \sum_{B=1}^{N} \pi(\Lambda)^A_B\, \phi_A(\Lambda x + a)$$

$$\phi_A[f_1]\, \phi_B[f_2] - (-1)^{A,B}\, \phi_B[f_2]\, \phi_A[f_1] = 0$$

ако $\operatorname{supp} f_1 \sim \operatorname{supp} f_2$

$$\phi_A(x)\, \phi_B(y) - (-1)^{p_{A,B}}\, \phi_B(y)\, \phi_A(x) = 0$$

за $x \sim y$

Пример: електромагнитното квантово поле

$$U(\Lambda, a)\, \hat{F}_{\mu\nu}(x)\, U(\Lambda, a)^{-1} = \cancel{\sum_{\mu', \nu' = 0}^{3}} \Lambda^{\mu'}_{\mu}\, \Lambda^{\nu'}_{\nu}\, F_{\mu'\nu'}(\Lambda x + a)$$

ако приемем сумационната конвенция

Основни постижения на аксиоматичната КТП

1) Теорема на реконструкция на Уайтман

Задаването на системата от разпределения

$$\underbrace{W_{A_1\ldots A_n}(x_1,\ldots,x_n)}_{W_{A_1\ldots A_n}(x_1-x_2,\ldots,x_{n-1}-x_n)} := \langle \Omega \,|\, \phi_{A_1}(x_1)\cdots\phi_{A_n}(x_n)\,\Omega\rangle$$

n-точкова функция на Уайтман
вакуумно средно
корелационна функция

при $\forall n$, $\forall A_1,\ldots,A_n$ - определят еднозначно модела

При това, аксиомите на Уайтман могат да се преформулират изцяло за функциите на Уайтман.

- доказателството - следва от GNS-теоремата

2) Аналитичните свойства на уайтм. функции

$$\exists\, W_{A_1\ldots A_n}(z_1,\ldots,z_n), \quad z_j \in \mathbb{C}^D$$

- аналитични в област инвариантна за комплексната група на Лоренц

и са такива, че

$$W_{A_1\ldots A_n}(x_1,\ldots,x_n) = \lim_{\substack{\mathrm{Im}(z_{j+1}-z_j)\in V^+ \\ \text{и } \to 0 \text{ там}}} W(z_1,\ldots,z_n)$$

Обобщават т. нар. "функции на Сухотски"

$$\frac{1}{t+i0} = \lim_{\mathrm{Im} z \downarrow 0} \frac{1}{z} \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{t+i\varepsilon}$$

Функция на Уайтман за свободно безмасово скаларно поле в $D=4$

$$W(x) := \frac{const}{(x+i0e_0)^2} \equiv \frac{const}{-(x^0+i0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}$$

$$W(x_1, x_2) = W(x_1 - x_1)$$

За масивно: $W(x) = \frac{const}{\sqrt{(x+ie_0)^2}}$ Bessel $K_1\left(im\sqrt{(x+ie_0)^2}\right)$

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/Bogolubov_N.N.,_Logunov_A.A.,_Oksak_A.I.,_Todorov_I.,_General_Principles_of_Quantum_Field_Theory_%5b1990%5d.pdf
Стр. 354

Забележка: Тук се предполага, че $N = \#$ бр. базисни полета $< \infty$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Span}\{\phi_A\}$ =: полевото простр.

$$\pi(\Lambda) = \bigoplus \pi^{(j_1,j_2)}(\Lambda)$$

непр. за Лоренц

$2j_1 + 2j_2$ =: спин на полето =: s

Определение: Нормална връзка спин-статистика

– при нормална статистика: $p_A = 2\,\text{спин}(\phi_A) \bmod 2$

т.е. бозони с цял спин, фермиони с полуцял

3) Теорема за връзка спин-статистика

с точност до теч. унитарна трансф. (гр. на Клайн) може да се постигне нормална връзка спин-стат.

4) Теорема на Борхерс / Borchers

"(взаимната) локалност е транзитивна"

$\Rightarrow$ "клас на Борхерс"

:= $\forall$ операторно-значни о. ф. които задават полета взаимно лок. с изходните

<u>Определение</u>: Тривиална теория := такава, която влиза в класа на Борхерс на свободна (обобщено)

5) Теорема на Рее-Шлидер (Reeh-Schlieder)

"Вакуумът е сепариращ вектор за локални полета"

6) Теорема на Остервалдер-Шрадер

В областта на аналитичност се съдържат

$$\left(\mathbb{E}^D\right)^{\times n}$$ - без никакви съвпадения

$\hookrightarrow$ евклидови грийнови функции (на Швингер)

Строго понятие за "Уиково въртене"

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\text{Функции на Уайтм. в } x \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Фурие}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Уикове рот.}"] & \text{Функц. на Уайтм. в } p \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Уик. рот}"] \\
\text{Функции на Швинг. в } x \arrow[r, leftrightarrow, "\cancel{\text{Фурие}}"] \arrow[ur, phantom] & \text{Евклидови грийнови ф.} \arrow[l, leftrightarrow, bend left, "\text{Фурие + Уик. рот.}"]
\end{tikzcd}
$$

вак. средни на T-произв.

7) Теория на разсейването на Хааг - Руел
Haag - Ruelle

– при т.нар. "mass-gap"