Квантова теория на полето и елем. частици

лекция 5 / 19 ноември 2020

Алгебра на наблюдаемите - това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

$\mathcal{A}$

Observables$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$
$\Downarrow$
A - набл.

States$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$
$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid \rho$ е положителен нормиран реален лин. функционал $\}$
$\Downarrow$
ρ - съст.

$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$ - средна стойност на наблюдаемата A в състоянието ρ.

Основната структурна теорема за крайно-мерни положителни $*$-алгебри гласи, че $\forall$ такава алгебра е изоморфна на ("може да се реализира като") $*$-алгебрата на блочно диагоналните матрици за някакво фиксирано разбиване $n = k_1 + \cdots + k_m$:

$$
\mathcal{A} \cong \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & k_1 & k_2 & & k_m \\
\hline
k_1 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
k_2 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\
\hline
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
k_m & 0 & 0 & \cdots & A_m \\
\hline
\end{array} \right\}
$$

Основната структурна теорема за крайно-мерни положителни $*$-алгебри гласи, че $\forall$ такава алгебра е изоморфна на ("може да се реализира като") $*$-алгебрата на блочно диагоналните матрици за някакво фиксирано разбиване $n = k_1 + \dots + k_m$:

$$\mathcal{A} \cong \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & k_1 & k_2 & & k_m \\ \hline k_1 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline k_2 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \hline & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline k_m & 0 & 0 & \cdots & A_m \\ \hline \end{array} \right\}$$

Имаме два екстремни случая

Основната структурна теорема за крайно-мерни положителни $*$-алгебри гласи, че $\forall$ такава алгебра е изоморфна на ("може да се реализира като") $*$-алгебрата на блочно диагоналните матрици за някакво фиксирано разбиване $n = k_1 + \dots + k_m$:

$$\mathcal{A} \cong \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & k_1 & k_2 & & k_m \\ \hline k_1 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline k_2 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \hline & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline k_m & 0 & 0 & \cdots & A_m \\ \hline \end{array} \right\}$$

Имаме два екстремни случая

1) $m = 1$, $k_1 = n$ - един блок

Основната структурна теорема за крайно-мерни положителни $*$-алгебри гласи, че $\forall$ такава алгебра е изоморфна на ("може да се реализира като") $*$-алгебрата на блочно диагоналните матрици за някакво фиксирано разбиване $n = k_1 + \dots + k_m$:

Имаме два екстремни случая

1) $m = 1$, $k_1 = n$ - един блок

$$\mathcal{A} \cong \left\{ \begin{array}{cc} & n \\ n & \boxed{\quad A \quad} \end{array} \right\} = Mat_n(\mathbb{C})$$

Основната структурна теорема за крайно-мерни положителни $*$-алгебри гласи, че $\forall$ такава алгебра е изоморфна на ("може да се реализира като") $*$-алгебрата на блочно диагоналните матрици за някакво фиксирано разбиване $n = k_1 + \cdots + k_m$:

$$\mathcal{A} \cong \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c|} & 1 & 1 & & 1 \\ \hline 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \hline & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ \hline \end{array} \right\}$$

Имаме два екстремни случая

1) $m = 1$, $k_1 = n$ - един блок

2) $k_1 = \cdots = k_m = 1$ - диагонални матрици - комутативна алгебра

Основната структурна теорема за крайно-мерни положителни $*$-алгебри гласи, че $\forall$ такава алгебра е изоморфна на ("може да се реализира като") $*$-алгебрата на блочно диагоналните матрици за някакво фиксирано разбиване $n = k_1 + \dots + k_m$:

$$\mathcal{A} \cong \left\{ \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 1 & & 1 \\ \hline 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ \hline \end{array} \right\}$$

Имаме два екстремни случая

1) $m = 1$, $k_1 = n$ – един блок

2) $k_1 = \dots = k_m = 1$ – диагонални матрици – комутативна алгебра

изоморфна $\wr\!\wr$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \{\omega_1, & \omega_2, & \dots, & \omega_n\} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a_1, & a_2 & \dots, & a_n \in \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

Основната структурна теорема за крайно-мерни положителни $*$-алгебри гласи, че $\forall$ такава алгебра е изоморфна на ("може да се реализира като") $*$-алгебрата на блочно диагоналните матрици за някакво фиксирано разбиване $n = k_1 + \cdots + k_m$:

$$\mathcal{A} \cong \left\{ \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 1 & & 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \\ \\ 1 \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & a_n \\ \hline \end{array} \end{array} \right\}$$

Имаме два екстремни случая

1) $m = 1$, $k_1 = n$ - един блок

2) $k_1 = \cdots = k_m = 1$ - диагонални матрици - комутативна алгебра

$\downarrow$

изоморфна $\wr\wr$

$$\left\{ \begin{array}{c} \{\omega_1, \omega_2, \ . \ . \ . \ , \omega_n\} \\ \downarrow \quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ a_1, a_2 \ . \ . \ . \ , a_n \in \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

алгебра от функции

$$= \{ A \mid A : \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \to \mathbb{C} \}$$

Основната структурна теорема за крайно-мерни положителни $*$-алгебри гласи, че $\forall$ такава алгебра е изоморфна на ("може да се реализира като") $*$-алгебрата на блочно диагоналните матрици за някакво фиксирано разбиване $n = k_1 + \dots + k_m$:

$$\mathcal{A} \cong \left\{ \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 1 & \quad & \quad & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \\ \\ 1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

Имаме два екстремни случая

1) $m = 1$, $k_1 = n$ - един блок

2) $k_1 = \dots = k_m = 1$ - диагонални матрици - комутативна алгебра

$\downarrow$

алгебра от функции

изоморфна $\wr\!\Vert$

$$\left\{ \begin{matrix} \{\omega_1, & \omega_2, & \dots & , \omega_n\} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a_1, & a_2 & \dots & , a_n \in \mathbb{C} \end{matrix} \right\} = \{ A \mid A : \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \to \mathbb{C} \}$$

$$\equiv \mathrm{Func}_{\mathbb{C}} \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$$

Случая $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ наричаме неприводима крайна квантова статистическа система.

Случая $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ наричаме неприводима крайна квантова статистическа система. Това е "прототипа" на всяка квантова система и отговаря на апроксимация на физическите системи със системи с краен брой състояния.

Случая $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ наричаме неприводима крайна квантова статистическа система. Това е "прототипа" на всяка квантова система и отговаря на апроксимация на физическите системи със системи с краен брой състояния. Това е в основата на един от главните числени методи - дискретизацията - всичко се разбива на краен брой и крайни стъпки.

Случая $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ наричаме неприводима крайна квантова статистическа система. Това е "прототипа" на всяка квантова система и отговаря на апроксимация на физическите системи със системи с краен брой състояния. Това е в основата на един от главните числени методи - дискретизацията - всичко се разбива на краен брой и крайни стъпки. Накрая се образува т.нар. "индуктивна граница":

$$Mat_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow Mat_{n+1}(\mathbb{C}) \hookrightarrow Mat_{n+2}(\mathbb{C}) \subseteq \cdots$$

Случая $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ наричаме неприводима крайна квантова статистическа система. Това е "прототипа" на всяка квантова система и отговаря на апроксимация на физическите системи със системи с краен брой състояния. Това е в основата на един от главните числени методи - дискретизацията - всичко се разбива на краен брой и крайни стъпки. Накрая се образува т.нар. "индуктивна граница":

$$Mat_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow Mat_{n+1}(\mathbb{C}) \hookrightarrow Mat_{n+2}(\mathbb{C}) \subseteq \cdots$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Случая $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ наричаме неприводима крайна квантова статистическа система. Това е "прототипа" на всяка квантова система и отговаря на апроксимация на физическите системи със системи с краен брой състояния. Това е в основата на един от главните числени методи - дискретизацията - всичко се разбива на краен брой и крайни стъпки. Накрая се образува т.нар. "индуктивна граница":

$$Mat_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow Mat_{n+1}(\mathbb{C}) \hookrightarrow Mat_{n+2}(\mathbb{C}) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_{phys}$$

алгебрата на наблюдаеми на физичната система

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Доказва се, че чистите състояния на $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ са тези и само тези $\rho \in States(\mathcal{A})$ (т.е., $\rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C}$), за които

$$\exists \Psi \in \mathbb{C}^n : \quad \rho(A) = \langle \Psi | A \Psi \rangle =: \langle A \rangle_\Psi \equiv \langle A \rangle_\rho \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Доказва се, че чистите състояния на $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ са тези и само тези $\rho \in States(\mathcal{A})$ (т.е., $\rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C}$), за които

$$\exists \Psi \in \mathbb{C}^n : \quad \rho(A) = \langle \Psi | A \Psi \rangle =: \langle A \rangle_\Psi \equiv \langle A \rangle_\rho \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

От $1 = \rho(\hat{1}) = \langle \Psi | \hat{1} \Psi \rangle = \|\Psi\|^2$ следва, че Ψ е единичен вектор.

Доказва се, че чистите състояния на $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ са тези и само тези $\rho \in States(\mathcal{A})$ (т.е., $\rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C}$), за които

$$\exists \Psi \in \mathbb{C}^n : \quad \rho(A) = \langle \Psi | A \Psi \rangle =: \langle A \rangle_{\Psi} \equiv \langle A \rangle_{\rho} \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

От $1 = \rho(\hat{1}) = \langle \Psi | \hat{1} \Psi \rangle = \|\Psi\|^2$ следва, че Ψ е единичен вектор.

Ψ се нарича вектор на (чистото) състояние ρ.

Доказва се, че чистите състояния на $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ са тези и само тези $\rho \in States(\mathcal{A})$ (т.е., $\rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C}$), за които

$$\exists \Psi \in \mathbb{C}^n : \quad \rho(A) = \langle \Psi | A \Psi \rangle =: \langle A \rangle_\Psi \equiv \langle A \rangle_\rho \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

От $1 = \rho(\hat{1}) = \langle \Psi | \hat{1} \Psi \rangle = \| \Psi \|^2$ следва, че Ψ е единичен вектор.

Ψ се нарича вектор на (чистото) състояние ρ.

Ψ определя ρ еднозначно

Доказва се, че чистите състояния на $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ са тези и само тези $\rho \in States(\mathcal{A})$ (т.е., $\rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C}$), за които

$$\exists \Psi \in \mathbb{C}^n : \quad \rho(A) = \langle \Psi | A \Psi \rangle =: \langle A \rangle_\Psi \equiv \langle A \rangle_\rho \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

От $1 = \rho(\hat{1}) = \langle \Psi | \hat{1} \Psi \rangle = \|\Psi\|^2$ следва, че Ψ е единичен вектор.

Ψ се нарича вектор на (чистото) състояние ρ.

Ψ определя ρ еднозначно, но ρ определя Ψ единствено с точност до фазов множител:

Доказва се, че чистите състояния на $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ са тези и само тези $\rho \in States(\mathcal{A})$ (т.е., $\rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C}$), за които

$$\exists \Psi \in \mathbb{C}^n : \quad \rho(A) = \langle \Psi | A \Psi \rangle =: \langle A \rangle_\Psi \equiv \langle A \rangle_\rho \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

От $1 = \rho(\hat{1}) = \langle \Psi | \hat{1} \Psi \rangle = \|\Psi\|^2$ следва, че Ψ е единичен вектор.

Ψ се нарича вектор на (чистото) състояние ρ.

Ψ определя ρ еднозначно, но ρ определя Ψ единствено с точност до фазов множител:

Ψ и Ψ' определят едно и също състояние $\iff \quad \Psi' = e^{i\varphi} \Psi$ за $\varphi \in \mathbb{R}$

Доказва се, че чистите състояния на $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ са тези и само тези $\rho \in States(\mathcal{A})$ (т.е., $\rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C}$), за които

$$\exists \Psi \in \mathbb{C}^n : \quad \rho(A) = \langle \Psi | A \Psi \rangle =: \langle A \rangle_\Psi \equiv \langle A \rangle_\rho \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

От $1 = \rho(\hat{1}) = \langle \Psi | \hat{1} \Psi \rangle = \|\Psi\|^2$ следва, че Ψ е единичен вектор.

Ψ се нарича вектор на (чистото) състояние ρ.

Ψ определя ρ еднозначно, но ρ определя Ψ единствено с точност до фазов множител:

Ψ и Ψ' определят едно и също състояние $\iff \Psi' = e^{i\varphi}\Psi$ за $\varphi \in \mathbb{R}$

Затова ~~линейната комбинация~~ суперпозицията $a_1\Psi_1 + a_2\Psi_2$ на вектори на състояния няма физически смисъл на операция върху самите състояния

Доказва се, че чистите състояния на $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ са тези и само тези $\rho \in States(\mathcal{A})$ (т.е., $\rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C}$), за които

$$\exists \Psi \in \mathbb{C}^n : \quad \rho(A) = \langle \Psi | A \Psi \rangle =: \langle A \rangle_\Psi \equiv \langle A \rangle_\rho \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

От $1 = \rho(\hat{1}) = \langle \Psi | \hat{1} \Psi \rangle = \|\Psi\|^2$ следва, че Ψ е единичен вектор.

Ψ се нарича вектор на (чистото) състояние ρ.

Ψ определя ρ еднозначно, но ρ определя Ψ единствено с точност до фазов множител:

Ψ и Ψ' определят едно и също състояние $\iff \quad \Psi' = e^{i\varphi}\Psi$ за $\varphi \in \mathbb{R}$

Така едно чисто състояние ρ определя еднозначно множеството $\{e^{i\varphi}\Psi\}_{\varphi \in \mathbb{R}}$ наричано единичен лъч (породен от единичния вектор Ψ).

И така, основната предсказателна формула е формулата на Дирак (Dirac):

$$\langle A \rangle_\Psi = \langle \Psi | A \Psi \rangle$$

-средна стойност на наблюдаемата A в състояние (определено от вектор) Ψ.

И така, основната предсказателна формула е формулата на Дирак (Dirac):

$$\langle A \rangle_\Psi = \langle \Psi | A \Psi \rangle$$

-средна стойност на наблюдаемата A в състояние (определено от вектор) Ψ.

В частност стойността $A = a$ е детерминирана в Ψ

И така, основната предсказателна формула е формулата на Дирак (Dirac):

$$\langle A \rangle_\Psi = \langle \Psi | A \Psi \rangle$$

-средна стойност на наблюдаемата A в състояние (определено от вектор) Ψ.

В частност стойността $A = a$ е детерминирана в Ψ $\Longleftrightarrow$ дисперсията

$$\langle (A - a\hat{1})^* (A - a\hat{1}) \rangle_\Psi = 0 .$$

И така, основната предсказателна формула е формулата на Дирак (Dirac):

$$\langle A\rangle_\Psi = \langle \Psi | A\Psi\rangle$$

-средна стойност на наблюдаемата A в състояние (определено от вектор) Ψ.

В частност стойността $A=a$ е детерминирана в Ψ $\Longleftrightarrow$ дисперсията

$$\langle (A-a\hat{1})^*(A-a\hat{1})\rangle_\Psi = 0 .$$

Но $0 = \langle (A-a\hat{1})^*(A-a\hat{1})\rangle_\Psi = \langle \Psi | (A-a\hat{1})^*(A-a\hat{1})\Psi\rangle$

И така, основната предсказателна формула е формулата на Дирак (Dirac):

$$\langle A \rangle_\Psi = \langle \Psi | A \Psi \rangle$$

-средна стойност на наблюдаемата A в състояние (определено от вектор) Ψ.

В частност стойността $A = a$ е детерминирана в Ψ $\Longleftrightarrow$ дисперсията

$$\langle (A - a\hat{1})^* (A - a\hat{1}) \rangle_\Psi = 0 .$$

Но $0 = \langle (A - a\hat{1})^* (A - a\hat{1}) \rangle_\Psi = \| A\Psi - a\Psi \|^2$

И така, основната предсказателна формула е формулата на Дирак (Dirac):

$$\langle A \rangle_\Psi = \langle \Psi | A \Psi \rangle$$

-средна стойност на наблюдаемата A в състояние (определено от вектор) Ψ.

В частност стойността $A = a$ е детерминирана в Ψ $\Longleftrightarrow$ дисперсията

$$\langle (A - a\hat{1})^* (A - a\hat{1}) \rangle_\Psi = 0 .$$

Но $0 = \langle (A - a\hat{1})^* (A - a\hat{1}) \rangle_\Psi = \| A\Psi - a\Psi \|^2$

$\Rightarrow$ $A = a$ е детерминирана стойност в Ψ $\Longleftrightarrow$ $A\Psi = a\Psi$

И така, основната предсказателна формула е формулата на Дирак (Dirac):

$$\langle A \rangle_\Psi = \langle \Psi | A \Psi \rangle$$

-средна стойност на наблюдаемата A в състояние (определено от вектор) Ψ.

В частност стойността $A = a$ е детерминирана в Ψ $\Longleftrightarrow$ дисперсията

$$\langle (A - a\hat{1})^* (A - a\hat{1}) \rangle_\Psi = 0 .$$

Но $0 = \langle (A - a\hat{1})^* (A - a\hat{1}) \rangle_\Psi = \| A\Psi - a\Psi \|^2$

$\Rightarrow$ $A = a$ е детерминирана стойност в Ψ $\Longleftrightarrow$ $A\Psi = a\Psi$

(т.е., $\Longleftrightarrow$ Ψ е собствен вектор за A със собствена стойност a).

Бра и кет векторни означечения $\langle bra|ket\rangle$

Бра и кет векторни означечения $\langle bra | ket \rangle$

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$.

Бра и кет векторни означечения $\langle bra | ket \rangle$

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$. В по-обща ситуация може да се избере ортонормиран базис на хилбертовото пространство $\mathcal{H}$, което установява унитарен изоморфизъм $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$ и свеждаме конструкуцията до $\mathbb{C}^n$.

Бра и кет векторни означечения $\langle bra | ket \rangle$

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$. В по-обща ситуация може да се избере ортонормиран базис на хилбертовото пространство $\mathcal{H}$, което установява унитарен изоморфизъм $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$ и свеждаме конструкцията до $\mathbb{C}^n$.

Полагаме: кет-вектор (ket-vector) := вектор-стълб $\in \mathbb{C}^n$

Бра и кет векторни означечения $\langle bra | ket \rangle$

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$. В по-обща ситуация може да се избере ортонормиран базис на хилбертовото пространство $\mathcal{H}$, което установява унитарен изоморфизъм $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$ и свеждаме конструкцията до $\mathbb{C}^n$.

Полагаме: кет-вектор (ket-vector) := вектор-стълб $\in \mathbb{C}^n$

бра-вектор (bra-vector) := вектор-ред $\in (\mathbb{C}^n)^*$

Бра и кет векторни означения ⟨bra|ket⟩

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$. В по-общата ситуация може да се избере ортонормиран базис на хилбертовото пространство $\mathcal{H}$, което установява унитарен изоморфизъм $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$ и свеждаме конструкцията до $\mathbb{C}^n$.

Полагаме: кет-вектор (ket-vector) := вектор-стълб $\in \mathbb{C}^n$

бра-вектор (bra-vector) := вектор-ред $\in (\mathbb{C}^n)^*$

за $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$: $\Psi := |\Psi\rangle$ - кет-вектор

Бра и кет векторни означения $\langle bra|ket \rangle$

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$. В по-обща ситуация може да се избере ортонормиран базис на хилбертовото пространство $\mathcal{H}$, което установява унитарен изоморфизъм $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$ и свеждаме конструкцията до $\mathbb{C}^n$.

Полагаме: кет-вектор (ket-vector) := вектор-стълб $\in \mathbb{C}^n$

бра-вектор (bra-vector) := вектор-ред $\in (\mathbb{C}^n)^*$

за $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$: $\Psi := |\Psi\rangle$ – кет-вектор

$\Psi^* := \overline{\Psi}^T := (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) \in (\mathbb{C}^n)^*$: $\Psi^* := \langle \Psi|$ – бра-вектор

Бра и кет векторни означечения $\langle bra | ket \rangle$

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$. В по-обща ситуация може да се избере ортонорниран базис на хилбертовото пространство $\mathcal{H}$, което установява унитарен изоморфизъм $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$ и свеждаме конструкцията до $\mathbb{C}^n$.

Полагаме: кет-вектор (ket-vector) $:=$ вектор-стълб $\in \mathbb{C}^n$

бра-вектор (bra-vector) $:=$ вектор-ред $\in (\mathbb{C}^n)^*$

за $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$: $\Psi := |\Psi\rangle$ – кет-вектор

$\Psi^* := \overline{\Psi}^T := (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) \in (\mathbb{C}^n)^*$: $\Psi^* := \langle \Psi |$ – бра-вектор

ермитово спрегнат вектор-ред

Бра и кет векторни означечения $\langle \text{bra} | \text{ket} \rangle$

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$. В по-обща ситуация може да се избере ортонормиран базис на хилбертовото пространство $\mathcal{H}$, което установява унитарен изоморфизъм $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$ и свеждаме конструкуцията до $\mathbb{C}^n$.

Полагаме: кет-вектор (ket-vector) := вектор-стълб $\in \mathbb{C}^n$

бра-вектор (bra-vector) := вектор-ред $\in (\mathbb{C}^n)^*$

за $$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n : \quad \Psi := |\Psi\rangle \text{ – кет-вектор}$$

$$\cong$$

$$\Psi^* := \overline{\Psi}^T := (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) \in (\mathbb{C}^n)^* : \quad \Psi^* := \langle \overline{\Psi} | \text{ – бра-вектор}$$

ермитово спрегнат вектор-ред

Бра и кет векторни означечения $\langle bra | ket \rangle$

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$.

