Аксиоми на квантовата физика

1. Квантова статистика
2. Квантова динамика и квантови трансформации
3. Комбинирани (съставни) системи

---

1. Квантова статистика

$\mathcal{A}$ — Алгебра на наблюдаемите

- това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables$(\mathcal{A})$

$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$

$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

$\Downarrow$

A - набл.

States$(\mathcal{A})$

$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$

$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid$ (положителен лин. функционал)

линейни изображения със стойности в $\mathbb{C}$

$\rho(C^*C) \geq 0$ за $\forall C \in \mathcal{A}$

(нормиран) $\rho(\mathbb{1}) = 1$

(реален) $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)} \}$

$\Downarrow$

ρ - съст.

$$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$$

$:=$ средна стойност на наблюдаемата A в състоянието ρ.

Коментари (мотивация и интерпретации):

a) Състоянията би трябвало да определят статистиката (вероятностното разпределение) на всяка наблюдаема. От цялата тази информация ние оставяме само едно число - средната стойност. Защо това е достатъчно?

Защото в $\mathcal{A}$ се намират и степените $A^2, A^3, \dots \Rightarrow$ знаем не само $\langle A \rangle_\rho$

но и $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{втори}}}{\langle A^2 \rangle_\rho}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{трети}}}{\langle A^3 \rangle_\rho}, \dots$ - моменти

Теорема за моментите (moment problem).

Редицата от моменти напълно възстановява статистиката на наблюдаемата A (за $\forall A$). Условията за положителност и нормираност гарантират, че $\forall$ състояние поражда редица $\rho(A), \rho(A^2), \rho(A^3), \dots$, която поражда статистика.

$\mathcal{A}$ — Алгебра на наблюдаемите
- това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$
$\Downarrow$
A - набл.

States$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$
$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid$ (положителен лин. функционал) $\rho(C^*C) \geq 0$ за $\forall\, C \in \mathcal{A}$
(нормиран) $\rho(\hat{1}) = 1$
(реален) $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)} \}$
$\Downarrow$
ρ - съст.

$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$
$:=$ средна стойност на наблюдаемата A в състоянието ρ.

Коментари (мотивация и интерпретации):

б) Структурна теорема за комплексните, положителни, асоц., $*$-алг. с $\hat{1}$:
- те са изоморфни на алгебри от блочно-диагонални матрици

$$\mathrm{Mat}_{k_1,\dots,k_m}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{c|cccc} & k_1 & k_2 & \cdots & k_m \\ \hline k_1 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_2 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ k_m & 0 & 0 & & A_m \end{array} \right\} \underset{*\text{-подалг}}{\subseteq} \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \quad \text{за } n = k_1 + \dots + k_m$$

$$\cong \mathrm{Mat}_{k_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus \mathrm{Mat}_{k_m}(\mathbb{C}) := \{ (A_1,\dots,A_m) \mid A_j \in \mathrm{Mat}_{k_j}(\mathbb{C}) \}$$

$$(A_1,\dots,A_m)\cdot(B_1,\dots,B_m) = (A_1B_1,\dots,A_mB_m)$$

$$(A_1,\dots,A_m)^* = (A_1^*,\dots,A_m^*)$$

Можем да напишем също

$$(A_1,\dots,A_m) = A_1 \oplus \dots \oplus A_m = A_1 \overset{\otimes}{\vee} Z_1 + \dots + A_m \overset{\otimes}{\vee} Z_m$$

където $Z_j = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \hat{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ е самосир. идемпотент (ортогонален проектор)
- централен идемпотент (централни събития)

$\hat{1} = Z_1 + \dots + Z_m$, $Z_j Z_\ell = \delta_{j\ell} Z_j$ - разбиване на $\hat{1}$

$\mathcal{A}$ ← Алгебра на наблюдаемите
– това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра
с единица, която е положителна

Observables$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$
$\Downarrow$
A – набл.

States$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$
$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid$ (положителен лин. функционал) $\rho(C^*C) \geq 0$ за $\forall C \in \mathcal{A}$
(нормиран) $\rho(\mathbb{1}) = 1$
(реален) $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)} \}$
$\Downarrow$
ρ – съст.

$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$
:= средна стойност на наблюдаемата A в състоянието ρ.

