Една от концептуалните основи на КТП е т.нар. алгебрична КТП

$$\text{Algebraic QFT} = \underbrace{\text{Local}}_{\text{лок. сър.}}\ \underbrace{\text{Quantum Physics}}_{\text{Algebraic approach}}\ (\text{LQP})$$

1. Презентация на файл QFTandEP_presentatio01_19112020v01.pdf - ПОПРАВЕН

1 час – преглед на квантовата статистика

Коментари:

а) За разликата между

$$A \overset{\beta_U}{\mapsto} U^{-1} A U =: \beta_U(A)$$

$$A \overset{\alpha_U}{\mapsto} U A U^{-1} =: \alpha_U(A)$$

Всъщност $\beta_U = \alpha_{U^{-1}}$

Упражнение: $\alpha_{U_1}\alpha_{U_2} = \alpha_{U_1 U_2}$

$\beta_{U_1}\beta_{U_2} = \beta_{U_2 U_1}$ - обръща се реда

Виж. също: Приложение към Лекция 3 Ляво и дясно действие на група
From http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/

б) Група от симетрии: $G \to Op^*(\mathcal{H})$

$g \mapsto U_g$ (на гр. ел-т $\mapsto$ квант. трансф.)

(uni)

$$U_{g_1 g_2} = U_{g_1} U_{g_2} \qquad (\text{rep } 1)$$

$$(U_g^* =)\, U_g^{-1} = U_{g^{-1}} \qquad (\text{rep } 2)$$

$$U_e = 1 \qquad (\text{rep } (3))$$

в) Произволът на вект. на състояния $\Psi' = e^{i\varphi}\Psi$

води до произвол и при кв. трансф. $U' = e^{i\varphi} U$

– задават една и съща квантова трансф. !!!

$$A'' = U'^{-1} A U' = U^{-1} A U = A'$$

$$\Psi'' = U'\Psi = e^{i\varphi} U \Psi = e^{i\varphi} \Psi'$$

$A'' = A'$ – еднакво трансформирани наблюдаеми и еднакво трансформирани състояния !

отслабване

Но това налага уточняване на понятието за представяне при квантова симетрия

$$U_{g_1 g_2} = U_{g_1} U_{g_2} \qquad (\text{rep } 1)$$

$$U_g^{-1} = U_{g^{-1}} \qquad (\text{rep } 2)$$

$$U_e = \mathbb{1} \qquad (\text{rep } (3))$$

$\alpha = \alpha(g_1, g_2)\,,\ \beta = \beta(g)$

$$U_{g_1 g_2} = e^{i\alpha} U_{g_1} U_{g_2} \qquad (\text{rep}' 1)$$

$$U_g^{-1} = e^{i\beta} U_{g^{-1}} \qquad (\text{rep}' 2)$$

$$U_e = e^{i\gamma} \mathbb{1} \qquad (\text{rep}' (3))$$

– наричат се проективни представяния на групи

Важно ! Някои групи G допускат избор $U'_g := e^{i\varphi_g} U_g$

така, че $\forall\, \alpha, \beta, \gamma = 0$ – т.е. става представяне

Например – групите на транслации са такива (по пространство и време и др.)

За групата на въртене $G = SO(3)$

$\exists$ избор $U'_g := e^{i\rho_g} U_g$

т.е. $e^{i\alpha} = \pm 1$, $e^{i\beta} = 1$, $e^{i\gamma} = 1$

тази нееднозначност на представянето се компенсира от замяната на $SO(3)$ със $Spin(3) \equiv SU(2)$

Функцията $e^{i\alpha(g_1, g_2)}$ се нарича 2-коцикъл / cocycle

– Теория на кохомологии на групи
Cohomology

2) Неявно

– теоремата на Вигнер допуска и анти-унитарни U

Тогава $\alpha_U(A) := UAU^{-1}$ се оказва

анти-морфизъм
$$\alpha_U(AB) = \alpha_U(B)\,\alpha_U(A)$$
$$\alpha_U(A^*) = \alpha_U(A)^*$$
$$\alpha_U(\hat{1}) = \hat{1}$$

затова α_U : наблюдаемите ↺

Затова квантови трансформации, които са анти-морфизми
Най-важните са отражение, обръщането на времето, зарядовото спрягане

– Все дискретни симетрии

Непрекъснатите симетрии са винаги морфизми (не – анти!)
защо 1 е такава и при непрекъснатост свойството "морфизъм" се запазва.