Полагаме: кет-вектор (ket-vector) := вектор-стълб $\in \mathbb{C}^n$

бра-вектор (bra-vector) := вектор-ред $\in (\mathbb{C}^n)^*$

за $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \underset{\cong}{\mathbb{C}^n}$: $\Psi := |\Psi\rangle$ – кет-вектор

$$\Psi^* := \overline{\Psi}^T := (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) \in (\mathbb{C}^n)^* \; : \; \Psi^* := \langle \Psi | \; - \text{ бра-вектор}$$

Бра и кет векторни означечения $\langle bra | ket \rangle$

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$.

Полагаме: кет-вектор (ket-vector) := вектор-стълб $\in \mathbb{C}^n$

бра-вектор (bra-vector) := вектор-ред $\in (\mathbb{C}^n)^*$

за $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$: $\Psi := |\Psi\rangle$ – кет-вектор

$\cong$

$\Psi^* := \overline{\Psi}^T := (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) \in (\mathbb{C}^n)^*$: $\Psi^* := \langle \Psi |$ – бра-вектор

Така, поставянето на скобки $|\ \rangle$ и $\langle\ |$ на един вектор-стълб $\Psi \in \mathbb{C}^n$ ние разглеждаме, като операции върху Ψ

Бра и кет векторни означечения $\langle \text{bra} | \text{ket} \rangle$

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$.

Полагаме: кет-вектор (ket-vector) $:=$ вектор-стълб $\in \mathbb{C}^n$

бра-вектор (bra-vector) $:=$ вектор-ред $\in (\mathbb{C}^n)^*$

$$\text{за} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \; : \; \Psi := | \Psi \rangle \; - \; \text{кет-вектор}$$

$$\cong$$

$$\Psi^* := \overline{\Psi}^T := (\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_n) \in (\mathbb{C}^n)^* \; : \; \Psi^* := \langle \Psi | \; - \; \text{бра-вектор}$$

Така, поставянето на скобки $| \; \rangle$ и $\langle \; |$ на един вектор-стълб $\Psi \in \mathbb{C}^n$ ние разглеждаме, като операции върху Ψ, първата от които, $\Psi \mapsto | \Psi \rangle$ е просто идентитета: $\Psi \equiv | \Psi \rangle$

Бра и кет векторни означечения $\langle bra | ket \rangle$

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$.

Полагаме : кет-вектор (ket-vector) := вектор-стълб $\in \mathbb{C}^n$
бра-вектор (bra-vector) := вектор-ред $\in (\mathbb{C}^n)^*$

за $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$: $\Psi := |\Psi\rangle$ – кет-вектор

$$\Psi^* := \overline{\Psi}^T := (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) \in (\mathbb{C}^n)^* \quad : \quad \Psi^* := \langle \Psi | \text{ – бра-вектор}$$

(където $\mathbb{C}^n \cong (\mathbb{C}^n)^*$)

Така, поставянето на скобки $|\ \rangle$ и $\langle\ |$ на един вектор-стълб $\Psi \in \mathbb{C}^n$ ние разглеждаме, като операции върху Ψ, първата от които, $\Psi \mapsto |\Psi\rangle$ е просто идентитета : $\Psi \equiv |\Psi\rangle$, докато втората $\Psi \mapsto \langle\Psi|$ е ермитовото спрягане $\Psi^* \equiv \langle\Psi|$, което прави вектор-стълбовете в редове и е анти-линейно.

Бра и кет векторни означечения $\langle bra | ket \rangle$

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$.

Полагаме: кет-вектор (ket-vector) := вектор-стълб $\in \mathbb{C}^n$
бра-вектор (bra-vector) := вектор-ред $\in (\mathbb{C}^n)^*$

$$\text{за} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \underset{\displaystyle\cong}{\mathbb{C}^n} \; : \; \Psi := |\Psi\rangle \; - \; \text{кет-вектор}$$

$$\Psi^* := \overline{\Psi}^T := (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) \in (\mathbb{C}^n)^* \; : \; \Psi^* := \langle \Psi | \; - \; \text{бра-вектор}$$

Тогава: $\Psi^* \Psi \equiv (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 + \dots + |\psi_n|^2$

Бра и кет векторни означечения $\langle bra | ket \rangle$

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$.

Полагаме: кет-вектор (ket-vector) $:=$ вектор-стълб $\in \mathbb{C}^n$

бра-вектор (bra-vector) $:=$ вектор-ред $\in (\mathbb{C}^n)^*$

за $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \; : \; \Psi := |\Psi\rangle$ – кет-вектор

$\cong$

$\Psi^* := \overline{\Psi}^T := (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) \in (\mathbb{C}^n)^* \; : \; \Psi^* := \langle \Psi |$ – бра-вектор

Тогава: $\Psi^* \Psi \equiv (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 + \dots + |\psi_n|^2$

$= \langle \Psi | \cdot | \Psi \rangle$

Бра и кет векторни означечения $\langle bra | ket \rangle$

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$.

Полагаме: кет-вектор (ket-vector) := вектор-стълб $\in \mathbb{C}^n$

бра-вектор (bra-vector) := вектор-ред $\in (\mathbb{C}^n)^*$

за $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$: $\Psi := |\Psi\rangle$ – кет-вектор

$\Psi^* := \overline{\Psi}^T := (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) \in (\mathbb{C}^n)^*$: $\Psi^* := \langle \Psi |$ – бра-вектор

Тогава: $\Psi^* \Psi \equiv (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 + \dots + |\psi_n|^2$

$= \langle \Psi | \cdot | \Psi \rangle \equiv \langle \Psi | \Psi \rangle$

правило: винаги когато се доират две вертикални черти те се сливат в една

Бра и кет векторни означечения $\langle bra|ket\rangle$

Ще ги въведем за случая на хилбертовото пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$.

Полагаме : кет-вектор (ket-vector) $:=$ вектор-стълб $\in \mathbb{C}^n$

бра-вектор (bra-vector) $:=$ вектор-ред $\in (\mathbb{C}^n)^*$

за $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$: $\Psi := |\Psi\rangle$ – кет-вектор

$\cong$

$\Psi^* := \overline{\Psi}^T := (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) \in (\mathbb{C}^n)^*$: $\Psi^* := \langle \Psi |$ – бра-вектор

Тогава : $\Psi^* \Psi \equiv (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 + \dots + |\psi_n|^2$

$= \langle \Psi | \cdot | \Psi \rangle \equiv \langle \Psi | \Psi \rangle$ – число = скаларно произведение

правило: винаги когато се доират две вертикални черти те се сливат в една

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \Psi\,\Psi^*$

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi_1}, \dots, \overline{\psi_n})$

Друг пример: $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}}_{\text{квадратна, } n \times n\text{-матрица}} (\overline{\psi_1}, \dots, \overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix} \psi_1 \overline{\psi_1} & \dots & \psi_1 \overline{\psi_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n \overline{\psi_1} & \dots & \psi_n \overline{\psi_n} \end{pmatrix}$

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi_1}, \dots, \overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi_1} & \dots & \psi_1\overline{\psi_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi_1} & \dots & \psi_n\overline{\psi_n} \end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Да пресметнем $\left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)^2 = \ ?$

Друг пример: $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi_1}, \dots, \overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi_1} & \dots & \psi_1\overline{\psi_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi_1} & \dots & \psi_n\overline{\psi_n} \end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$-матрица

Да пресметнем $\left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)^2 = \left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)\left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)$

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi_1}, \dots, \overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi_1} & \cdots & \psi_1\overline{\psi_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_n\overline{\psi_1} & \cdots & \psi_n\overline{\psi_n}\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$-матрица

Да пресметнем $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^2 = (|\Psi\rangle\langle\Psi|)(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$

$= |\Psi\rangle(\langle\Psi|\cdot|\Psi\rangle)\langle\Psi|$

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\bar\psi_1, \dots, \bar\psi_n) = \begin{pmatrix} \psi_1\bar\psi_1 & \dots & \psi_1\bar\psi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\bar\psi_1 & \dots & \psi_n\bar\psi_n \end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Да пресметнем $\left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)^2 = \left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)\left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)$

$$= |\Psi\rangle\left(\langle\Psi|\cdot|\Psi\rangle\right)\langle\Psi|$$

$$= |\Psi\rangle\left(\langle\Psi|\Psi\rangle\right)\langle\Psi|$$

Друг пример: $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$-матрица

Да пресметнем $\left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)^2 = \left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)\left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)$

$$= |\Psi\rangle\left(\langle\Psi|\cdot|\Psi\rangle\right)\langle\Psi|$$

$$= |\Psi\rangle\underbrace{\left(\langle\Psi|\Psi\rangle\right)}_{\text{число}}\langle\Psi|$$

Друг пример: $\quad |\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi}_1 & \ldots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \ldots & \psi_n\overline{\psi}_n \end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$-матрица

Да пресметнем

$$\left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)^2 = \left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)\left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)$$

$$= |\Psi\rangle\left(\langle\Psi|\cdot|\Psi\rangle\right)\langle\Psi|$$

$$= |\Psi\rangle\underbrace{\left(\langle\Psi|\Psi\rangle\right)}_{\text{число}}\langle\Psi|$$

$$= \|\Psi\|^2\,|\Psi\rangle\langle\Psi|$$

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi_1},\dots,\overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi_1} & \dots & \psi_1\overline{\psi_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_n\overline{\psi_1} & \dots & \psi_n\overline{\psi_n}\end{pmatrix}$

квадратна, $n\times n$-матрица

Да пресметнем $\big(|\Psi\rangle\langle\Psi|\big)^2 = \big(|\Psi\rangle\langle\Psi|\big)\big(|\Psi\rangle\langle\Psi|\big)$

$$= |\Psi\rangle\big(\langle\Psi|\cdot|\Psi\rangle\big)\langle\Psi|$$

$$= |\Psi\rangle\underbrace{\big(\langle\Psi|\Psi\rangle\big)}_{\text{число}}\langle\Psi|$$

$$= \|\Psi\|^2\,|\Psi\rangle\langle\Psi|$$

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\iff \|\Psi\|=1$

Друг пример: $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi_1}, \dots, \overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi_1} & \dots & \psi_1\overline{\psi_n}\\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi_1} & \dots & \psi_n\overline{\psi_n}\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$-матрица

Да пресметнем $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^2 = (|\Psi\rangle\langle\Psi|)(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$

$$= |\Psi\rangle(\langle\Psi|\cdot|\Psi\rangle)\langle\Psi|$$

$$= |\Psi\rangle\underbrace{(\langle\Psi|\Psi\rangle)}_{\text{число}}\langle\Psi|$$

$$= \|\Psi\|^2\,|\Psi\rangle\langle\Psi|$$

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\Longleftrightarrow \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самоспрегната: $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

Друг пример: $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \underbrace{\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\bar\psi_1,\dots,\bar\psi_n)}_{\text{квадратна, } n\times n\text{ - матрица}} = \begin{pmatrix} \psi_1\bar\psi_1 & \dots & \psi_1\bar\psi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\bar\psi_1 & \dots & \psi_n\bar\psi_n\end{pmatrix}$

Да пресметнем

$$
\begin{aligned}
(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^2 &= (|\Psi\rangle\langle\Psi|)(|\Psi\rangle\langle\Psi|) \\
&= |\Psi\rangle(\langle\Psi|\cdot|\Psi\rangle)\langle\Psi| \\
&= |\Psi\rangle\underbrace{(\langle\Psi|\Psi\rangle)}_{\text{число}}\langle\Psi| \\
&= \|\Psi\|^2\,|\Psi\rangle\langle\Psi|
\end{aligned}
$$

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самоспрегната: $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi_1}, \dots, \overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi_1} & \dots & \psi_1\overline{\psi_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi_1} & \dots & \psi_n\overline{\psi_n} \end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\Longleftrightarrow \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самоспрегната: $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Друг пример: $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi_1}, \dots, \overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi_1} & \dots & \psi_1\overline{\psi_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi_1} & \dots & \psi_n\overline{\psi_n} \end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотентна $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самоспрегната: $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система: $\langle u_{j_1} | u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2 \end{cases}$

Друг пример: $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотентна $\Longleftrightarrow \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самоспрегната: $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система: $\langle u_{j_1} | u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2 \end{cases}$

Тогава аналогично се пресмята:

$$\left(|u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|\right)^2 = |u_1\rangle\underbrace{\langle u_1|u_1\rangle}_{1}\langle u_1| + |u_1\rangle\underbrace{\langle u_1|u_2\rangle}_{0}\langle u_2| + \dots$$

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi_1},\dots,\overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi_1} & \dots & \psi_1\overline{\psi_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_n\overline{\psi_1} & \dots & \psi_n\overline{\psi_n}\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Извод : матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самосиргната : $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1,\dots,u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система : $\langle u_{j_1}|u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases}1, & j_1 = j_2\\ 0, & j_1 \neq j_2\end{cases}$

Тогава аналогично се пресмята :

$$\left(|u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|\right)^2 = |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$$

- отново е идемпотент
и отново е самоспрегнат

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi_1}, \dots, \overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi_1} & \dots & \psi_1\overline{\psi_n}\\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi_1} & \dots & \psi_n\overline{\psi_n}\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самосиргнатата : $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система : $\langle u_{j_1} | u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2 \end{cases}$

Тогава $P_{u_1, \dots, u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

Друг пример: $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi_1}, \dots, \overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi_1} & \dots & \psi_1\overline{\psi_n}\\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi_1} & \dots & \psi_n\overline{\psi_n}\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самосиргенната: $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система: $\langle u_{j_1} | u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2 \end{cases}$

Тогава $P_{u_1, \dots, u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

Върху какво проектира $P_{u_1, \dots, u_k}$?

Друг пример: $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n \end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самосиргената: $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система: $\langle u_{j_1} | u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2 \end{cases}$

Тогава $P_{u_1,\dots,u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

Върху какво проектира $P_{u_1,\dots,u_k}$? - нека $P_{u_1,\dots,u_k}\Psi = \Psi$

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \cdots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \cdots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самосиредната : $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система : $\langle u_{j_1} | u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2 \end{cases}$

Тогава $P_{u_1, \dots, u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

Върху какво проектира $P_{u_1, \dots, u_k}$? - нека $P_{u_1, \dots, u_k}\Psi = \Psi$

Тогава $|\Psi\rangle = (|u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|)|\Psi\rangle$

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Извод : матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\Longleftrightarrow \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самоспрегната : $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система : $\langle u_{j_1} | u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2 \end{cases}$

Тогава $P_{u_1, \dots, u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

Върху какво проектира $P_{u_1, \dots, u_k}$? - нека $P_{u_1, \dots, u_k}\Psi = \Psi$

Тогава $|\Psi\rangle = |u_1\rangle\langle u_1|\Psi\rangle + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|\Psi\rangle$

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi_1},\dots,\overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi_1} & \dots & \psi_1\overline{\psi_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_n\overline{\psi_1} & \dots & \psi_n\overline{\psi_n}\end{pmatrix}$

квадратна, $n\times n$ - матрица

Извод : матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\Longleftrightarrow \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самосиргената : $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1,\dots,u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система : $\langle u_{j_1}|u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases}1, & j_1=j_2\\ 0, & j_1\neq j_2\end{cases}$

Тогава $P_{u_1,\dots,u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

Върху какво проектира $P_{u_1,\dots,u_k}$? - нека $P_{u_1,\dots,u_k}\Psi = \Psi$

Тогава $|\Psi\rangle = (\langle u_1|\Psi\rangle)|u_1\rangle + \dots + (\langle u_k|\Psi\rangle)|u_k\rangle$

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n\times n$ - матрица

Извод : матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самоспрегната : $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система : $\langle u_{j_1} | u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2\end{cases}$

Тогава $P_{u_1,\dots,u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

Върху какво проектира $P_{u_1,\dots,u_k}$? - нека $P_{u_1,\dots,u_k}\Psi = \Psi$

Тогава $|\Psi\rangle = (\langle u_1|\Psi\rangle)|u_1\rangle + \dots + (\langle u_k|\Psi\rangle)|u_k\rangle$, т.е., $\iff \Psi \in \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{u_1, \dots, u_k\}$

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi_1},\dots,\overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi_1} & \dots & \psi_1\overline{\psi_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_n\overline{\psi_1} & \dots & \psi_n\overline{\psi_n}\end{pmatrix}$

квадратна, $n\times n$-матрица

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\Longleftrightarrow \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самосиретната : $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1,\dots,u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система: $\langle u_{j_1}|u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases}1, & j_1 = j_2\\ 0, & j_1 \neq j_2\end{cases}$

Тогава $P_{u_1,\dots,u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

И $P_{u_1,\dots,u_k}$ проектира ортогонално върху подпространството

$$W := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{u_1,\dots,u_k\} \subseteq \mathbb{C}^n .$$

Друг пример: $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$-матрица

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотент $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самоспрегната: $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система: $\langle u_{j_1} | u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2 \end{cases}$

Тогава $P_{u_1, \dots, u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

И $P_{u_1, \dots, u_k}$ проектира ортогонално върху подпространството

$W := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq \mathbb{C}^n$. Пишем също

$P_{u_1, \dots, u_k} \equiv P_W$ – ортогоналния проектор върху W.

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n\\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самоспрегната : $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система : $\langle u_{j_1} | u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2 \end{cases}$

Тогава $P_{u_1, \dots, u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

И $P_{u_1, \dots, u_k}$ проектира ортогонално върху подпространството

$W := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq \mathbb{C}^n$. Пишем също $P_{u_1, \dots, u_k} \equiv P_W$

Друг пример: $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \cdots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \cdots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$-матрица

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\Longleftrightarrow \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самоспрегната: $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система: $\langle u_{j_1} | u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2 \end{cases}$

Тогава $P_{u_1,\dots,u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \cdots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

И $P_{u_1,\dots,u_k}$ проектира ортогонално върху подпространството $W := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{u_1,\dots,u_k\} \subseteq \mathbb{C}^n$. Пишем също $P_{u_1,\dots,u_k} \equiv P_W$

Забележете: ако $\ell \le k$, то $P_{u_1,\dots,u_k} - P_{u_1,\dots,u_\ell} = P_{u_{\ell+1},\dots,u_k} \ge 0$

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n\times n$ - матрица

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самосиргеgната : $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система: $\langle u_{j_1} | u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2 \end{cases}$

Тогава $P_{u_1,\dots,u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

И $P_{u_1,\dots,u_k}$ проектира ортогонално върху подпространството

$W := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{u_1, \dots, u_k\} \leq \mathbb{C}^n$. Пишем също $P_{u_1,\dots,u_k} \equiv P_W$

Забележете: ако $\ell \leq k$, то $P_{u_1,\dots,u_k} - P_{u_1,\dots,u_\ell} = P_{u_{\ell+1},\dots,u_k} \geq 0$

понеже е орт. проектор

Друг пример: $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n\times n$ - матрица

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самосиргната: $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система: $\langle u_{j_1} | u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2\end{cases}$

Тогава $P_{u_1, \dots, u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

И $P_{u_1,\dots,u_k}$ проектира ортогонално върху подпространството $W := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{u_1, \dots, u_k\} \leq \mathbb{C}^n$. Пишем също $P_{u_1,\dots,u_k} \equiv P_W$

Забележете: ако $\ell \leq k$, то $P_{u_1,\dots,u_k} - P_{u_1,\dots,u_\ell} = P_{u_{\ell+1},\dots,u_k} \geq 0$

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n \end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Извод : матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотентна $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самоспрегната : $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система : $\langle u_{j_1} | u_{j_2} \rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2 \end{cases}$

Тогава $P_{u_1, \dots, u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

И $P_{u_1, \dots, u_k}$ проектира ортогонално върху подпространството $W := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq \mathbb{C}^n$. Пишем също $P_{u_1, \dots, u_k} \equiv P_W$

Забележете : ако $\ell \leq k$, то $P_{u_1, \dots, u_k} - P_{u_1, \dots, u_\ell} = P_{u_{\ell+1}, \dots, u_k} \geq 0$

Оттук следва $P_V \leq P_W \iff V \subseteq W$

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n \end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Извод : матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самосиpегната : $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система : $\langle u_{j_1} | u_{j_2} \rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2 \end{cases}$

Тогава $P_{u_1, \dots, u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

И $P_{u_1, \dots, u_k}$ проектира ортогонално върху подпространството

$W := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq \mathbb{C}^n$. Пишем също $P_{u_1, \dots, u_k} \equiv P_W$

Имаме : $P_V \leq P_W \iff V \subseteq W$

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Извод : матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самосиргнатата : $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Нека сега $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}^n$ е ортонормирана система : $\langle u_{j_1} | u_{j_2}\rangle = \delta_{j_1 j_2} := \begin{cases} 1, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_1 \neq j_2 \end{cases}$

Тогава $P_{u_1, \dots, u_k} := |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_k\rangle\langle u_k|$ е ортогонален проектор (събитие).