Коментари (мотивация и интерпретации):

б) Структурна теорема за комплексните, положителни, асоц., $*$-алг. с $\mathbb{1}$:
– те са изоморфни на алгебри от блочно-диагонални матрици

$$\mathcal{A} := \mathrm{Mat}_{k_1,\dots,k_m}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{array} & \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & A_m \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cccc} k_1 & k_2 & \cdots & k_m \end{array} \end{array} \right\} \underset{*\text{-подалг}}{\subseteq} \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$$

за $n = k_1 + \cdots + k_m$

$$(A_1, \dots, A_m) = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m = A_1 Z_1 + \cdots + A_m Z_m$$

където $Z_j = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbb{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ е самосопр. идемпотент (ортогонален проектор)
– <u>централен</u> идемпотент

$$\mathbb{1} = Z_1 + \cdots + Z_m, \quad Z_j Z_\ell = \delta_{j\ell} Z_j$$ – разбиване на $\mathbb{1}$

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{ C \in \mathcal{A} \mid CA = AC \text{ за } \forall C \in \mathcal{A} \}$$ – център на $\mathcal{A}$

В случая $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{ a_1 Z_1 + \cdots + a_m Z_m \mid a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C} \}$

$\mathcal{A}$ ← Алгебра на наблюдаемите – това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$
$\Downarrow$
A – набл.

States$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$
$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid$ (положителен лин. функционал) $\rho(C^*C) \geq 0$ за $\forall C \in \mathcal{A}$
(нормиран) $\rho(\hat{1}) = 1$
(реален) $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)} \}$
$\Downarrow$
ρ – съст.

$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$
:= средна стойност на наблюдаемата A в състоянието ρ.

Коментари (мотивация и интерпретации):

б) Структурна теорема за комплексните, положителни, асоц., $*$-алг. с $\hat{1}$:
– те са изоморфни на алгебри от блочно-диагонални матрици

$$\mathcal{A} := Mat_{k_1,\dots,k_m}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{c|cccc} k_1 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_2 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ k_m & 0 & 0 & & A_m \\ \hline & k_1 & k_2 & \cdots & k_m \end{array} \right\} \underset{*\text{-подалг}}{\subseteq} Mat_n(\mathbb{C}) \quad \text{за } n = k_1 + \dots + k_m$$

$$(A_1, \dots, A_m) = A_1 \oplus \dots \oplus A_m = A_1 Z_1 + \dots + A_m Z_m$$

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{ C \in \mathcal{A} \mid CA = AC \text{ за } \forall C \in \mathcal{A} \}$$ – център на $\mathcal{A}$

В случая $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{ a_1 Z_1 + \dots + a_m Z_m \mid a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C} \}$

Във физиката тази ситуация възниква при т.нар. "супер-отбор"/super-selection. Няма суперпозиция между вектори на състояния от различни супер-отборни сектори – проекторите Z_j. Например – такава е ситуацията с ел. заряд – централна наблюдаема ($\in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$).

$\mathcal{A}$ — Алгебра на наблюдаемите – това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$
$\Downarrow$
A – набл.

States$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$
$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid$ (положителен лин. функционал) $\rho(C^*C) \geq 0$ за $\forall\, C \in \mathcal{A}$
(нормиран) $\rho(\hat{1}) = 1$
(реален) $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)} \}$
$\Downarrow$
ρ – съст.

$$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$$

$:=$ средна стойност на наблюдаемата A в състоянието ρ.

Коментари (мотивация и интерпретации):

б) Структурна теорема за комплексните, положителни, асоц., $*$-алг. с $\hat{1}$:
– те са изоморфни на алгебри от блочно-диагонални матрици

$$\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_{k_1,\dots,k_m}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \\ \hline 0 & 0 & & A_m \\ \hline \end{array} \\ & \begin{matrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_m \end{matrix} \end{array} \right\} \underset{*\text{-подалг}}{\subseteq} \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$$

за $n = k_1 + \dots + k_m$

Има два екстремални случая:

(1) $k_1 = \dots = k_m = 1$, $\mathrm{Mat}_{1,\dots,1}(\mathbb{C}) = \{ \mathrm{diag}(a_1,\dots,a_m) \mid a_1,\dots,a_m \in \mathbb{C} \}$
$(n = m)$. Това е комутативна алгебра – $\mathcal{A} = \mathcal{Z}(\mathcal{A})$
– само в този случай е.

– класически системи

(2) $m = 1$, $k_1 = n$. Тогава $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{C}.\hat{1}$
– алгебра с тривиален център.
Наричат ги също алгебри от тип фактор $\neq$ фактор-алгебри (quotient algebras) !!!
– причината е, че са като "множители" = "фактори" в тензорни произв. (по-късно за тях).

– неприводими квантови системи

$\mathcal{A}$ — Алгебра на наблюдаемите
- това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables $(\mathcal{A})$
$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$
$\Downarrow$
A - набл.

States $(\mathcal{A})$
$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$
$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid$ (положителен лин. функционал) $\rho(C^*C) \geq 0$ за $\forall\, C \in \mathcal{A}$
(нормиран) $\rho(\hat{1}) = 1$
(реален) $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)} \}$
$\Downarrow$
ρ - съст.

$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$
:= средна стойност на наблюдаемата A в състоянието ρ.

