КТП и ЕЧ, 12 ноември 2020

1. Презентация на файл:

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/QFTandEP_presentation01_12112020v01.pdf

2. Коментари и допълнения по презентацията

а) Какво е скаларното произведение $\mathcal{H}_\rho$:

$$\langle A+\mathcal{J}_\rho \,|\, B+\mathcal{J}_\rho \rangle := \rho(A^*B)$$

б) Квантова статистика – аксиоми припомняне

$\mathcal{A}$ — Алгебра на наблюдаемите – това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
$:= \{ A \in \mathcal{A} \,|\, A = A^* \}$
$\Downarrow$
A – набл.

States$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$
$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \;|\;$ (положителен лин. функционал) $\rho(C^*C) \geq 0$ за $\forall\, C \in \mathcal{A}$
(нормиран) $\rho(\hat{1}) = 1$
(реален) $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)} \}$

линейни изображения със стойности в $\mathbb{C}$

$\Downarrow$
ρ – съст.

$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$
:= средна стойност на наблюдаемата A в състоянието ρ.

– до тук не възниква Хилберт. пр-во, но GNS ни дава за $\forall \rho \in$ States$(\mathcal{A})$

$\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$, $\quad \mathcal{A} \ni A \mapsto (\pi_\rho(A) : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H})$

т.че. $\quad \pi_\rho(AB) = \pi_\rho(A)\,\pi_\rho(B)$, $\quad \langle \Phi \,|\, \pi_\rho(A)\,\Phi' \rangle = \langle \pi_\rho(A^*)\,\Phi \,|\, \Phi' \rangle$

$\pi_\rho(\hat{1}) = 1_{\mathcal{H}}$ $\qquad$ т.е. $\pi_\rho(A^*) = \pi_\rho(A)^*$

$$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho = \langle \Psi_\rho \,|\, \pi_\rho(A)\,\Psi_\rho \rangle \qquad (\text{Dirac})$$

Ψ_ρ се нарича вектор на състоянието ρ и той определя еднозначно ρ по (Dirac), но ρ определя Ψ_ρ само с точност до фазов множител $(e^{i\varphi})$

т.е. $\quad \Psi'_\rho := e^{i\varphi}\,\Psi_\rho$ за $\forall \varphi \in \mathbb{R}$ ще определят същото състояние

$$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho = \langle \Psi'_\rho \,|\, \pi_\rho(A)\,\Psi'_\rho \rangle$$

в) Въпроси

(1) Какво става ако имаме смес $\rho \overset{\text{изпъкнала лин. комбинация}}{=} q_1\rho_1 + q_2\rho_2$, $q_1, q_2 \in [0,1]$, $q_1+q_2=1$

<u>Теорема</u> Тогава $\mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}_{\rho_1} \oplus \mathcal{H}_{\rho_2}$ – разбиване в ортогонална пряка сума

$$\pi_\rho(A) = \pi_{\rho_1}(A) \oplus \pi_{\rho_2}(A)$$

– такива представяния се наричат (наивно) приводими

$\Rightarrow$ Ако ρ е чисто, то това е еквивалентно на неприводимост на π_ρ (с известни математически уговорки)

(2) Да се съсредоточим върху чистите състояния $\in$ PureStates$(\mathcal{A})$

Кога за ρ_1, ρ_2 – чисти състояния $\exists\, U : \mathcal{H}_{\rho_1} \cong \mathcal{H}_{\rho_2}$ – еквивалентност на представяния?

Резултати: • за крайни квантови статистики, т.е., $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ (напр. квантовите компютри)

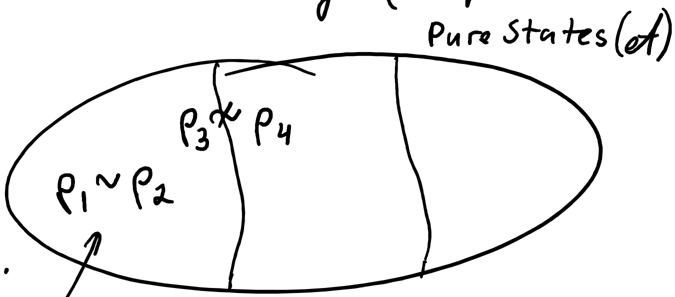
– U винаги съществува

• Същото е и в кванг. механика (т.е., за системи с краен брой степени на свобода) – отново след известни мат. уговорки

$\Rightarrow$ до тук можем да считаме, че всички чисти състояния се реализират от вектори на едно общо хилбертово пространство (нарича се пр-во на състоянията на теорията).

• За системи с безкраен брой степени на свобода (напр. КТП или Статистич. физ.)