И $P_{u_1,\dots,u_k}$ проектира ортогонално върху подпространството

$W := Span_{\mathbb{C}}\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq \mathbb{C}^n$. Пишем също $P_{u_1, \dots, u_k} \equiv P_W$

Имаме : $P_V \leq P_W \iff V \subseteq W$

Тоест : квантово събитие в $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ е $\iff W \underset{\text{лин.}}{\subseteq} \mathbb{C}^n$, като

частичната наредба при това съответствие отговаря на "$\subseteq$"

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi_1}, \dots, \overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi_1} & \dots & \psi_1\overline{\psi_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi_1} & \dots & \psi_n\overline{\psi_n} \end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$-матрица

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\Longleftrightarrow \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самоспрегната: $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi_1}, \dots, \overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix} \psi_1 \overline{\psi_1} & \dots & \psi_1 \overline{\psi_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n \overline{\psi_1} & \dots & \psi_n \overline{\psi_n} \end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Извод: матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самоспрегната : $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Следователно : $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ за единичен вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n$

е общия вид на елементарните събития в $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$.

Друг пример : $|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi}_1 & \ldots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \ldots & \psi_n\overline{\psi}_n \end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Извод : матрицата $P_\Psi := |\Psi\rangle\langle\Psi|$ е идемпотен $\iff \|\Psi\| = 1$

Но тя е и самосиреогната : $(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^* = (\Psi\Psi^*)^* = \Psi^{**}\Psi^* = \Psi\Psi^*$

И така, P_Ψ е ортогонален проектор.

Следователно : $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ за единичен вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n$

е общия вид на елементарните събития в $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$.

т.е., тези събития Q, за които няма

строго по-малки от тях, ненулеви събития

Друг пример:
$$\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n)}_{\text{квадратна, } n\times n\text{-матрица}} = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n\\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$$

Друг пример: $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n \end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Нека Φ и Ψ - единични вектори. Да пресметнем

$$\langle P_\Psi \rangle_\Phi = ?$$

Друг пример: $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\bar\psi_1, \dots, \bar\psi_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\bar\psi_1 & \dots & \psi_1\bar\psi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\bar\psi_1 & \dots & \psi_n\bar\psi_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Нека Φ и Ψ - единични вектори. Да пресметнем

$\langle P_\Psi \rangle_\Phi = ?$ - вероятността за $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ в състоянието Φ

Друг пример: $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$-матрица

Нека Φ и Ψ – единични вектори. Да пресметнем

$$\langle P_\Psi\rangle_\Phi = \langle\Phi|P_\Psi\Phi\rangle$$

– вероятността за $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ в състоянието Φ

Друг пример: $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n \end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Нека Φ и Ψ - единични вектори. Да пресметнем

$$\langle P_\Psi \rangle_\Phi = \langle \Phi | P_\Psi \Phi \rangle = \langle \Phi | \big(|\Psi\rangle\langle\Psi| \big) | \Phi \rangle$$

- вероятността за $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ в състоянието Φ

Друг пример: $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$-матрица

Нека Φ и Ψ – единични вектори. Да пресметнем

$$\langle P_\Psi\rangle_\Phi = \langle\Phi|P_\Psi\Phi\rangle = \langle\Phi|\Psi\rangle\langle\Psi|\Phi\rangle$$

– вероятността за $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ в състоянието Φ

Друг пример: $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi_1}, \ldots, \overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi_1} & \cdots & \psi_1\overline{\psi_n}\\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi_1} & \cdots & \psi_n\overline{\psi_n}\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Нека Φ и Ψ - единични вектори. Да пресметнем

$$\langle P_\Psi \rangle_\Phi = \langle \Phi | P_\Psi \Phi \rangle = \langle \Phi | \Psi \rangle \overline{\langle \Phi | \Psi \rangle}$$

- вероятността за $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ в състоянието Φ

Друг пример: $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\bar{\psi}_1 & \dots & \psi_1\bar{\psi}_n\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_n\bar{\psi}_1 & \dots & \psi_n\bar{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$-матрица

Нека Φ и Ψ - единични вектори. Да пресметнем

$$\langle P_\Psi \rangle_\Phi = \langle \Phi | P_\Psi \Phi \rangle = |\langle \Phi | \Psi \rangle|^2$$

- вероятността за $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ в състоянието Φ

Друг пример: $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Нека Φ и Ψ - единични вектори. Да пресметнем

$$\langle P_\Psi\rangle_\Phi = \langle\Phi|P_\Psi\Phi\rangle = |\langle\Phi|\Psi\rangle|^2$$

- вероятността за $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ в състоянието Φ

$= \langle P_\Phi\rangle_\Psi$ - вероятността за P_Φ в Ψ.

Величината $|\langle\Phi|\Psi\rangle|^2$ за два вектора на състояния Φ и Ψ се нарича вероятност за преход $\Phi \to \Psi$

Друг пример: $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\bar\psi_1,\dots,\bar\psi_n)}_{\text{квадратна, } n\times n\text{-матрица}} = \begin{pmatrix}\psi_1\bar\psi_1 & \dots & \psi_1\bar\psi_n\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_n\bar\psi_1 & \dots & \psi_n\bar\psi_n\end{pmatrix}$

Нека Φ и Ψ - единични вектори. Да пресметнем

$$\langle P_\Psi\rangle_\Phi = \langle\Phi|P_\Psi\Phi\rangle = |\langle\Phi|\Psi\rangle|^2$$

- вероятността за $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ в състоянието Φ

$= \langle P_\Phi\rangle_\Psi$ - вероятността за P_Φ в Ψ.

Величината $|\langle\Phi|\Psi\rangle|^2$ за два вектора на състояния Φ и Ψ се нарича вероятност за преход $\Phi\to\Psi$ $(\Longleftrightarrow \Psi\to\Phi)$.

Друг пример : $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi_1},\dots,\overline{\psi_n})}_{\text{квадратна, } n\times n\text{-матрица}} = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi_1} & \dots & \psi_1\overline{\psi_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_n\overline{\psi_1} & \dots & \psi_n\overline{\psi_n}\end{pmatrix}$

Нека Φ и Ψ – единични вектори. Да пресметнем

$$\langle P_\Psi\rangle_\Phi = \langle\Phi|P_\Psi\Phi\rangle = |\langle\Phi|\Psi\rangle|^2$$

– вероятността за $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ в състоянието Φ

$= \langle P_\Phi\rangle_\Psi$ – вероятността за P_Φ в Ψ.

Величината $|\langle\Phi|\Psi\rangle|^2$ за два вектора на състояния Φ и Ψ се нарича вероятност за преход $\Phi\to\Psi$ $(\Leftrightarrow \Psi\to\Phi)$.

Тя зависи само от състоянията – не и от векторите-представители!

Друг пример : $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi_1},\dots,\overline{\psi_n}) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi_1} & \dots & \psi_1\overline{\psi_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_n\overline{\psi_1} & \dots & \psi_n\overline{\psi_n}\end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Нека Φ и Ψ - единични вектори. Да пресметнем

$$\langle P_\Psi \rangle_\Phi = \langle \Phi | P_\Psi \Phi \rangle = |\langle \Phi | \Psi \rangle|^2$$

- вероятността за $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ в състоянието Φ

$= \langle P_\Phi \rangle_\Psi$ - вероятността за P_Φ в Ψ.

Величината $|\langle\Phi|\Psi\rangle|^2$ за два вектора на състояния Φ и Ψ се нарича вероятност за преход $\Phi \to \Psi$ $(\Leftrightarrow \Psi \to \Phi)$.

Тя зависи само от състоянията - не и от векторите-представители!

Само скаларното произведение $\langle\Phi|\Psi\rangle$ се нарича амплитуда на вероятността.

Друг пример : $$\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \cdots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \cdots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$$

квадратна, $n\times n$ - матрица

Нека Φ и Ψ - единични вектори. Да пресметнем

$$\langle P_\Psi \rangle_\Phi = \langle \Phi | P_\Psi \Phi \rangle = |\langle \Phi | \Psi \rangle|^2$$

- вероятността за $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ в състоянието Φ

$= \langle P_\Phi \rangle_\Psi$ - вероятността за P_Φ в Ψ.

Величината $|\langle\Phi|\Psi\rangle|^2$ за два вектора на състояния Φ и Ψ се нарича

вероятност за преход $\Phi \to \Psi$ $(\Leftrightarrow \Psi \to \Phi)$.

Тя зависи само от състоянията - не и от векторите-представители!

Само скаларното произведение $\langle\Phi|\Psi\rangle$ се нарича амплитуда на вероятността.

- то зависи от избраните вектори-представители на състоянията.

Друг пример: $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n \end{pmatrix}$

квадратна, $n \times n$ - матрица

Нека Φ и Ψ - единични вектори.

$$\langle P_\Psi \rangle_\Phi = |\langle \Phi | \Psi \rangle|^2 = \langle P_\Phi \rangle_\Psi$$

= вероятност за преход $\Phi \to \Psi$ ($\Leftrightarrow$ $\Psi \to \Phi$).

Друг пример : $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} (\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n \end{pmatrix}}_{\text{квадратна, } n\times n\text{-матрица}}$

Нека Φ и Ψ – единични вектори.

$$\langle P_\Psi \rangle_\Phi = |\langle \Phi | \Psi \rangle|^2 = \langle P_\Phi \rangle_\Psi$$

= вероятност за преход $\Phi \to \Psi$ ($\iff \Psi \to \Phi$).

Забележете : $|\langle \Phi | \Psi \rangle|^2 \leq \|\Phi\|^2 \, \|\Psi\|^2 = 1$ – по неравенството на Коши – Шварц

Друг пример: $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n)}_{\text{квадратна, } n\times n\text{-матрица}} = \begin{pmatrix}\psi_1\bar{\psi}_1 & \dots & \psi_1\bar{\psi}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\bar{\psi}_1 & \dots & \psi_n\bar{\psi}_n\end{pmatrix}$

Нека Φ и Ψ – единични вектори.

$$\langle P_\Psi\rangle_\Phi = |\langle\Phi|\Psi\rangle|^2 = \langle P_\Phi\rangle_\Psi$$

= вероятност за преход $\Phi \to \Psi$ ($\Longleftrightarrow \Psi \to \Phi$).

Забележете: $|\langle\Phi|\Psi\rangle|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{равенство се достига}}}{\leq} \|\Phi\|^2 \|\Psi\|^2 = 1$ – по неравенството на Коши – Шварц

равенство се достига $\Longleftrightarrow \Phi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{пропорционални}}}{\sim} \Psi$, т.е. Φ и Ψ определят едно и също състояние

Друг пример : $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n) = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

квадратна, $n\times n$-матрица

Нека Φ и Ψ - единични вектори.

$$\langle P_\Psi\rangle_\Phi = |\langle\Phi|\Psi\rangle|^2 = \langle P_\Phi\rangle_\Psi$$

= вероятност за преход $\Phi\to\Psi$ ($\Leftrightarrow$ $\Psi\to\Phi$).

Следствие :

Друг пример: $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \dots, \overline{\psi}_n)}_{\text{квадратна, } n\times n\text{-матрица}} = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_1\overline{\psi}_n\\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \dots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

Нека Φ и Ψ – единични вектори.

$$\langle P_\Psi\rangle_\Phi = |\langle\Phi|\Psi\rangle|^2 = \langle P_\Phi\rangle_\Psi$$

$=$ вероятност за преход $\Phi \to \Psi$ ($\Longleftrightarrow$ $\Psi \to \Phi$).

Следствие:

(1) За $\forall$ чисто състояние ρ $\exists!$ елементарно събитие Q, за което $\langle Q\rangle_\rho =$ вероятността на Q в ρ $= 1$.

Друг пример : $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}(\bar\psi_1, \dots, \bar\psi_n)}_{\text{квадратна, } n\times n\text{-матрица}} = \begin{pmatrix}\psi_1\bar\psi_1 & \dots & \psi_1\bar\psi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n\bar\psi_1 & \dots & \psi_n\bar\psi_n\end{pmatrix}$

Нека Φ и Ψ - единични вектори.

$$\langle P_\Psi\rangle_\Phi = |\langle\Phi|\Psi\rangle|^2 = \langle P_\Phi\rangle_\Psi$$

= вероятност за преход $\Phi \to \Psi$ ($\Leftrightarrow$ $\Psi \to \Phi$).

Следствие :

(1) За $\forall$ чисто състояние ρ $\exists!$ елементарно събитие Q, за което $\langle Q\rangle_\rho$ = вероятността на Q в ρ = 1.

(2) За $\forall$ елементарно събитие Q, $\exists!$ чисто състояние ρ, за което $\langle Q\rangle_\rho$ = вероятността на Q в ρ = 1.

Друг пример : $\underbrace{|\Psi\rangle\langle\Psi|}_{\text{елементарно събитие}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_n)}_{\text{квадратна, } n \times n\text{-матрица}} = \begin{pmatrix}\psi_1\overline{\psi}_1 & \ldots & \psi_1\overline{\psi}_n\\ \vdots & & \vdots\\ \psi_n\overline{\psi}_1 & \ldots & \psi_n\overline{\psi}_n\end{pmatrix}$

Нека Φ и Ψ – единични вектори.

$$\langle P_\Psi\rangle_\Phi = |\langle\Phi|\Psi\rangle|^2 = \langle P_\Phi\rangle_\Psi$$

= вероятност за преход $\Phi \to \Psi$ ($\Leftrightarrow \Psi \to \Phi$).

Следствие :

(1) За $\forall$ чисто състояние ρ $\exists!$ елементарно събитие Q, за което $\langle Q\rangle_\rho$ = вероятността на Q в ρ = 1.

(2) За $\forall$ елементарно събитие Q, $\exists!$ чисто състояние ρ, за което $\langle Q\rangle_\rho$ = вероятността на Q в ρ = 1.

Това установява 1-1 съответствие между чисти състояния и елементарни събития.

Квантови трансформации

Квантови трансформации

наблюдаеми – състояния

Квантови трансформации

картина
на
Хайзенберг

наблюдаеми – състояния

Квантови трансформации

картина на Хайзенберг

наблюдаеми – състояния

картина на Шрьодингер

Квантови трансформации

картина на Хайзенберг

алтернативни картини

наблюдаеми – състояния

картина на Шрьодингер

Квантови трансформации

картина на Хайзенберг

алтернативни картини

наблюдаеми – състояния

картина на Шрьодингер

автоморфизми на алгебри : $A \xmapsto{\tau} A'$

Квантови трансформации

алтернативни картини

картина на Хайзенберг

наблюдаеми – състояния

картина на Шрьодингер

автоморфизми на алгебри : $A \overset{\tau}{\longmapsto} A'$

$\Psi \overset{U}{\longmapsto} \Psi'$ унитарни трансформации

Квантови трансформации

алтернативни картини

картина на Хайзенберг

наблюдаеми – състояния

картина на Шрьодингер

автоморфизми на алгебри : $A \overset{\tau}{\longmapsto} A'$

$\Psi \overset{U}{\longmapsto} \Psi'$ унитарни трансформации

$$\langle A \rangle_{\Psi}$$

физически наблюдаемия ефект от квантови трансформации е изменението на средните стойности

Квантови трансформации

картина на Хайзенберг

алтернативни картини

картина на Шрьодингер

наблюдаеми – състояния

автоморфизми на алгебри : $A \overset{\tau}{\longmapsto} A'$

$\Psi \overset{U}{\longmapsto} \Psi'$ унитарни трансформации

$$\langle A \rangle_{\Psi} \longmapsto \langle A' \rangle_{\Psi} = \langle A \rangle_{\Psi'}$$

физически наблюдаемия ефект от квантови трансформации е изменението на средните стойности

Квантови трансформации

алтернативни картини

картина на Хайзенберг

картина на Шрьодингер

наблюдаеми – състояния

автоморфизми на алгебри : $A \xmapsto{\tau} A'$

$\Psi \xmapsto{U} \Psi'$ унитарни трансформации

физически наблюдаемия ефект от квантови трансформации е изменението на средните стойности

$$\langle A \rangle_{\Psi} \longmapsto \langle A' \rangle_{\Psi} = \langle A \rangle_{\Psi'}$$

⇒ това изменение трябва да се описва еднакво при двете картини

Квантови трансформации

алтернативни картини

картина на Хайзенберг

картина на Шрьодингер

наблюдаеми – състояния

автоморфизми на алгебри : $A \xrightarrow{\tau} A'$

$\Psi \xrightarrow{U} \Psi'$ унитарни трансформации

физически наблюдаемия ефект от квантови трансформации е изменението на средните стойности

$$\langle A \rangle_\Psi \longmapsto \underbrace{\langle A' \rangle_\Psi = \langle A \rangle_{\Psi'}}$$

⇒ това изменение трябва да се описва еднакво при двете картини ⇒ условие за съгласуване

Квантови трансформации

картина на Хайзенберг

алтернативни картини

картина на Шрьодингер

наблюдаеми – състояния

автоморфизми на алгебри : $A \overset{\tau}{\longmapsto} A'$

$\Psi \overset{U}{\longmapsto} \Psi'$ унитарни трансформации

физически наблюдаемия ефект от квантови трансформации е изменението на средните стойности

$$\langle A \rangle_\Psi \longmapsto \underbrace{\langle A' \rangle_\Psi = \langle A \rangle_{\Psi'}}$$

$$\langle \Psi | \tau(A) \Psi \rangle = \langle U\Psi | A U \Psi \rangle \quad \Longleftarrow$$

условие за съгласуване

Квантови трансформации

алтернативни картини

картина на Хайзенберг

наблюдаеми – състояния

картина на Шрьодингер

автоморфизми на алгебри : $A \xmapsto{\tau} A'$

$\Psi \xmapsto{U} \Psi'$ унитарни трансформации

физически наблюдаемия ефект от квантови трансформации е изменението на средните стойности

$$\langle A \rangle_{\Psi} \longmapsto \underbrace{\langle A' \rangle_{\Psi} = \langle A \rangle_{\Psi'}}$$

$$\langle \Psi | \underbrace{\tau(A)}_{A'} \Psi \rangle = \langle \underbrace{U\Psi}_{\Psi'} | A \underbrace{U\Psi}_{\Psi'} \rangle \quad \Leftarrow$$

условие за съгласуване

Квантови трансформации

картина на Хайзенберг

алтернативни картини

картина на Шрьодингер

наблюдаеми – състояния

автоморфизми на алгебри : $A \overset{\tau}{\longmapsto} A'$

$\Psi \overset{U}{\longmapsto} \Psi'$ унитарни трансформации

физически наблюдаемия ефект от квантови трансформации е изменението на средните стойности

$$\langle A \rangle_{\Psi} \longmapsto \underbrace{\langle A' \rangle_{\Psi} = \langle A \rangle_{\Psi'}}$$

$$\langle \Psi | \tau(A)\Psi \rangle = \langle U\Psi | A U \Psi \rangle \Leftarrow$$

условие за съгласуване

Квантови трансформации

алтернативни картини

картина на Хайзенберг

наблюдаеми – състояния

картина на Шрьодингер

автоморфизми на алгебри : $A \overset{\tau}{\longmapsto} A'$

$\Psi \overset{U}{\longmapsto} \Psi'$ унитарни трансформации

физически наблюдаемия ефект от квантови трансформации е изменението на средните стойности

$$\langle A \rangle_\Psi \longmapsto \underbrace{\langle A' \rangle_\Psi = \langle A \rangle_{\Psi'}}_{\text{условие за съгласуване}}$$

$$\langle \Psi | \tau(A) \Psi \rangle = \langle U \Psi | A U \Psi \rangle \Longleftarrow$$

Квантови трансформации

алтернативни картини

картина на Хайзенберг

картина на Шрьодингер

наблюдаеми – състояния

автоморфизми на алгебри : $A \stackrel{\tau}{\longmapsto} A'$

$\Psi \stackrel{U}{\longmapsto} \Psi'$ унитарни трансформации

физически наблюдаемия ефект от квантови трансформации е изменението на средните стойности

$$\langle A \rangle_{\Psi} \longmapsto \underbrace{\langle A' \rangle_{\Psi} = \langle A \rangle_{\Psi'}}$$

$$\langle \Psi | \tau(A) \Psi \rangle = \langle \Psi | U^{*} A \, U \Psi \rangle \Longleftarrow$$

условие за съгласуване

Квантови трансформации

картина на Хайзенберг

алтернативни картини

картина на Шрьодингер

наблюдаеми – състояния

автоморфизми на алгебри : $A \overset{\tau}{\longmapsto} A'$

$\Psi \overset{U}{\longmapsto} \Psi'$ унитарни трансформации

физически наблюдаемия ефект от квантови трансформации е изменението на средните стойности

$$\langle A \rangle_{\Psi} \longmapsto \underbrace{\langle A' \rangle_{\Psi} = \langle A \rangle_{\Psi'}}$$

$$\langle \Psi | (\tau(A) - U^{*} A U) \Psi \rangle = 0 \quad \Longleftarrow$$ условие за съгласуване

Квантови трансформации

картина на Хайзенберг

алтернативни картини

картина на Шрьодингер

наблюдаеми – състояния

автоморфизми на алгебри : $A \xmapsto{\tau} A'$

$\Psi \xmapsto{U} \Psi'$ унитарни трансформации

физически наблюдаемия ефект от квантови трансформации е изменението на средните стойности

$$\langle A \rangle_{\Psi} \longmapsto \underbrace{\langle A' \rangle_{\Psi} = \langle A \rangle_{\Psi'}}_{\text{условие за съгласуване}}$$

$$\langle \Psi | (\tau(A) - U^{*} A U) \Psi \rangle = 0 \quad (\forall \Psi) \Longleftarrow$$

Квантови трансформации

алтернативни картини

картина на Хайзенберг

наблюдаеми – състояния

картина на Шрьодингер

автоморфизми на алгебри : $A \overset{\tau}{\longmapsto} A'$

$\Psi \overset{U}{\longmapsto} \Psi'$ унитарни трансформации

физически наблюдаемия ефект от квантови трансформации е изменението на средните стойности

$$\langle A \rangle_\Psi \longmapsto \underbrace{\langle A' \rangle_\Psi = \langle A \rangle_{\Psi'}}_{\text{условие за съгласуване}}$$

$$\langle \Psi | (\tau(A) - U^* A U)\Psi \rangle = 0 \quad (\forall \Psi) \Longleftarrow$$

теорема от функционалния анализ гласи, че

ако $\forall \Psi : \langle \Psi | C \Psi \rangle = 0$ и $C = C^*$, то $C = 0$.