Коментари (мотивация и интерпретации):

в) Спектрално разбиване на наблюдаеми $(A = A^*)$

$$A = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_\ell Q_\ell\,, \quad Q_j = Q_j^* = Q_j^2 \text{ - събития}$$
$$1 = Q_1 + \cdots + Q_\ell$$
$$Q_{j_1} Q_{j_2} = \delta_{j_1 j_2} Q_{j_1}\,, \quad j_1, j_2 = 1, \ldots, \ell$$
$$\mathrm{Spec}(A) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\} \text{ - спектър}$$

Забележка: Ако $\mathbb{C}[A] = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{\hat{1}, A, A^2, \ldots\} \subseteq \mathcal{A}$
комутативна $*$-подалгебра

Тогава $Q_j \in \mathbb{C}[A]$,
т.е. Q_j = функции от A.

Илюстрация от файл: - стр. 134 - 140
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QuantumInformation2020/NN_Quantum_Probability_2018.pdf

- в този пример $\mathcal{A} = \mathrm{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \{ A : \Omega \to \mathbb{C} \}$

$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, $A: \omega_1 \mapsto a_1, \ \ldots, \ \omega_n \mapsto a_n$ (стойности в $\mathbb{C}$)

$$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \longleftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \longleftrightarrow A$$
$$\mathrm{Mat}_{11\ldots1}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C} \cong \mathrm{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$$

Забележка за безкрайно-мерния случай
- математически има две чести алтернативи
  - работа с т. нар. ограничени наблюдаеми (ограничен спектър)
    Те образуват т. нар. C^*-алгебри. Това са алгебри с норма (normed / Banach algebras), $\|A\| \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$
    C^*-тъждеството: $\|A^* A\| = \|A\|^2$

    Има теорема (Gelfand)

    $\forall$ абелева C^*-алг. $\mathcal{A} \cong C_0(X)$ - алг. на непрекъснати функции върху локално-компактно, хаусдорфово, тополог. пр-во X, които са $= 0$ при граница $\to \infty$.
    Като $\mathcal{A}$ има $\mathbb{1}$ $\iff$ X е компактно

    https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand_representation

    1-1 съответствие м/у
    комут. алг. $\longleftrightarrow$ тополог. пр-ва
    Алгебра $\longleftrightarrow$ Геометрия
    - Алгебрична геометрия
    - некомутативна геометрия "квантова"

    Усложнена версия на C^*-алгебрите са т. нар. алгебри на Фон Нойман / von Neumann, които са безкрайно-мерните аналог на матр. алгебри

  - работа с неограничени оператори върху пред-Хилб. пр-ва (подход на Уайтман / Wightman)

$\mathcal{A}$ — Алгебра на наблюдаемите
- това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables($\mathcal{A}$)
$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

$\Downarrow$

A - набл.

States($\mathcal{A}$)
$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$
$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid$ (положителен лин. функционал)
$\rho(C^* C) \geq 0$ за $\forall C \in \mathcal{A}$
(нормиран лин. функционал)
$\rho(\hat{1}) = 1 \}$

$\Downarrow$

ρ - съст.

$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$
:= средна стойност на наблюдаемата A в състоянието ρ.

Коментари (мотивация и интерпретации):

г) За състоянията

Твърдение: States($\mathcal{A}$) е изпъкнало подмножество на на лин. пр-во на $\forall$ линейни функционали над $\mathcal{A}$.
дуално пространство

- презентация от стр. 57 - 59

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QuantumInformation2020/NN_Quantum_Probability_2018.pdf

В контекста на изпъкналото множество States($\mathcal{A}$)

изпъкнала комбинация
||
Смес на състояния: $\rho = q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2$, $q_1, q_2 \in [0,1]$
$q_1 + q_2 = 1$

екстремална точка
pure ||
Чисто състояние = непредставимо в нетривиална смес

В квантовата механика: чистите състояния се представят от вектори на състояния, а смесите от т. нар. "матрици на плътността" (density matrix)

Представяне на състоянията с вектори на състояния в Хилбертови пространства

а) Пред-хилб. простр. (pre-Hilbert spaces)

<u>Опр.</u> $\mathcal{H}$ – вект. пр. над $\mathbb{C}$

$$\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{C} : (\Psi_1, \Psi_2) \mapsto \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle$$

анти лин. — линейност

$$\langle a_1\Psi_1 + b_1\Phi_1 | a_2\Psi_2 + b_2\Phi_2\rangle = \bar{a}_1 a_2 \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle + \bar{a}_1 b_2\langle\Psi_1|\Phi_2\rangle + \bar{b}_1 a_2\langle\Phi_1|\Psi_2\rangle + \bar{b}_1 b_2\langle\Phi_1|\Phi_2\rangle$$

и също : $\forall\,\Phi\in\mathcal{H} : \ \|\Phi\|^2 := \langle\Phi|\Phi\rangle \geq 0$ и $= 0 \iff \Phi = 0$.