д) Защо картината на Хайзенберг е по-удобна за КТП (освен, че е и по-обща)

При предположение, че пространството и времето са хомогенни $\Rightarrow$ транслациите

$$\left| \begin{array}{l} \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a} \\ t \mapsto t + \tau \end{array} \right.$$

по пространството и времето

представят се като квантови трансформ.

$$U(\vec{a}, \tau)$$

$$U(\vec{0}, 0) = \hat{1}$$

$$U(\vec{a}, \tau)^* = U(\vec{a}, \tau)^{-1} = U(-\vec{a}, -\tau)$$

$$U(\vec{a}_1, \tau_1)\, U(\vec{a}_2, \tau_2) = U(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \tau_1 + \tau_2)$$

В картината на Хайзенберг при такива трансформации $\forall$ наблюдаема A ще се "разнесе" в простр. и времето

$$A(\vec{x}, t) := U(\vec{x}, t)\, A\, U(\vec{x}, t)^{-1}$$

– това е <u>квантово поле</u> !

$\equiv$

физични величини съпоставени на $\forall$ точка от пространството и времето

$\equiv$

функция на $\vec{x}, t$ със стойности – наблюдаеми

Например $\vec{E}(\vec{x}, t)$, $\vec{B}(\vec{x}, t)$ и т.н.

– това така дори и в нерелатив. физика !

Заб. към стр. 194 $\partial_\tau\left(F(\tau)^{-1}\right) = ?$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\Big\rfloor \quad F(\tau)^{-1}F(\tau) = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(F^{-1}\right)F + F^{-1}\frac{\partial F}{\partial\tau} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(F^{-1}\right)F = -F^{-1}\frac{\partial F}{\partial\tau} \qquad \Big\lfloor F^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(F^{-1}\right) = -F^{-1}\frac{\partial F}{\partial\tau}F^{-1}$$

към стр. 197

$$\theta(\tau) := \begin{cases} 1 & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}, \quad \theta(0) = \text{неопр.}$$

ако останалият израз е интегруем в $\tau = 0$ – ok

Ако не → нов вид разходимости – ултравиолетови

$\langle \phi(p') | S\, \phi(p) \rangle$ – амплитуда на разсейване

$|\langle \phi(p') | S\, \phi(p) \rangle|^2$ – ~ ефективно сечение на разсейване
= вероятност за разсейване

T-exponent

оператор на хронолог. подредба

$$T\text{-}\exp\left(i\int_{t_1}^{t_2} H(t)\,dt\right) := \text{"}T\text{"}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(i\left(\int_{t_1}^{t_2}H(t)\,dt\right)\right)^n\right)$$

$$= \text{"}T\text{"}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\left(\int_{t_1}^{t_2}H(\tau_1)\,d\tau_1\right)\cdots\left(\int_{t_1}^{t_2}H(\tau_n)\,d\tau_n\right)\right)$$

$$= \text{"}T\text{"}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int_{t_1}^{t_2}d\tau_1\int_{t_1}^{t_2}d\tau_2\cdots\int_{t_1}^{t_2}d\tau_n\, H(\tau_1)\cdots H(\tau_n)\right)$$

по определение

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int_{t_1}^{t_2}d\tau_1\cdots\int_{t_1}^{t_2}d\tau_n\, \underbrace{T\left(H(\tau_1)\cdots H(\tau_n)\right)}_{\text{|| по опр.}\; H(\tau_{j_1})\cdots H(\tau_{j_n})}$$

за такава пермутация $(j_1,\ldots,j_n)$ на $(1,\ldots,n)$
при която $\tau_{j_1}\geq\tau_{j_2}\geq\cdots\geq\tau_{j_n}$

Твърдение

$$\overset{\downarrow}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\cancel{\frac{1}{n!}}\, i^n\int_{t_1}^{t_2}d\tau_1\int_{t_1}^{\tau_1}d\tau_2\int_{t_1}^{\tau_2}d\tau_3\cdots\int_{t_1}^{\tau_{n-1}}d\tau_n\; H(\tau_1)H(\tau_2)\cdots H(\tau_n)$$

– итерационен интеграл
Itterated integral

решение на ОДУ

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}\Psi(t) = \dfrac{1}{i}H(t)\Psi(t)\\[2mm] \Psi(t_0) = \Psi_0\end{array}\right.$$

$$\Psi(t)\in\mathbb{C}^n$$

– линейна-хомогенна, неавтономна система ОДУ