Квантови трансформации

алтернативни картини

картина на Хайзенберг

картина на Шрьодингер

наблюдаеми – състояния

автоморфизми на алгебри : $A \overset{\tau}{\longmapsto} A'$

$\Psi \overset{U}{\longmapsto} \Psi'$ унитарни трансформации

физически наблюдаемия ефект от квантови трансформации е изменението на средните стойности

$$\langle A \rangle_\Psi \longmapsto \underbrace{\langle A' \rangle_\Psi = \langle A \rangle_{\Psi'}}_{\text{условие за съгласуване}}$$

$$\tau(A) - U^* A U = 0 \quad \Longleftarrow$$

теорема от функционалния анализ гласи, че

ако $\forall \Psi : \langle \Psi | C \Psi \rangle = 0$ и $C = C^*$, то $C = 0$.

Квантови трансформации

картина на Хайзенберг

алтернативни картини

картина на Шрьодингер

наблюдаеми – състояния

автоморфизми на алгебри : $A \overset{\tau}{\longmapsto} A'$

$\Psi \overset{U}{\longmapsto} \Psi'$ унитарни трансформации

физически наблюдаемия ефект от квантови трансформации е изменението на средните стойности

$$\langle A \rangle_{\Psi} \longmapsto \underbrace{\langle A' \rangle_{\Psi} = \langle A \rangle_{\Psi'}}_{\text{условие за съгласуване}}$$

$$\tau(A) = U^{*} A U \quad \Longleftarrow$$

Забележете: за всяки унитарен елемент $U \in \mathcal{A}$ (дори когато е произволна)

т.е., $U^* = U^{-1}$, е в сила, че съответствието $A \longmapsto UAU^{-1}$ има свойствата

Забележете: за всяки унитарен елемент $U \in \mathcal{A}$ (дори когато е произволна) т.е., $U^* = U^{-1}$, е в сила, че съответствието $A \longmapsto UAU^{-1}$ има свойствата

1) $UABU^{-1} = (UAU^{-1})(UBU^{-1})$

<u>Забележете:</u> за всяки унитарен елемент $U \in \mathcal{A}$ (дори когато е произволна)

т.е., $U^* = U^{-1}$, е в сила, че съответствието $A \longmapsto UAU^{-1}$ има свойствата

1) $UABU^{-1} = (UAU^{-1})(UBU^{-1})$

2) $U\hat{1}U^{-1} = \hat{1}$

<u>Забележете:</u> за всяки унитарен елемент $U \in \mathcal{A}$ (дори когато е произволна)

т.е., $U^* = U^{-1}$, е в сила, че съответствието $A \longmapsto UAU^{-1}$ има свойствата

1) $UABU^{-1} = (UAU^{-1})(UBU^{-1})$
2) $U\hat{1}U^{-1} = \hat{1}$
3) $UA^*U^{-1} = (UA^*U^*)^{**} = (U^{**}A^{**}U^*)^* = (UAU^*)^* = (UAU^{-1})^*$

__Забележете:__ за всяки унитарен елемент $U \in \mathcal{A}$ (дори когато е произволна) т.е., $U^* = U^{-1}$, е в сила, че съответствието $A \longmapsto UAU^{-1}$ има свойствата

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad UABU^{-1} = (UAU^{-1})(UBU^{-1}) \\ &2)\quad U\hat{1}U^{-1} = \hat{1} \\ &3)\quad UA^*U^{-1} = (UAU^{-1})^* \end{aligned}\right\} \text{ морфизъм на } *\text{-алгебра с } \hat{1}.$$

Забележете: за всяки унитарен елемент $U \in \mathcal{A}$ (дори когато е произволна) т.е., $U^* = U^{-1}$, е в сила, че съответствието $A \longmapsto UAU^{-1}$ има свойствата

$$\left.\begin{aligned}
&1)\quad UABU^{-1} = (UAU^{-1})(UBU^{-1}) \\
&2)\quad U\hat{1}U^{-1} = \hat{1} \\
&3)\quad UA^*U^{-1} = (UAU^{-1})^*
\end{aligned}\right\}\ \text{морфизъм на } *\text{-алгебра с } \hat{1}.$$

Тези автоморфизми на $\mathcal{A}$ се наричат вътрешни.

Забележете: за всяки унитарен елемент $U \in \mathcal{A}$ (дори когато е произволна) т.е., $U^* = U^{-1}$, е в сила, че съответствието $A \longmapsto UAU^{-1}$ има свойствата

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ UABU^{-1} = (UAU^{-1})(UBU^{-1}) \\ 2)\ U\hat{1}U^{-1} = \hat{1} \\ 3)\ UA^*U^{-1} = (UAU^{-1})^* \end{array}\right\} \text{морфизъм на } * \text{-алгебра с } \hat{1}.$$

Тези автоморфизми на $\mathcal{A}$ се наричат вътрешни.

Има теорема: ако $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$, то всички автоморфизми са вътрешни.

Забележете: за всяки унитарен елемент $U \in \mathcal{A}$ (дори когато е произволна) т.е., $U^* = U^{-1}$, е в сила, че съответствието $A \longmapsto UAU^{-1}$ има свойствата

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ UABU^{-1} = (UAU^{-1})(UBU^{-1}) \\ 2)\ U\hat{1}U^{-1} = \hat{1} \\ 3)\ UA^*U^{-1} = (UAU^{-1})^* \end{array}\right\} \text{морфизъм на } * \text{-алгебра с } \hat{1}.$$

Тези автоморфизми на $\mathcal{A}$ се наричат вътрешни.

Има теорема: ако $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$, то всички автоморфизми са вътрешни.

За по-общи алгебри на наблюдаеми, това е така ако те имат 1 сектор, т.е., ако всеки две техни чисти състояния могат да се реализират с вектори едновременно в едно и също хилбертово пространство.

<u>Забележете:</u> за всяки унитарен елемент $U \in \mathcal{A}$ (дори когато е произволна) т.е., $U^* = U^{-1}$, е в сила, че съответствието $A \longmapsto UAU^{-1}$ има свойствата

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ UABU^{-1} = (UAU^{-1})(UBU^{-1}) \\ 2)\ U\hat{1}U^{-1} = \hat{1} \\ 3)\ UA^*U^{-1} = (UAU^{-1})^* \end{array}\right\} \text{морфизъм на } *\text{-алгебра с } \hat{1}.$$

Тези автоморфизми на $\mathcal{A}$ се наричат вътрешни.

Има теорема: ако $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$, то всички автоморфизми са вътрешни.

За по-общи алгебри на наблюдаеми, това е така ако те имат 1 сектор, т.е., ако всеки две техни чисти състояния могат да се реализират с вектори едновременно в едно и също хилбертово пространство. Такава е ситуацията в квантовата механика на системи с краен брой степени на свобода.

Забележете: за всяки унитарен елемент $U \in \mathcal{A}$ (дори когато е произволна) т.е., $U^* = U^{-1}$, е в сила, че съответствието $A \longmapsto UAU^{-1}$ има свойствата

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ UABU^{-1} = (UAU^{-1})(UBU^{-1}) \\ 2)\ U\hat{1}U^{-1} = \hat{1} \\ 3)\ UA^*U^{-1} = (UAU^{-1})^* \end{array}\right\} \text{морфизъм на } * \text{-алгебра с } \hat{1}.$$

Тези автоморфизми на $\mathcal{A}$ се наричат вътрешни.

Има теорема: ако $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$, то всички автоморфизми са вътрешни.

За по-общи алгебри на наблюдаеми, това е така ако те имат 1 сектор, т.е., ако всеки две техни чисти състояния могат да се реализират с вектори едновременно в едно и също хилбертово пространство. Такава е ситуацията в квантовата механика на системи с краен брой степени на свобода. В КТП и Стат. Физ., където системите са с безкраен брой степени на свобода не всеки автоморфизъм е унитарно представим (т.е., вътрешен).

Забележете: за всяки унитарен елемент $U \in \mathcal{A}$ (дори когато е произволна) т.е., $U^* = U^{-1}$, е в сила, че съответствието $A \longmapsto UAU^{-1}$ има свойствата

$$\left.\begin{aligned} &1)\ UABU^{-1} = (UAU^{-1})(UBU^{-1}) \\ &2)\ U\hat{1}U^{-1} = \hat{1} \\ &3)\ UA^*U^{-1} = (UAU^{-1})^* \end{aligned}\right\} \text{морфизъм на } *\text{-алгебра с } \hat{1}.$$

Тези автоморфизми на $\mathcal{A}$ се наричат вътрешни.

Има теорема: ако $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$, то всички автоморфизми са вътрешни.

За по-общи алгебри на наблюдаеми, това е така ако те имат 1 сектор, т.е., ако всеки две техни чисти състояния могат да се реализират с вектори едновременно в едно и също хилбертово пространство. Такава е ситуацията в квантовата механика на системи с краен брой степени на свобода. В КТП и Стат. Физ., където системите са с безкраен брой степени на свобода не всеки автоморфизъм е унитарно представим (т.е., вътрешен). За това по принцип в тази ситуация картината на Хайзенберг е по-общата картина.

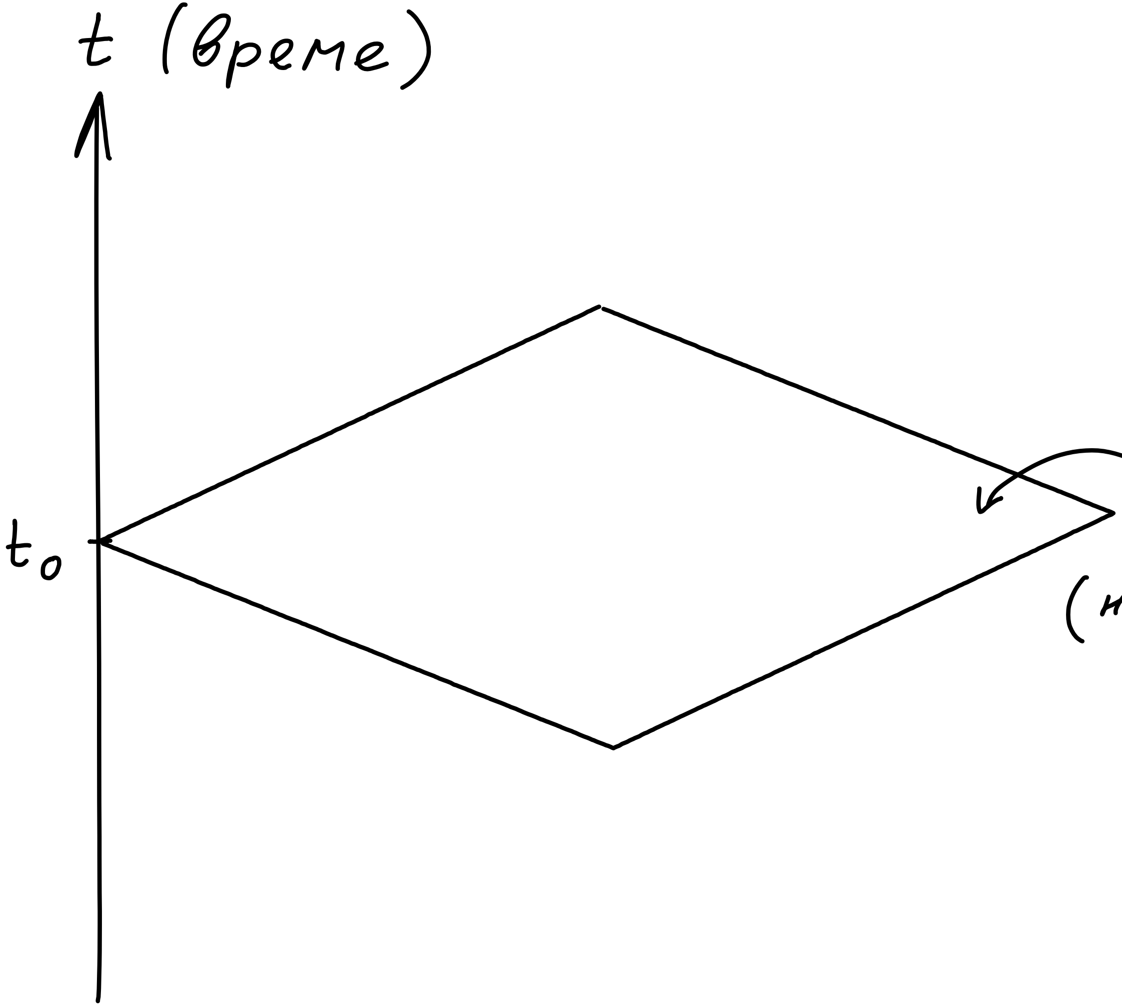
Преглед на нестационарната теория на разсейването

(Повече детайли в

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qft2013/NN_QFT_Lecture_3_v2.pdf

от стр. 11 до края)

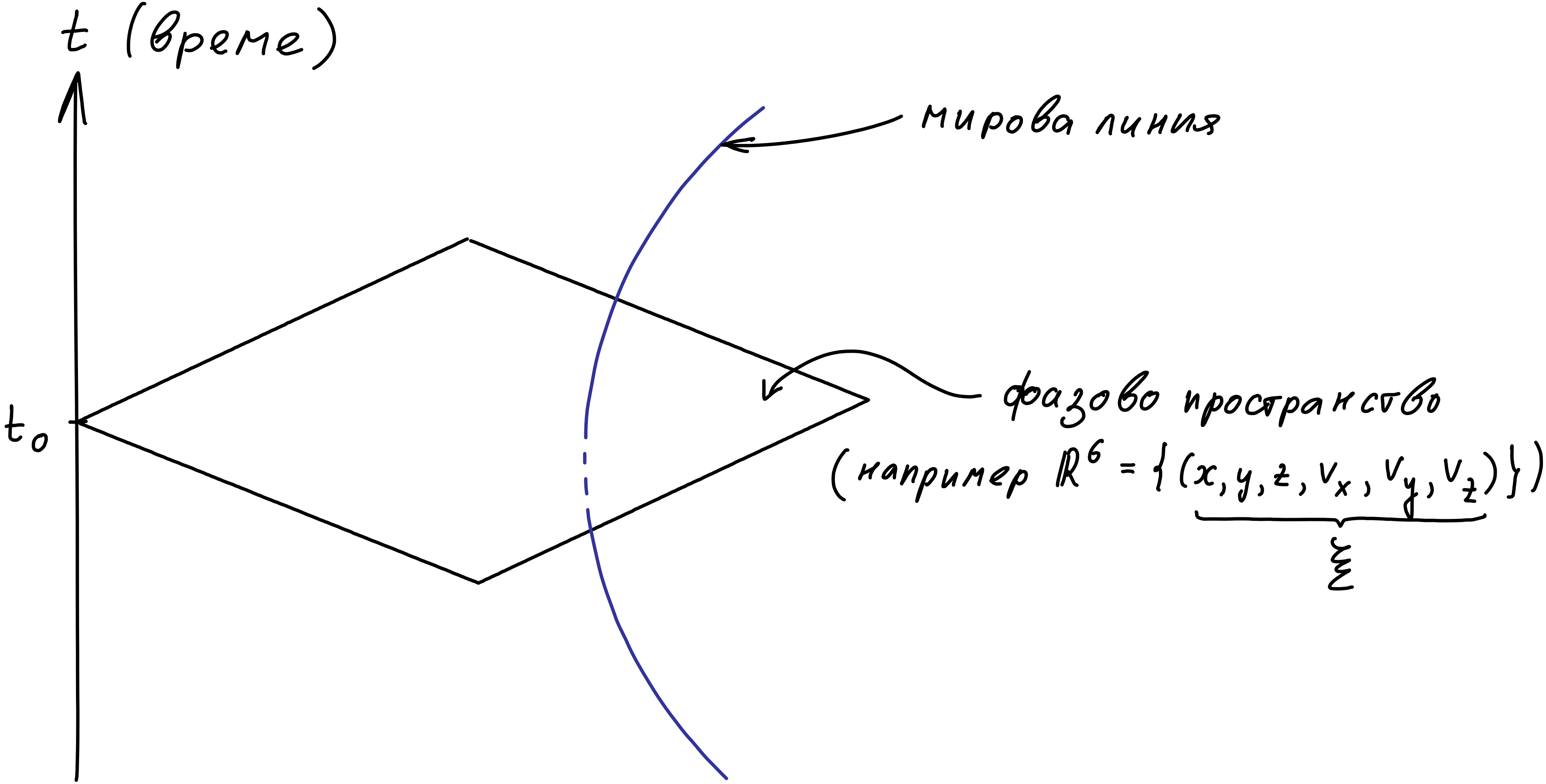
Гледна точка на мирова линия:



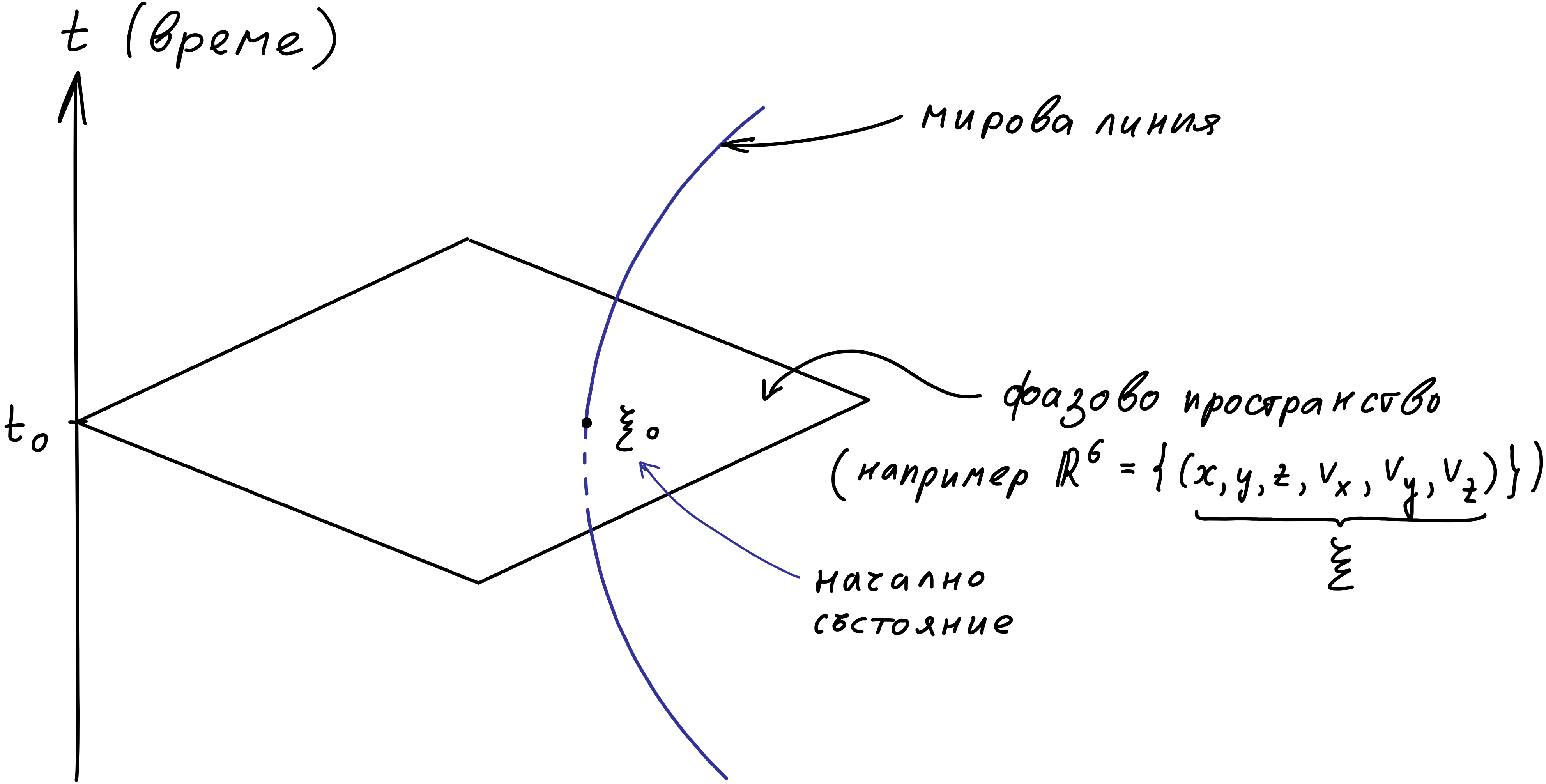
фазово пространство

(например $\mathbb{R}^6 = \{\underbrace{(x, y, z, v_x, v_y, v_z)}_{\xi}\}$)