За Хилб. пр-во се иска още и пълнота.

<u>Твърдение</u> Ако $\mathcal{H}$ е пред-Хилб. пр-во, то

$$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \text{ т.че } \forall \Phi,\Psi\in\mathcal{H} \ \langle\Phi|A\Psi\rangle = \langle B\Phi|\Psi\rangle \}$$

е $*$-алгебра, със $*$-операция $A^* := B$ – то е единствено.

<u>Док.-схема:</u> 1) Защо B е единствен?

2) $(A_1A_2)^* = A_2^*A_1^* \Longleftarrow \langle\Phi|A_1A_2\Psi\rangle = \langle A_1^*\Phi|A_2\Psi\rangle = \langle A_2^*A_1^*\Phi|\Psi\rangle$

3) От 2) $\Rightarrow$ $Op^*(\mathcal{H})$ е подалгебра на $End(\mathcal{H}) := \{A \mid A:\mathcal{H}\to\mathcal{H} \text{ е лин.}\}$

Също от 2) $\Rightarrow$ $Op^*(\mathcal{H})$ е $*$-алг.. $\square$

Представяне на $*$-алг. в пред-хилб. пр-во

$*$-морфизъм $\quad \pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$

$$\begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \rotatebox{90}{$\in$} \\ A \end{array} \mapsto \left(\pi(A) : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин}]{} \mathcal{H} \right)$$

т.че. $\quad \langle \Phi | \pi(A) \Psi \rangle = \langle \pi(A^*) \Phi | \Psi \rangle$

Кога $\exists$ представяне π_ρ за съст. ρ

т.че $\quad \rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho = \langle \Phi_\rho | \pi_\rho(A) \Phi_\rho \rangle$

за спец. вектор $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$

Представяне на състоянията с вектори на състояния в Хилбертови пространства

б) Опр. $*$-представяне на $*$-алг. $\mathcal{A}$ с $\hat{1}$ в пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}$ – това е морфизъм

$$\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$$

Опр. Цикличен вектор $\Omega \in \mathcal{H}$ на представянето π е такъв за който

$$\pi(\mathcal{A})\,\Psi := \{\pi(A)\,\Psi \mid A \in \mathcal{A}\} \overset{\text{искаме}}{=} \mathcal{H}$$

Представяния с цикличен вектор се наричат циклични (cyclic representations).

в) Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал
Gelfand-Neimark-Segal / GNS

https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark_theorem

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$

$\exists$ пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}_\rho$, представяне $\pi_\rho : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и цикличен вектор $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ такъв, че

$$\forall A \in \mathcal{A} : \quad \rho(A) = \langle \Psi_\rho \mid A\,\Psi_\rho \rangle$$

формула на Дирак за средните стойности

(В частност, $\|\Psi_\rho\|^2 = \langle \Psi_\rho \mid \hat{1}\,\Psi_\rho \rangle = \rho(\hat{1}) = 1$.)

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:
Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ – представяне с цикличен вектор Ψ са такива, че $\rho(A) = \langle \Psi \mid A\,\Psi \rangle$ за $\forall A \in \mathcal{A}$, то $\exists!$ унитарен изоморфизъм $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ (линеен изоморфизъм, запазващ нормата), така че

$$\pi(A) = U_\rho\,\pi_\rho(A)\,U_\rho^{-1}$$

– изоморфни представяния, а U_ρ се нарича сплитащ оператор / intertwining operator.

Док. – схема: $\mathcal{H}_\rho$ се строи като фактор-линейно простр.

$$\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho \text{ , където } \mathcal{J}_\rho = \{ A \in \mathcal{A} \mid \rho(A^*A) = 0 \}.$$

За целта се установява: (1) $\mathcal{J}_\rho$ е линейно подпр-во

– използва се Cauchy – Schwartz неравенство
Коши - Шварц

$$|\rho(A^*B)| \leq \rho(A^*A)\ \rho(B^*B)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{J}_\rho = \{ A \in \mathcal{A} \mid \rho(B^*A) = 0 \ \forall B \in \mathcal{A} \}$$
$$= \{ B \in \mathcal{A} \mid \rho(B^*A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A} \}$$

(2) По този начин следва също, че $\mathcal{J}_\rho$ е ляв идеал: $\mathcal{A}\,\mathcal{J}_\rho \subseteq \mathcal{J}_\rho$

(3) Тогава е коректно определено

$$\pi_\rho : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_\rho) \text{ за } \mathcal{H}_\rho := \mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho$$

$$\text{за } A \in \mathcal{A} : \ \pi_\rho(A)(B + \mathcal{J}_\rho) := AB + \mathcal{J}_\rho$$

(4) Полагаме $\Psi_\rho := 1 + \mathcal{J}_\rho$.

– това се нарича GNS конструкция. Следват проверки само. □