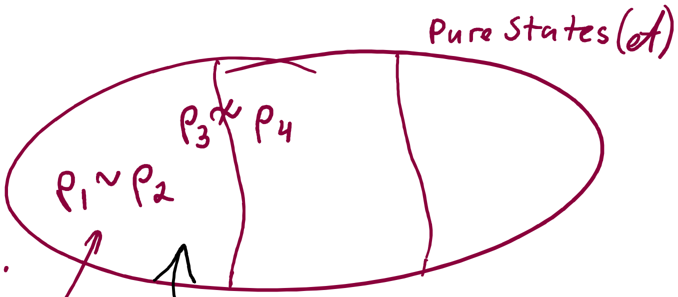
PureStates се разбива на класове на еквивалентност



$\exists\, U_{\rho_1,\rho_2} : \mathcal{H}_{\rho_1} \overset{\text{еквивал.}}{\cong} \mathcal{H}_{\rho_2}$

и тогава Ψ_{ρ_1} и Ψ_{ρ_2} живеят в общо Хилб. пр-во

ureStates се разбива
на класове на еквивалентност



$$\exists U_{\rho_1,\rho_2} : \mathcal{H}_{\rho_1} \overset{\text{еквивал.}}{\cong} \mathcal{H}_{\rho_2}$$

и тогава Ψ_{ρ_1} и Ψ_{ρ_2} живеят в общо Хилб. пр-во

тези класове на еквивалентност
се наричат – сектори в КТП
– фази в Статист. Физ.

Секторите в КТП биват – вакуумен сектор (сектора на вакуума)
– "заредени" сектори (секторите на елем. частици)

2) Понятието <u>суперпозиция</u> на вектори на състояние
└ това е просто лин. комбинация

$$\Psi = \alpha_1 \Psi_1 + \alpha_2 \Psi_2 \quad , \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$
$$\Psi, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}$$

Това не е физическа операция върху състоянията
– защото

$$\left.\begin{aligned} \Psi &\sim \Psi' = e^{i\varphi}\Psi \to \rho \\ \Psi_1 &\sim \Psi_1' = e^{i\varphi_1}\Psi_1 \to \rho_1 \\ \Psi_2 &\sim \Psi_2' = e^{i\varphi_2}\Psi_2 \to \rho_2 \end{aligned}\right\} \text{ определят едни и същи съответно състояния}$$

Но $\Psi' \neq \alpha_1 \Psi_1' + \alpha_2 \Psi_2'$ освен ако
$$e^{i\varphi} = e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2}$$

Накратко: векторите на състояние са представители за състоянията, но операцията суперпозиция зависи от нефизичния избор на представители.

Общо суперпозицията няма нищо общо с операцията смесване: смесването на чисти състояние води до смесено, докато суперпозицията на вектори на чисти състояния води до вектор отново на чисто състояние

e) Амплитуди на вероятности

Нека имаме система с един сектор (т.е. $\forall$ чисто състояние се реализират с вектори в общо хилб. пр.) – това е ситуацията в кв. мех. (даже и в КТП и Стат. Физ. в ограничен обем).

Тогава ако ρ_j е чисто съст. с вектор $\Psi_j \in \mathcal{H}$ $(j = 1, 2)$

$$\rho_j(A) = \langle \Psi_j | \underset{\pi(A)}{\underset{|||}{A}} \Psi_j \rangle \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad \|\Psi_j\| = 1$$

то числото $\underbrace{\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle}$:= амплитуда за вероятност на прехода от Ψ_1 към Ψ_2

$$[0, 1] \ni \underbrace{|\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle|^2} = \text{самата вероятност за преход}$$

не зависи от избора на представителните вектори

това зависи обаче, но с точност до фазов множител

- Коментар за това как възниква тази интерпретация

Първично говорим за вероятности на събития само!

– това са $\langle Q \rangle_\rho = \rho(Q)$ за събитие Q $(Q^* = Q = Q^2)$

Въвежда се понятие елементарно събитие

Q е елементарно $\underset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow}$ ако $0 \leq P \leq Q$ то $O = P$ или $P = Q$

в наредбата на каблюд.

Тогава се доказва:

Thursday, November 12, 2020 12:30 PM

$\forall$ елем. събитие Q $\exists!$ чисто състояние ρ_Q т.че $\langle Q\rangle_{\rho_Q} = 1$

$\forall$ чисто състояние ρ $\exists!$ елем. събитие Q_ρ т.че $\langle Q_\rho\rangle_\rho = 1$

т.е. има 1-1 съотв. между чисти съст. и елем. събития

Тогава се доказва, че вер. за преход ρ_1 към ρ_2

= —— // —— ρ_2 към ρ_1

$$\langle Q_1\rangle_{\rho_2} = \langle Q_2\rangle_{\rho_1} \quad \text{ако} \quad \begin{array}{l}\rho_1 \leftrightarrow Q_1\\ \rho_2 \leftrightarrow Q_2\end{array}$$

$$\|$$

$$|\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle|^2 \quad \text{ако} \quad \begin{array}{l}\Psi_1 \text{ представя } \rho_1\\ \Psi_2 \text{ представя } \rho_2\end{array}$$

Доказателството е с т.нар. бра-кет-означен.

$$Q_1 = |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|$$

$$Q_2 = |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|$$

3. Презентация на

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/QFTandEP_presentation02_12112020.pdf

<u>Заб.</u> Антиунитарна трансф. $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, това е анти-лин. T т.че $\|T\Phi\| = \|\Phi\|$ $\forall\, \Phi \in \mathcal{H}$.

Доказва се, че $\Longleftrightarrow$ $\langle T\Phi | T\Psi\rangle = \langle\Psi|\Phi\rangle$

$$= \overline{\langle\Phi|\Psi\rangle}$$