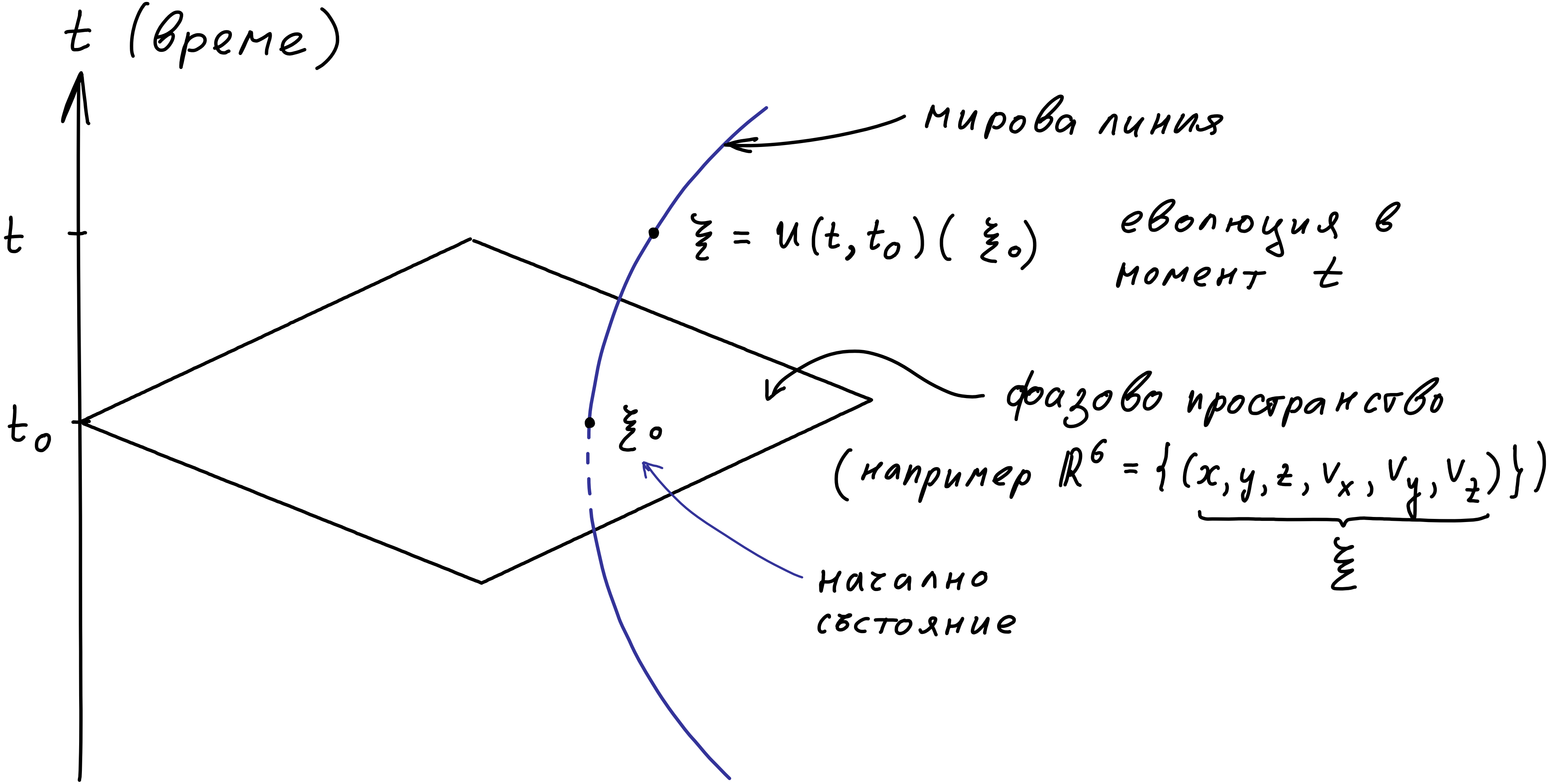
Гледна точка на мирова линия:



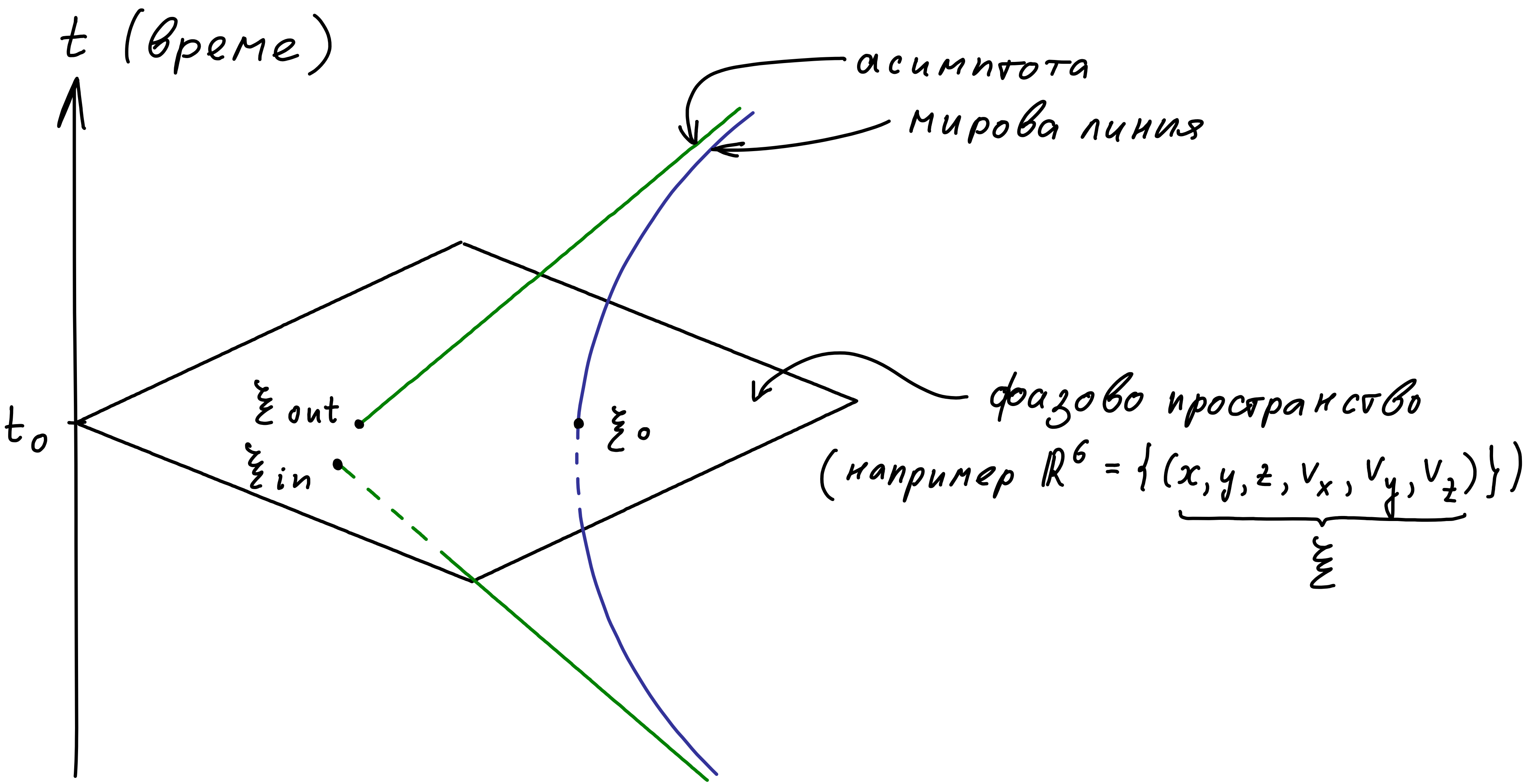
Гледна точка на мирова линия:



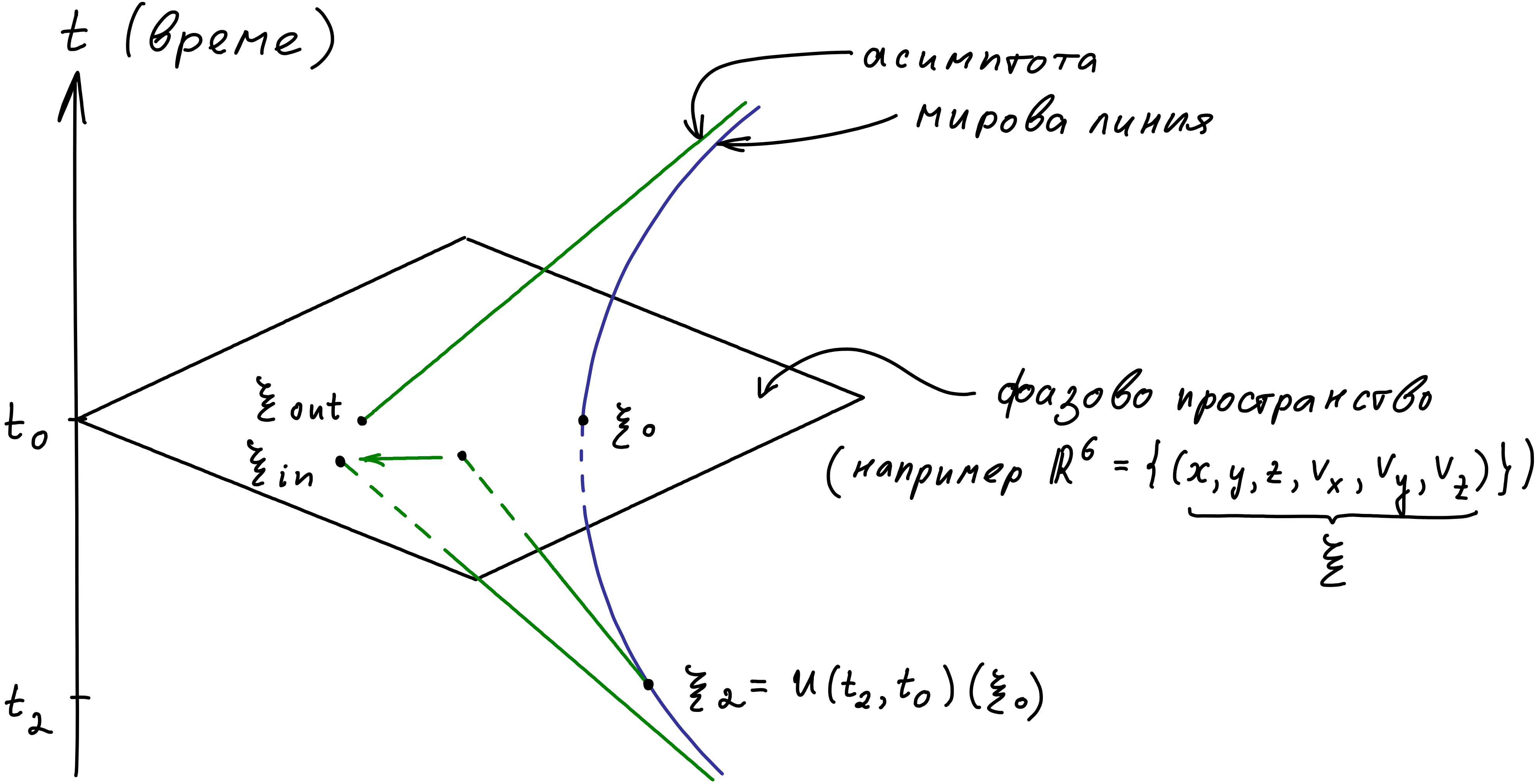
Гледна точка на мирова линия:



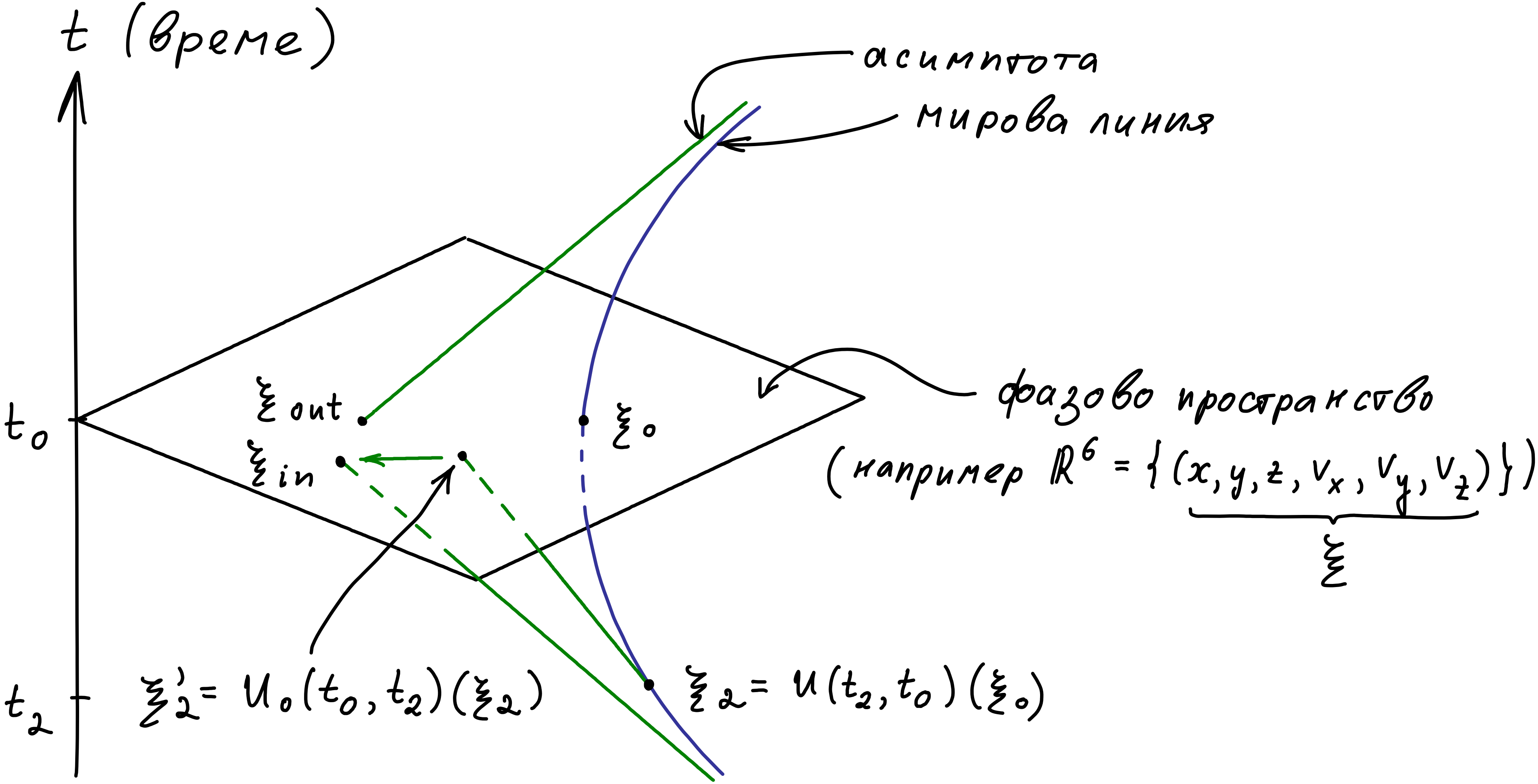
Гледна точка на мирова линия:



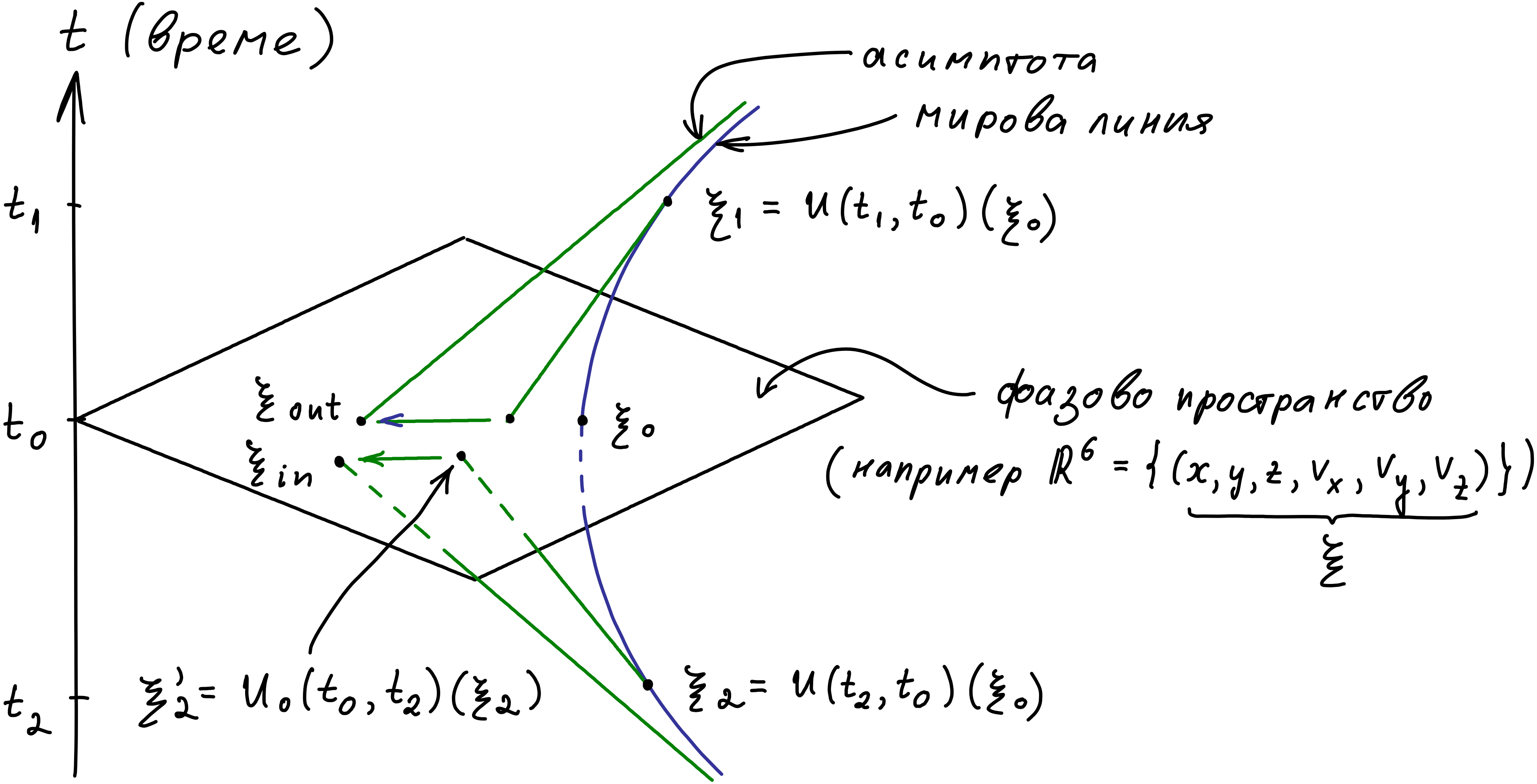
Гледна точка на мирова линия:



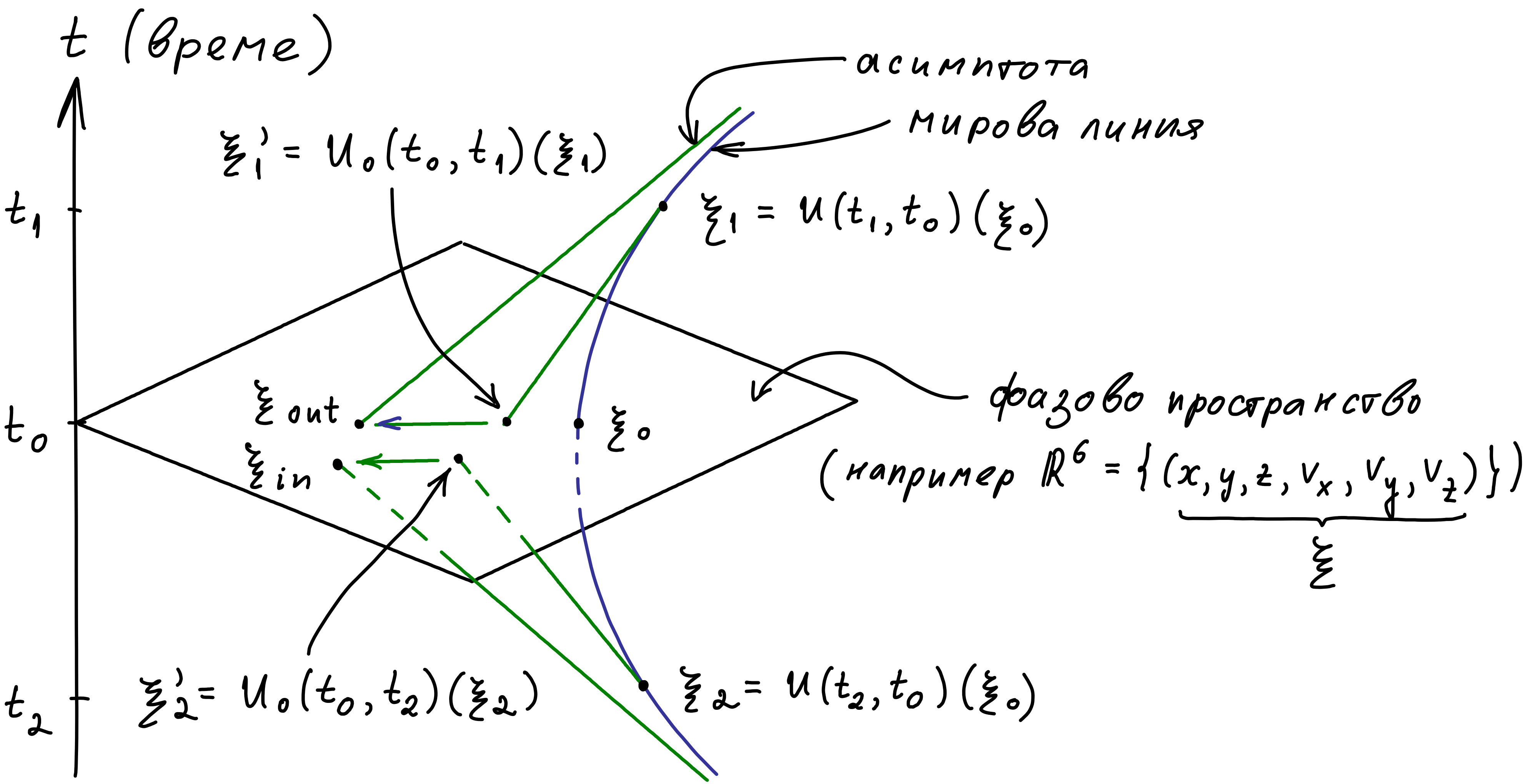
Гледна точка на мирова линия:



Гледна точка на мирова линия:

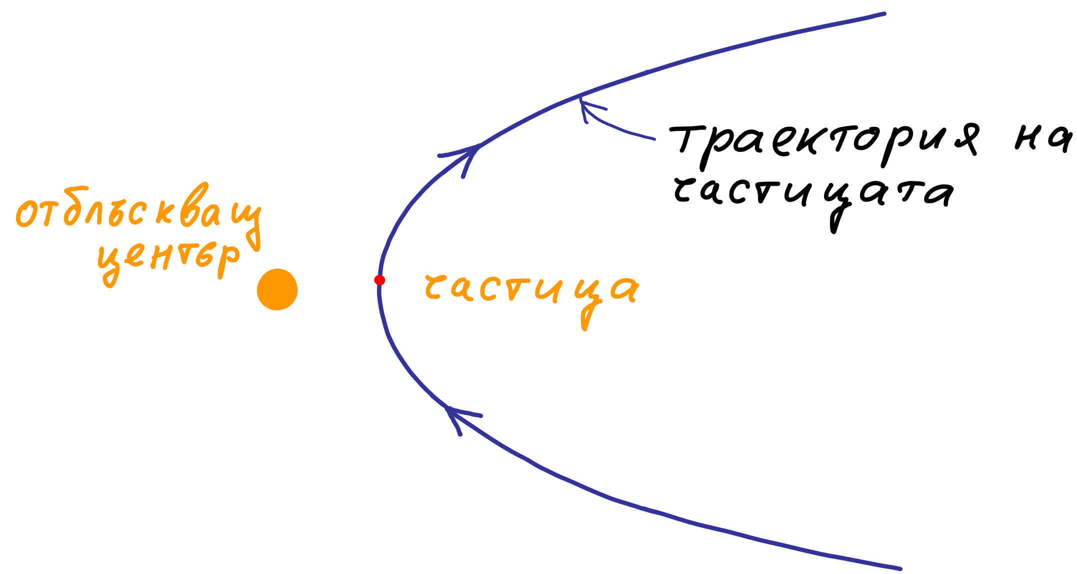


Гледна точка на мирова линия:



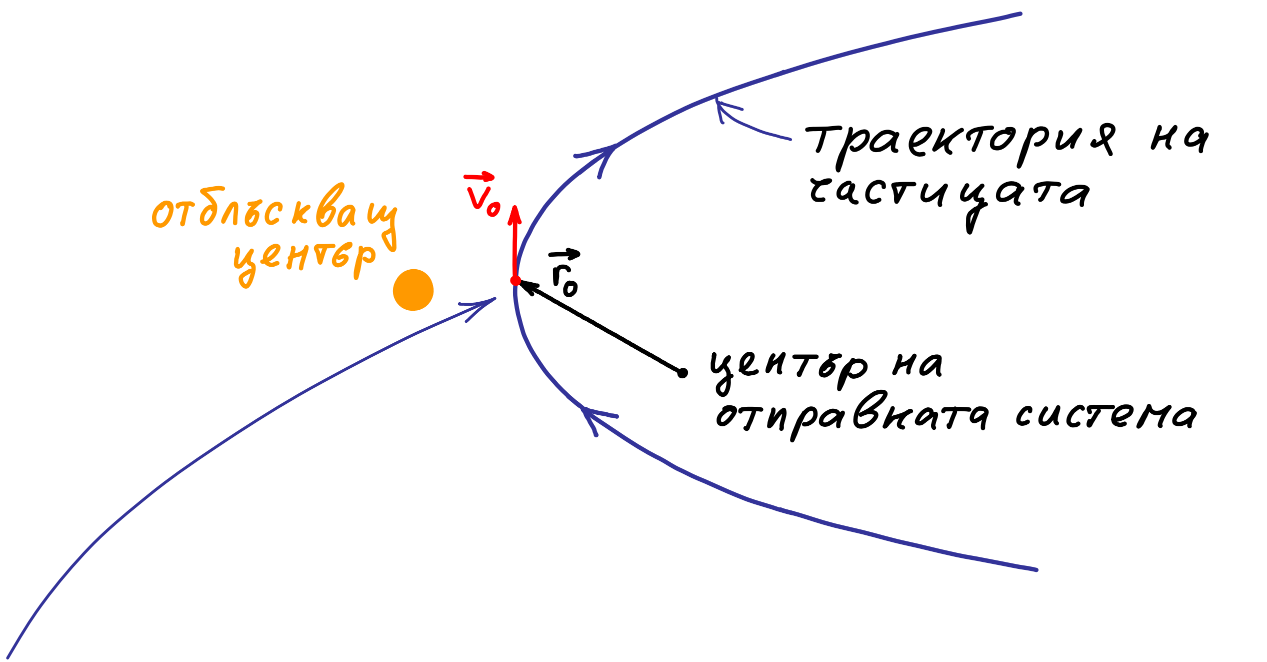
Гледна точка на траектория

конфигурационно пространство $\mathbb{R}^3$



Гледна точка на траектория

конфигурационно пространство $\mathbb{R}^3$

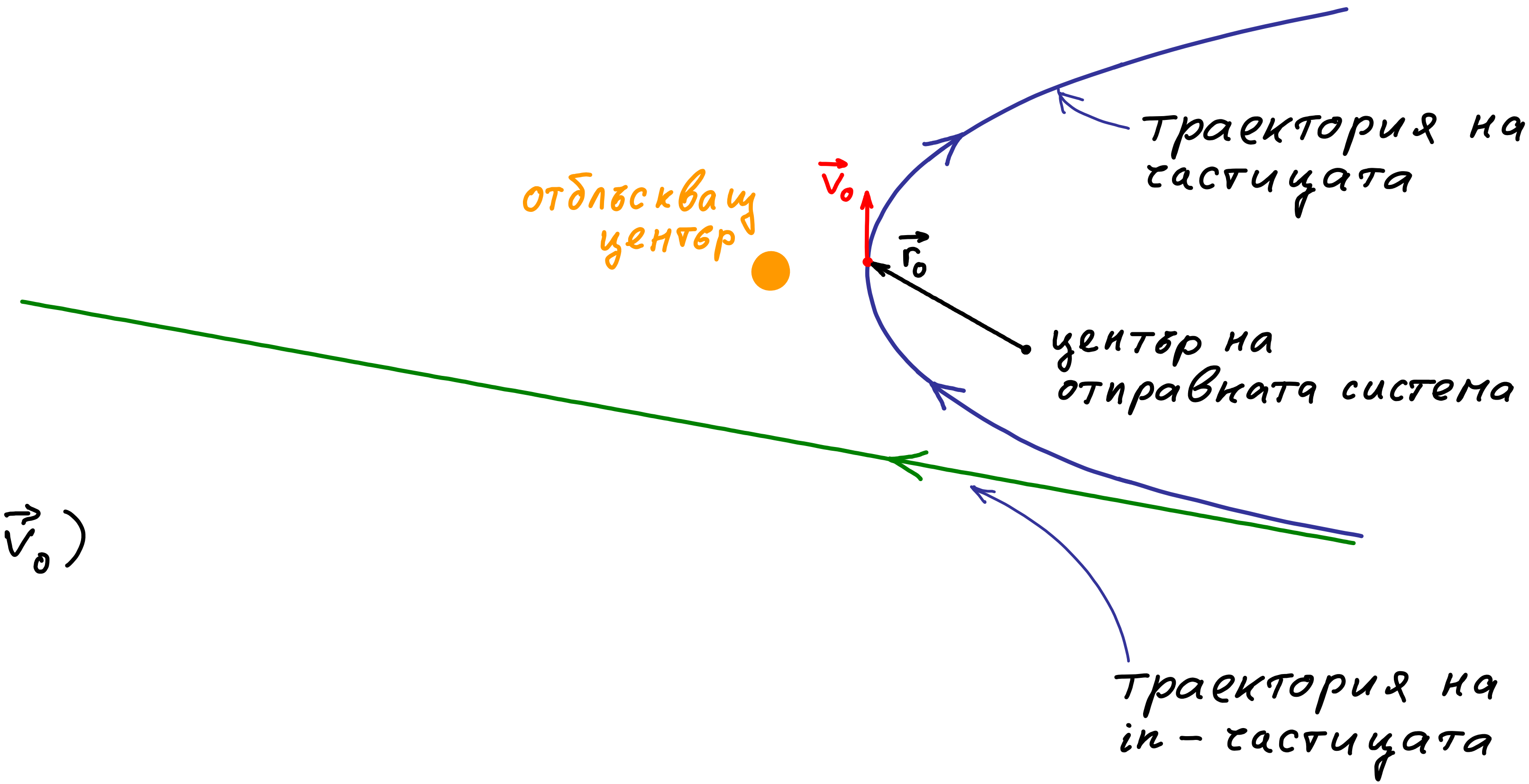


$$\xi_0 = (\vec{r}_0, \vec{v}_0)$$

положение и скорост на частицата и в момента t_0

Гледна точка на траектория

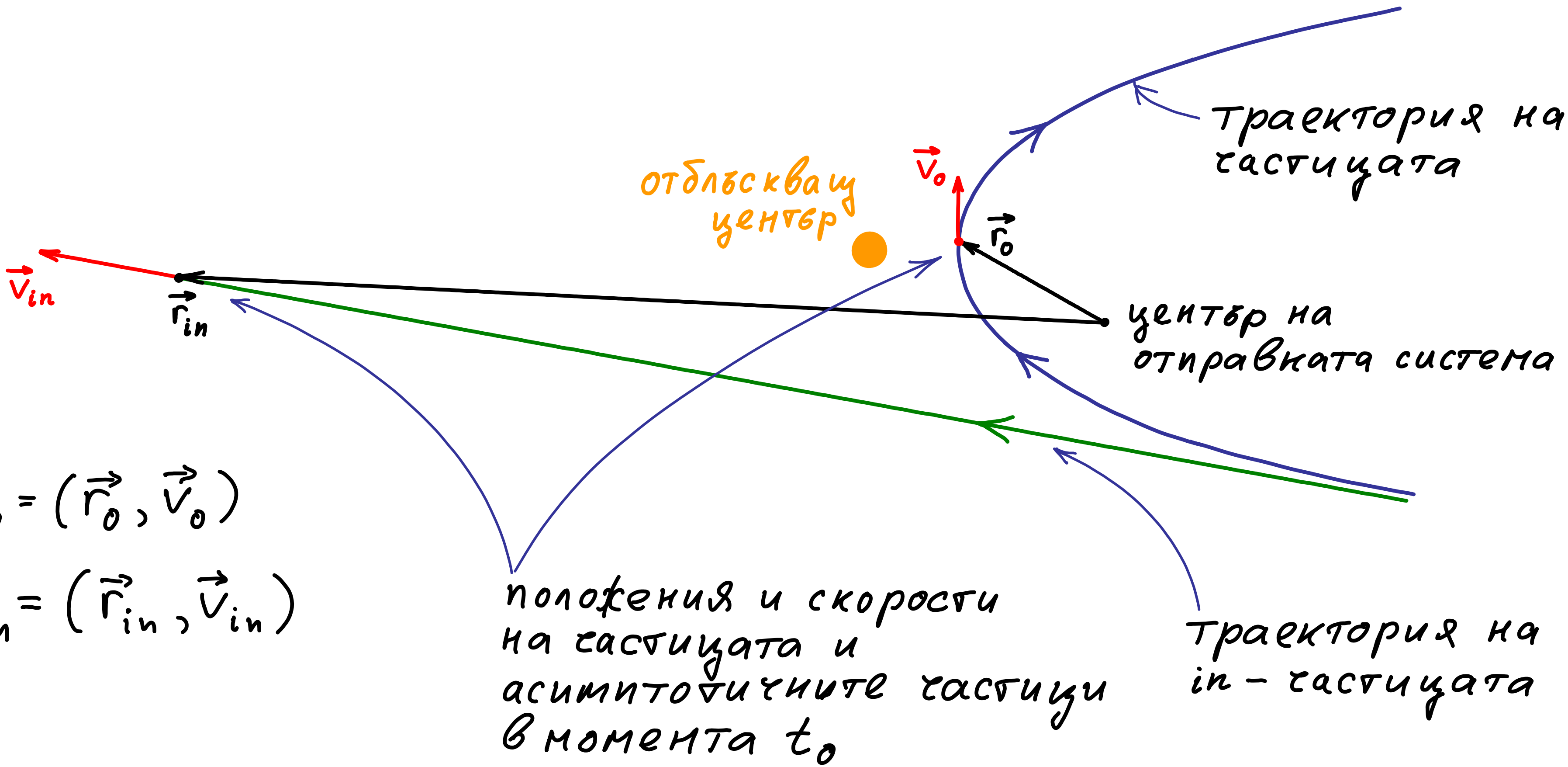
конфигурационно пространство $\mathbb{R}^3$



$$\xi_0 = (\vec{r}_0, \vec{v}_0)$$

Гледна точка на траектория

конфигурационно пространство $\mathbb{R}^3$

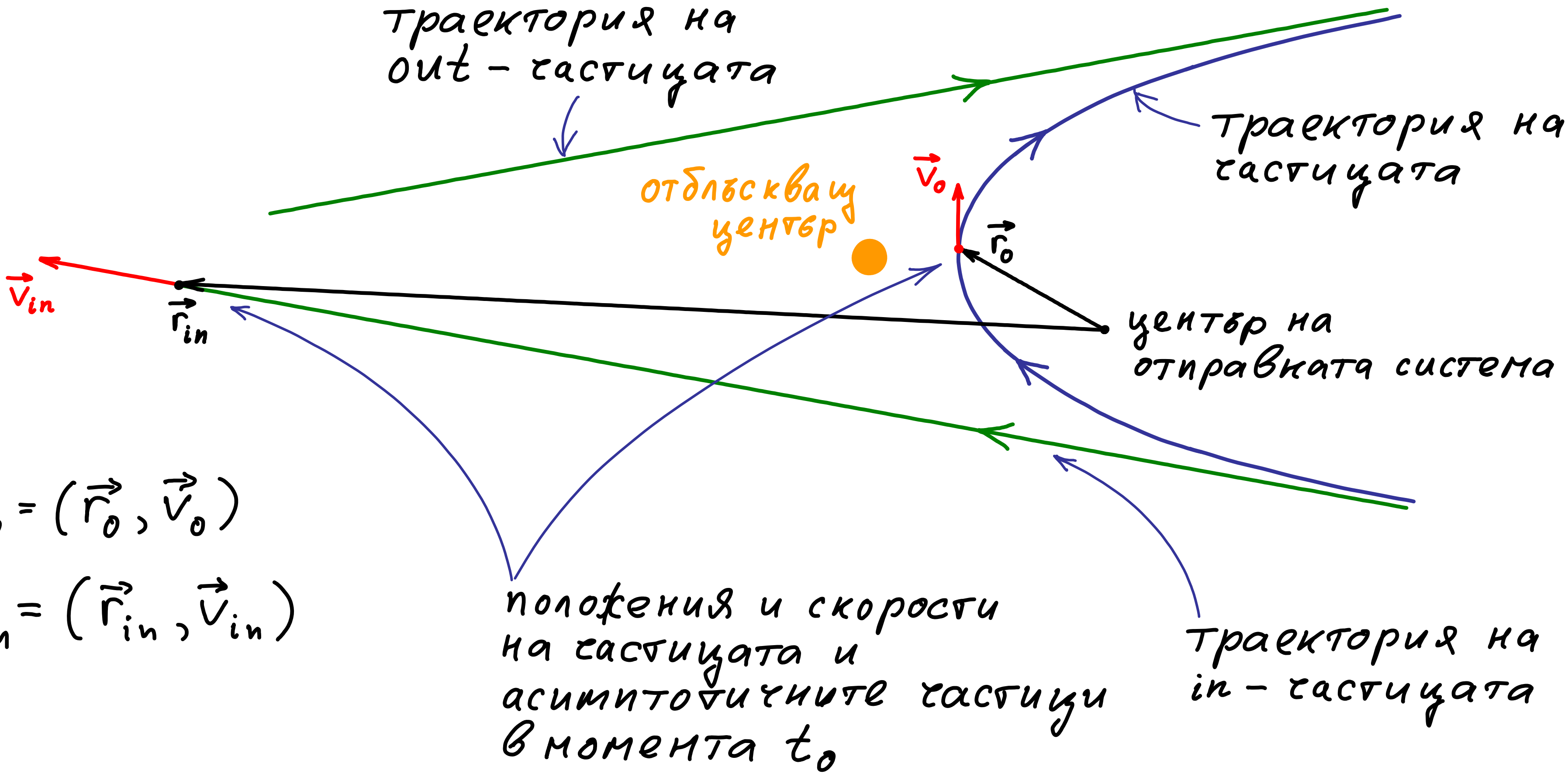


$$\xi_0 = (\vec{r}_0, \vec{v}_0)$$

$$\xi_{in} = (\vec{r}_{in}, \vec{v}_{in})$$

Гледна точка на траектория

конфигурационно пространство $\mathbb{R}^3$

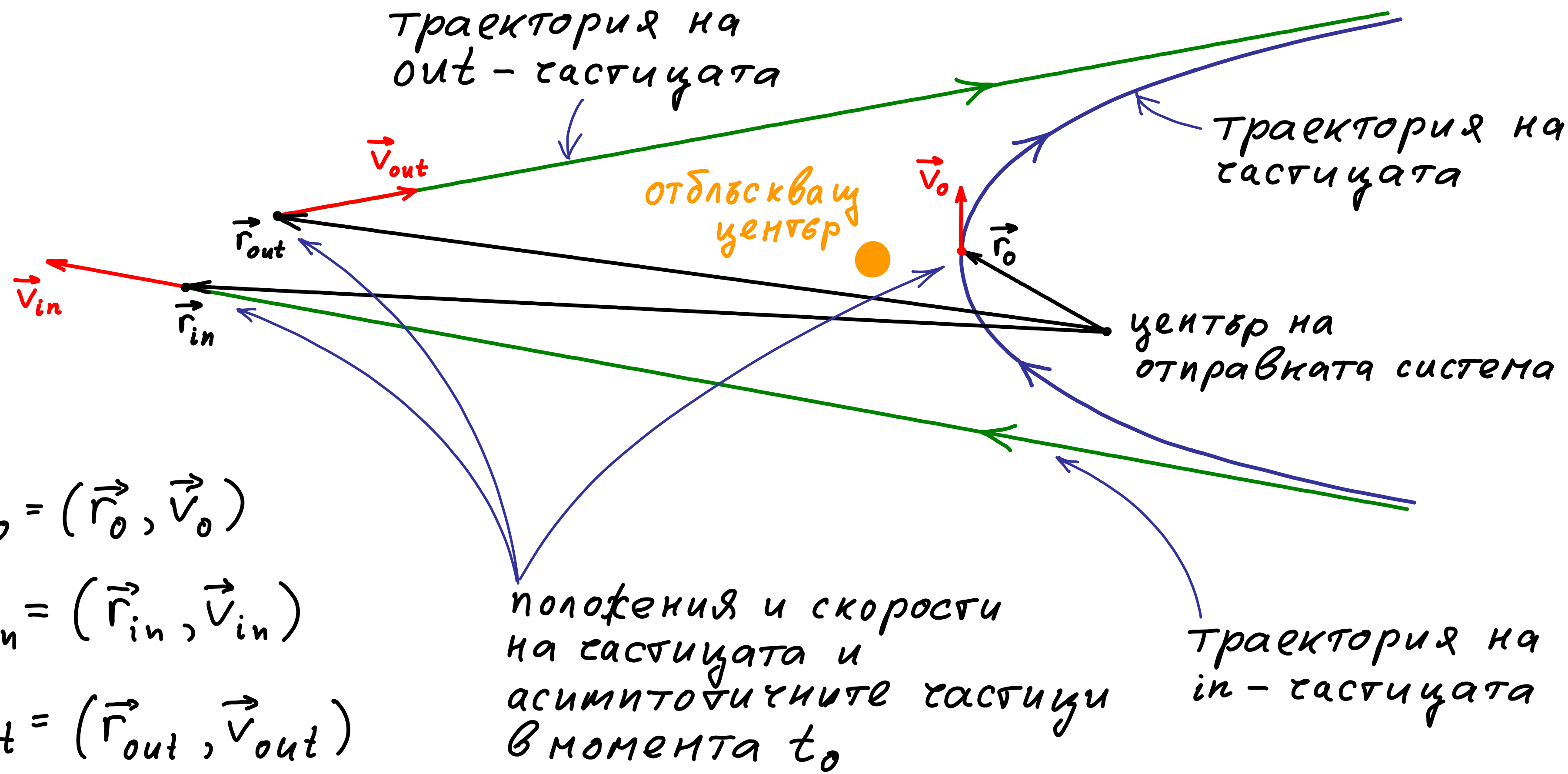


$$\xi_0 = (\vec{r}_0, \vec{v}_0)$$

$$\xi_{in} = (\vec{r}_{in}, \vec{v}_{in})$$

Гледна точка на траектория

конфигурационно пространство $\mathbb{R}^3$



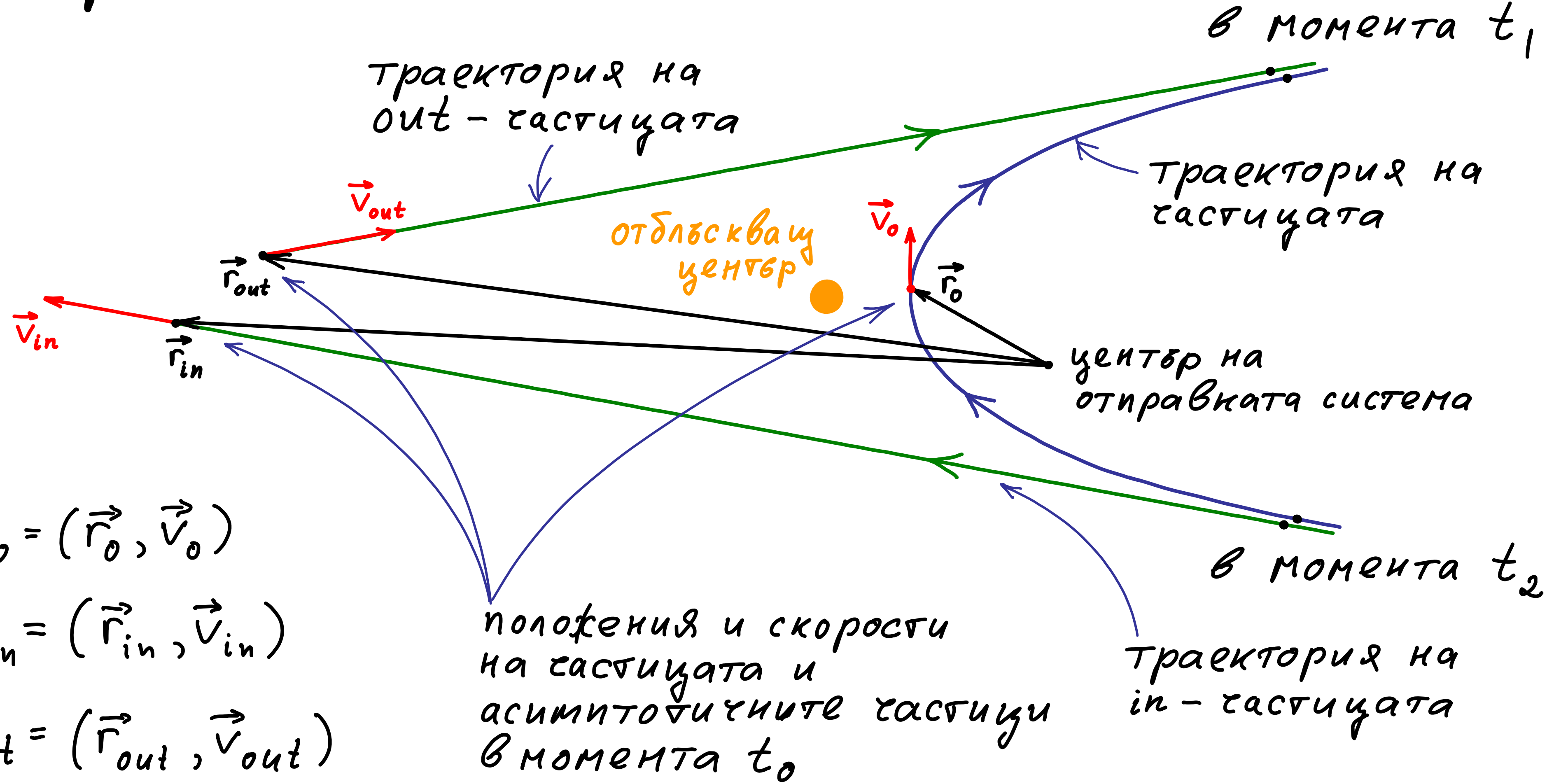
$$\xi_0 = (\vec{r}_0, \vec{v}_0)$$

$$\xi_{in} = (\vec{r}_{in}, \vec{v}_{in})$$

$$\xi_{out} = (\vec{r}_{out}, \vec{v}_{out})$$

Гледна точка на траектория

конфигурационно пространство $\mathbb{R}^3$

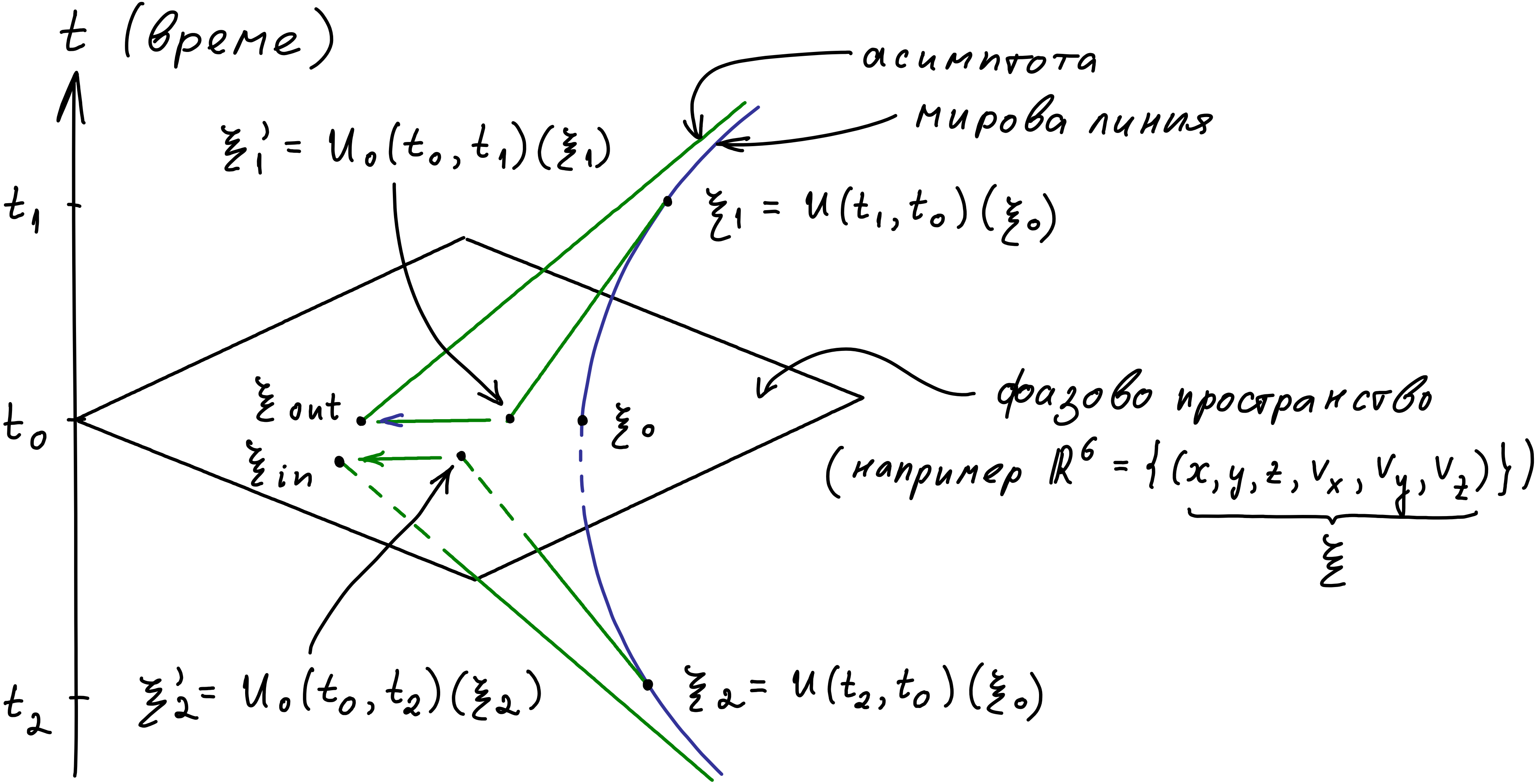


$$\xi_0 = (\vec{r}_0, \vec{v}_0)$$

$$\xi_{in} = (\vec{r}_{in}, \vec{v}_{in})$$

$$\xi_{out} = (\vec{r}_{out}, \vec{v}_{out})$$

Гледна точка на мирова линия:



Забележка: За далекодействащи взаимодействия, като Кулоновото мировите линии нямат асимптоти

Забележка: За далекодействащи взаимодействия, като Кулоновото мировите линии нямат асимптоти

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kqQ}{r} = const$$

Забележка: За далекодействащи взаимодействия, като Кулоновото мировите линии нямат асимптоти

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kqQ}{r} = const$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{dr}{dt} = \sqrt{a - \frac{b}{r}} \approx a - \frac{b}{2\sqrt{a}\,r}$$

$(r \to \infty)$

Забележка: За далекодействащи взаимодействия, като Кулоновото мировите линии нямат асимптоти

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kqQ}{r} = const$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{dr}{dt} = \sqrt{a - \frac{b}{r}} \approx a - \frac{b}{2\sqrt{a}\,r}$$

$(r \to \infty)$

$$\Rightarrow \quad r \approx ct + c' \ln t$$

<u>Забележка:</u> За далекодействащи взаимодействия, като Кулоновото мировите линии нямат асимптоти

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kqQ}{r} = const$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{dr}{dt} = \sqrt{a - \frac{b}{r}} \approx a - \frac{b}{2\sqrt{a}\, r}$$

$$(r \to \infty)$$

$$\Rightarrow \quad r \approx ct + c' \ln t$$

Simon B., Reed M., Vol.3, Scattering Theory, page 169

Забележка: За далекодействащи взаимодействия, като Кулоновото мировите линии нямат асимптоти

Simon B., Reed M., Vol.3, Scattering Theory, page 169

Забележка: За далекодействащи взаимодействия, като Кулоновото мировите линии нямат асимптоти

Simon B., Reed M., Vol.3, Scattering Theory, page 169

Това е първоизточника на т. нар. "инфрачервени" разходимости в квантовата електродинамика.

Забележка: За далекодействащи взаимодействия, като Кулоновото мировите линии нямат асимптоти

Simon B., Reed M., Vol.3, Scattering Theory, page 169

Това е първоизточника на т. нар. "инфрачервени" разходимости в квантовата електродинамика.

Изход: търсим само асимптотичните траектории и скорости.

Квант. динамична система:

време: t $\quad t_1 > t_2 > t_3$

Квант. динамична система:

време: $t \qquad t_1 \quad > \quad t_2 \quad > \quad t_3$

състояние: $\qquad \phi_1 \qquad\qquad \phi_2$

Квант. динамична система:

време: t $\qquad t_1 > t_2 > t_3$

състояние: $\qquad \phi_1 \qquad \phi_2$

$$\phi_1 \xleftarrow{U(t_1,\, t_2)} \phi_2$$

еволюция: $U(t_1, t_2)$

Квант. динамична система:

време: $t \qquad t_1 > t_2 > t_3$

състояние: $\phi_1 \qquad \phi_2$

еволюция: $U(t_1, t_2)$

посоката е наляво

Квант. динамична система:

време: $t \qquad t_1 > t_2 > t_3$

състояние: $\phi_1 \qquad \phi_2$

еволюция: $U(t_1, t_2)$

посоката е наляво заради "левия" функционален запис в математиката

Квант. динамична система:

време: t $\quad t_1 > t_2 > t_3$

състояние: $\phi_1 \quad \phi_2$

еволюция: $U(t_1, t_2)$

посоката е наляво заради
„левия" функционален запис в математиката:

при $\phi_2 \xmapsto{U(t_1,t_2)} \phi_1$

Квант. динамична система:

време: $t \qquad t_1 > t_2 > t_3$

състояние: $\qquad \phi_1 \qquad \phi_2$

еволюция: $\qquad U(t_1, t_2)$

посоката е наляво заради
"левия" функционален запис в математиката:

при $\phi_2 \xmapsto{U(t_1, t_2)} \phi_1$

пишем $\phi_1 = U(t_1, t_2)\, \phi_2$

Квант. динамична система:

време: t $\quad t_1 > t_2 > t_3$

състояние: $\phi_1 \quad \phi_2$

еволюция: $U(t_1, t_2)$

посоката е наляво заради "левия" функционален запис в математиката:

при $\phi_2 \xmapsto{U(t_1,t_2)} \phi_1$

пишем $\phi_1 = U(t_1,t_2)\,\phi_2$

а не $\cancel{\phi_1 = \phi_2\, U(t_1,t_2)}$

Квант. динамична система:

време: t $\qquad t_1 > t_2 > t_3$

състояние: $\qquad \phi_1 \qquad \phi_2$

еволюция: $\qquad U(t_1, t_2)$

Квант. динамична система:

време: t $\qquad t_1 > t_2 > t_3$

състояние: $\qquad \phi_1 \qquad \phi_2 \qquad \phi_3$

еволюция: $\qquad U(t_1, t_2) \cdot U(t_2, t_3)$

композиция:

Квант. динамична система:

време: $t \qquad t_1 > t_2 > t_3$

състояние: $\phi_1 \qquad \phi_2 \qquad \phi_3$

еволюция: $U(t_1, t_2) \cdot U(t_2, t_3)$

композиция: $= U(t_1, t_3)$

Квант. динамична система — пълното определение

Квант. динамична система:

Квант. динамична система:

$$\{U(t_1, t_2)\}_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}}$$ – унитарни

Квант. динамична система:

$$\{U(t_1, t_2)\}_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}}$$ – унитарни

които изпълняват условията:

Квант. динамична система:

$\{U(t_1, t_2)\}_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}}$ - унитарни

$$U(t, t) = \mathbb{1} \quad , \qquad (1)$$

Квант. динамична система:

$\{U(t_1, t_2)\}_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}}$ - унитарни

$$U(t,t) = 1 , \tag{1}$$

начално условие

Квант. динамична система:

$$\{\mathcal{U}(t_1,t_2)\}_{t_1,t_2\in\mathbb{R}}$$ – унитарни

$$\mathcal{U}(t,t)=\mathbb{1}\,, \tag{1}$$

$$\mathcal{U}(t_1,t_2)^* = \mathcal{U}(t_1,t_2)^{-1} \tag{2}$$

Квант. динамична система:

$$\{U(t_1,t_2)\}_{t_1,t_2\in\mathbb{R}} \text{ — унитарни}$$

обръщане на времето

$$U(t,t)=\mathbb{1}\,, \qquad (1)$$

$$U(t_1,t_2)^{*}=U(t_1,t_2)^{-1}=U(t_2,t_1) \qquad (2)$$

Квант. динамична система:

$$\{U(t_1,t_2)\}_{t_1,t_2\in\mathbb{R}}$$ – унитарни

$$U(t,t) = \mathbb{1}\ , \qquad (1)$$

$$U(t_1,t_2)^* = U(t_1,t_2)^{-1} = U(t_2,t_1) \qquad (2)$$

$$U(t_1,t_2)\,U(t_2,t_3) = U(t_1,t_3) \qquad (3)$$

композиция

Квант. динамична система:

$$\{U(t_1,t_2)\}_{t_1,t_2\in\mathbb{R}}$$ – унитарни

$$U(t,t) = \mathbb{1} \ , \qquad (1)$$

$$U(t_1,t_2)^* = U(t_1,t_2)^{-1} = U(t_2,t_1) \qquad (2)$$

$$U(t_1,t_2)\,U(t_2,t_3) = U(t_1,t_3) \qquad (3)$$

В картината на Шрьодингер еволюират състоянията

$$\Psi(t) = U(t, t_0)\, \Psi(t_0) \qquad (4)$$

В картината на Шрьодингер еволюират състоянията

$$\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0) \qquad (4)$$

В карт. на Хайзенберг - наблюдаемите:

$$A(t) = U(t_0, t)A(t_0)U(t, t_0) \qquad (5)$$

В картината на Шрьодингер еволюират състоянията

$$\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0) \qquad (4)$$

В карт. на Хайзенберг - наблюдаемите:

$$A(t) = U(t_0, t)A(t_0)U(t, t_0) \qquad (5)$$

Връзка:

$$\langle \Psi(t) | A(t_0)\Psi(t)\rangle \qquad (6)$$

$$= \langle \Psi(t_0) | A(t)\Psi(t_0)\rangle$$

В картината на Шрьодингер еволюират състоянията

$$\Psi(t) = U(t, t_0)\,\Psi(t_0) \qquad (4)$$

В карт. на Хайзенберг – наблюдаемите:

$$A(t) = U(t_0, t)\,A(t_0)\,U(t, t_0) \qquad (5)$$

Връзка:

$$\langle \Psi(t) \,|\, A(t_0)\,\Psi(t) \rangle \qquad (6)$$

$$= \langle \Psi(t_0) \,|\, A(t)\,\Psi(t_0) \rangle$$

– физически наблюдаемият ефект е изменението на средните стойности – описва се еднакво.

$$H(t) := \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) \Big|_{t_0 = t} \tag{7}$$

Хамилтониан

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(t, t_0) \Big|_{t_0 = t} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t_1} \mathcal{U}(t_1, t_2) = i \mathcal{H}(t_1) \, \mathcal{U}(t_1, t_2) \tag{8}$$

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathcal{U}(t,t_0)\Big|_{t_0=t} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t_1}\,\underbrace{\mathcal{U}(t_1+\tau, t_2)}_{=\;\mathcal{U}(t_1+\tau,\,t_1)\,\mathcal{U}(t_1,\,t_2)} = i\,\mathcal{H}(t_1)\,\mathcal{U}(t_1,t_2) \tag{8}$$

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathcal{U}(t,t_0)\Big|_{t_0=t} \qquad (7)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t_1}\,\mathcal{U}(t_1,t_2)}_{\parallel} = i\,\mathcal{H}(t_1)\,\mathcal{U}(t_1,t_2) \qquad (8)$$

$$\overbrace{\frac{\partial}{\partial \tau}\,\mathcal{U}(t_1+\tau,t_1)\,\mathcal{U}(t_1,t_2)\Big|_{\tau=0}}$$

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathcal{U}(t, t_0)\Big|_{t_0 = t} \qquad (7)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{\partial}{\partial t_1}\,\mathcal{U}(t_1, t_2)}_{\parallel} = i\,\mathcal{H}(t_1)\,\mathcal{U}(t_1, t_2) \qquad (8)$$

$$\overbrace{\frac{\partial}{\partial \tau}\,\mathcal{U}(t_1 + \tau, t_1)\Big|_{\tau = 0}\,\mathcal{U}(t_1, t_2)}$$

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t,t_0)\Big|_{t_0=t} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t_1}\mathcal{U}(t_1,t_2) = i\mathcal{H}(t_1)\,\mathcal{U}(t_1,t_2) \tag{8}$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t_1}\mathcal{U}(t_1,t_2)}_{\parallel}$$

$$\overbrace{\underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau}\mathcal{U}(t_1+\tau,t_1)\Big|_{\tau=0}}_{i\mathcal{H}(t_1)}\mathcal{U}(t_1,t_2)}$$

$$H(t) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathcal{U}(t,t_0)\Big|_{t_0=t} \qquad (7)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t_1}\mathcal{U}(t_1,t_2) = i\,H(t_1)\,\mathcal{U}(t_1,t_2) \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2}\mathcal{U}(t_1,t_2) = -i\,\mathcal{U}(t_1,t_2)\,H(t_2) \qquad (9)$$

$$H(t) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} U(t,t_0)\Big|_{t_0=t} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t_1} U(t_1,t_2) = i H(t_1)\, U(t_1,t_2) \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} U(t_1,t_2) = -i\, U(t_1,t_2)\, H(t_2) \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U(t_1,t_2)\underbrace{U(t_2,t_2+\tau)}_{U(t_2+\tau,t_2)^{-1}}\Big|_{\tau=0}$$

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathcal{U}(t,t_0)\Big|_{t_0=t} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t_1}\mathcal{U}(t_1,t_2) = i\,\mathcal{H}(t_1)\,\mathcal{U}(t_1,t_2) \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2}\mathcal{U}(t_1,t_2) = -i\,\mathcal{U}(t_1,t_2)\,\mathcal{H}(t_2) \tag{9}$$

$$\mathcal{U}(t_1,t_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \; i^n \times T\big(\mathcal{H}(\tau_1)\cdots\mathcal{H}(\tau_n)\big) \tag{10}$$

$$H(t) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0)\Big|_{t_0 = t} \qquad (7)$$

$$\Rightarrow \quad U(t_1, t_2) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, i^n \qquad (10)$$

$$\times \, T\big(H(\tau_1) \cdots H(\tau_n)\big)$$

$$H(t) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) \Big|_{t_0 = t} \qquad (7)$$

$$\Rightarrow \quad U(t_1, t_2) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, i^n \qquad (10)$$

$$\times T\left(H(\tau_1) \cdots H(\tau_n) \right)$$

$$T\left(H(t_1) \cdots H(t_n) \right) :=$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \theta\left(t_{\sigma(1)} - t_{\sigma(2)}\right) \cdots \theta\left(t_{\sigma(n-1)} - t_{\sigma(n)}\right)$$

$$\times H\left(t_{\sigma(1)}\right) \cdots H\left(t_{\sigma(n)}\right)$$

$$H(t) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) \Big|_{t_0 = t} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad U(t_1, t_2) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, i^n \tag{10}$$

Развитие на Дайсън

Dyson series

$$\times \, T\big(H(\tau_1) \cdots H(\tau_n)\big)$$

$$T\big(H(t_1) \cdots H(t_n)\big) :=$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \theta(t_{\sigma(1)} - t_{\sigma(2)}) \cdots \theta(t_{\sigma(n-1)} - t_{\sigma(n)})$$

$$\times \, H(t_{\sigma(1)}) \cdots H(t_{\sigma(n)})$$

Теорема

$$\langle \Psi(t) | A(t_0) \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(t_0) | A(t) \Psi(t_0) \rangle \qquad (6)$$

$$\mathcal{U}(t,t) = 1 , \qquad (1)$$

$$\mathcal{U}(t_1,t_2)^{-1} = \mathcal{U}(t_1,t_2)^{*} = \mathcal{U}(t_2,t_1) \qquad (2)$$

$$\mathcal{U}(t_1,t_2)\,\mathcal{U}(t_2,t_3) = \mathcal{U}(t_1,t_3) \qquad (3)$$

$$\Psi(t) = \mathcal{U}(t,t_0)\,\Psi(t_0) \qquad (4)$$

$$A(t) = \mathcal{U}(t_0,t)\,A(t_0)\,\mathcal{U}(t,t_0) \qquad (5)$$

$$H(t) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathcal{U}(t,t_0)\Big|_{t_0=t} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\mathcal{U}(t_1,t_2) = i\,H(t_1)\,\mathcal{U}(t_1,t_2) \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2}\mathcal{U}(t_1,t_2) = -i\,\mathcal{U}(t_1,t_2)\,H(t_2) \qquad (9)$$

$$\mathcal{U}(t_1,t_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{t_1}^{t_2}d\tau_1\cdots\int_{t_1}^{t_2}d\tau_n\, i^n\, T\big(H(\tau_1)\cdots H(\tau_n)\big) \qquad (10)$$

$$(1),(2),(3) \overset{(7)}{\Longleftrightarrow} (10) \overset{(7)}{\Longleftrightarrow} (8),(1) \overset{(7)}{\Longleftrightarrow} (9),(1)$$

$$(4) \overset{(2),(6)}{\Longleftrightarrow} (5)$$

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \mathcal{U}(t - t_0) \iff H(t) = H$$

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \mathcal{U}(t - t_0) \iff H(t) = H$$

$$\iff \mathcal{U}(t, t_0) = \exp\left(iH \cdot (t - t_0)\right)$$

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \mathcal{U}(t - t_0) \iff H(t) = H$$

$$\iff \mathcal{U}(t, t_0) = \exp\left(iH \cdot (t - t_0)\right)$$

- автономни системи

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \mathcal{U}(t - t_0) \iff H(t) = H$$

$$\iff \mathcal{U}(t, t_0) = \exp\left(iH \cdot (t - t_0)\right)$$

– автономни системи

Полу-автононост: автономност при
$t, t_0 \in [T_2, T_1]$

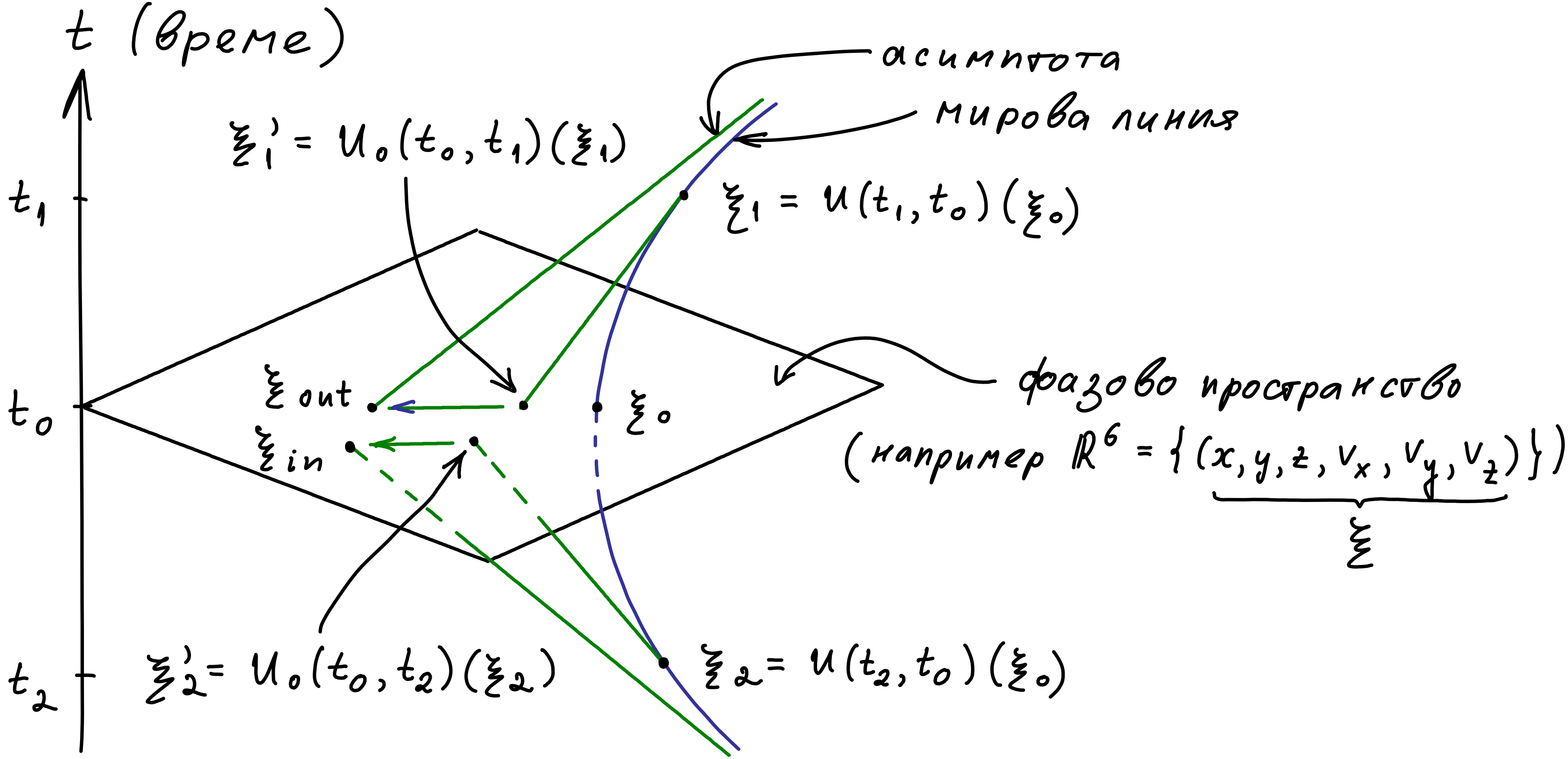
$$U_0(t_1, t_2) \longleftrightarrow H_0(t)$$

$$U(t_1, t_2) \longleftrightarrow H(t)$$

Сравняване на две динамични системи

$$U_0(t_1, t_2) \longleftrightarrow H_0(t)$$
$$U(t_1, t_2) \longleftrightarrow H(t)$$

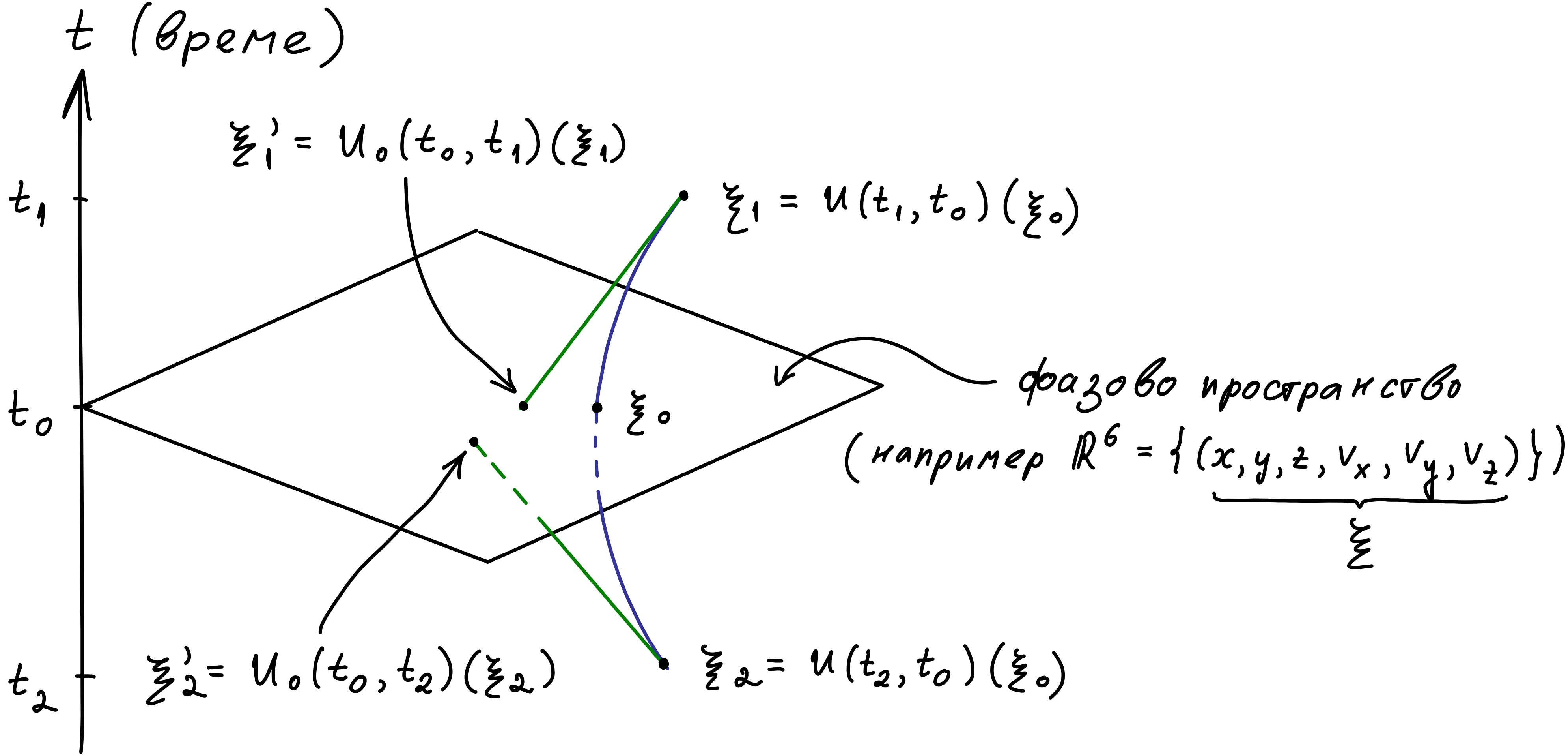
Сравняване на две динамични системи



$$U_0(t_1, t_2) \longleftrightarrow H_0(t)$$

$$U(t_1, t_2) \longleftrightarrow H(t)$$

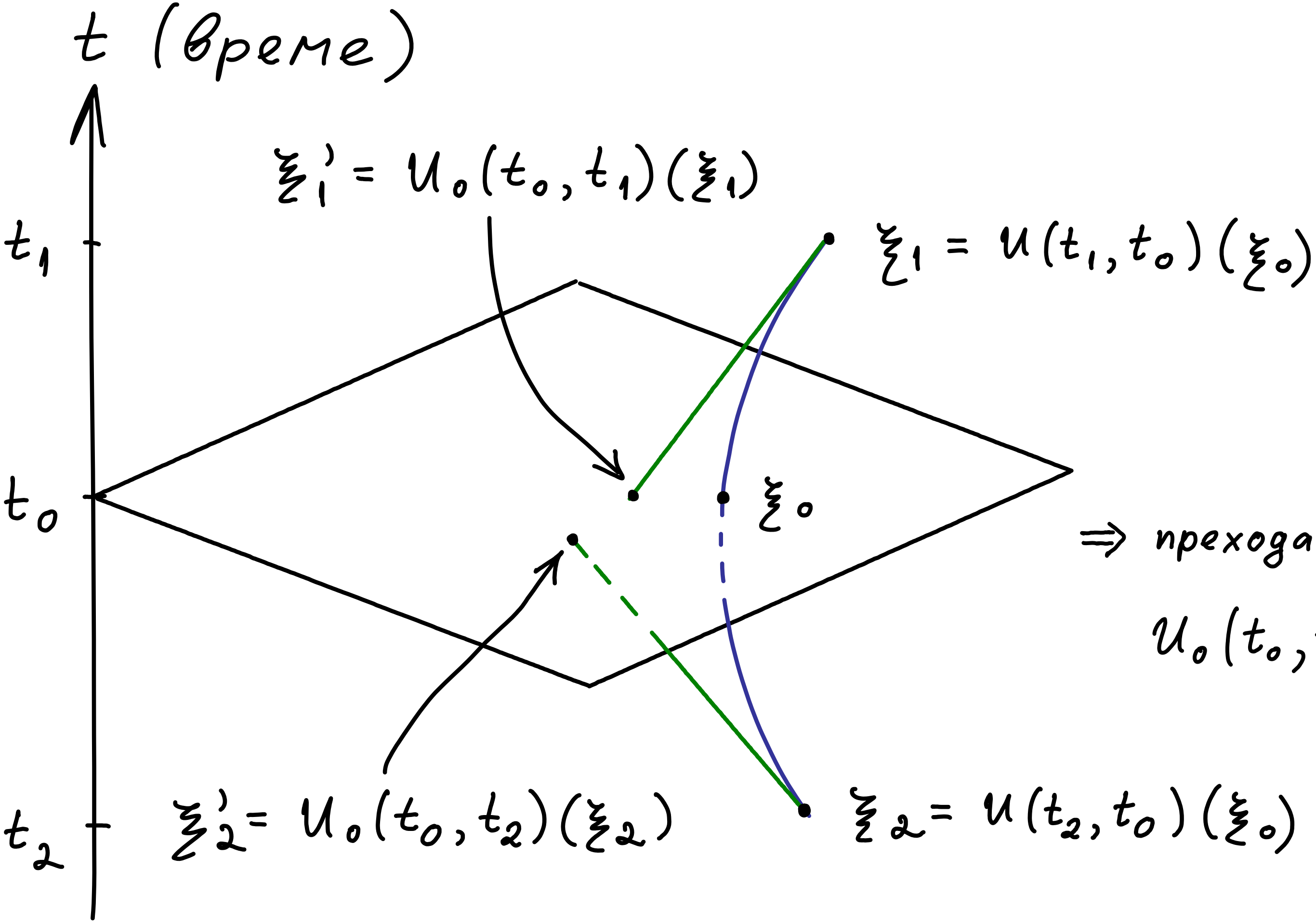
Сравняване на две динамични системи



$$U_0(t_1, t_2) \longleftrightarrow H_0(t)$$

$$U(t_1, t_2) \longleftrightarrow H(t)$$

Сравняване на две динамични системи

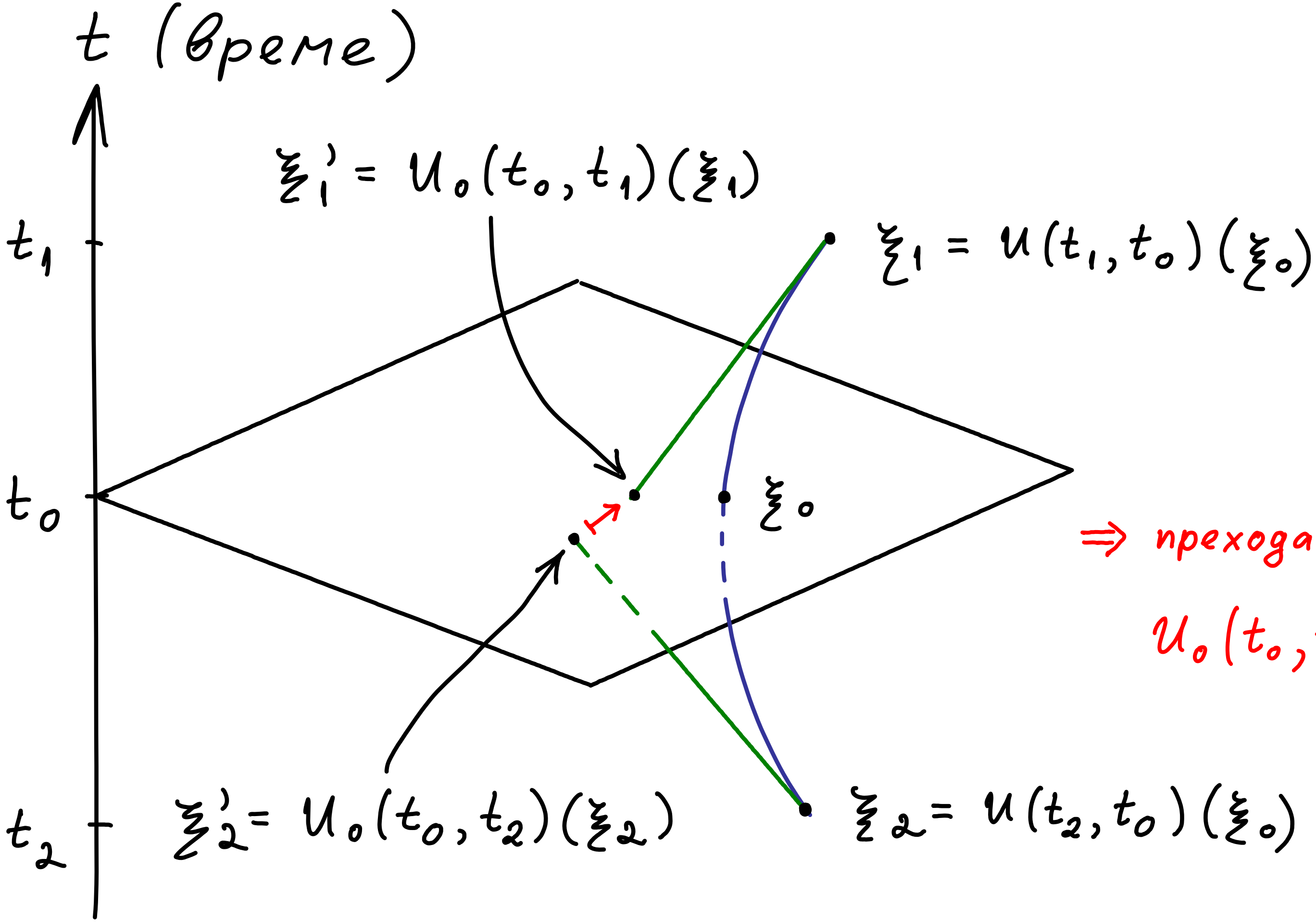


$\Rightarrow$ прехода $\xi_2' \mapsto \xi_1'$ се задава от:

$$U_0(t_0, t_1)\, U(t_1, t_2)\, U_0(t_2, t_0)$$

$$\mathcal{U}_0(t_1, t_2) \longleftrightarrow H_0(t)$$
$$\mathcal{U}(t_1, t_2) \longleftrightarrow H(t)$$

Сравняване на две динамични системи



$\Rightarrow$ прехода $\xi_2' \mapsto \xi_1'$ се задава от:

$$\mathcal{U}_0(t_0, t_1)\,\mathcal{U}(t_1, t_2)\,\mathcal{U}_0(t_2, t_0)$$

$$U_0(t_1, t_2) \longleftrightarrow H_0(t)$$

$$U(t_1, t_2) \longleftrightarrow H(t)$$

Сравняване на две динамични системи

$$S_{t_0}(t_1, t_2) := U_0(t_0, t_1)\, U(t_1, t_2)\, U_0(t_2, t_0)$$

$$\mathcal{U}_0(t_1, t_2) \longleftrightarrow H_0(t)$$

$$\mathcal{U}(t_1, t_2) \longleftrightarrow H(t)$$

Сравняване на две динамични системи

$$S_{t_0}(t_1, t_2) := \mathcal{U}_0(t_0, t_1)\, \mathcal{U}(t_1, t_2)\, \mathcal{U}_0(t_2, t_0)$$

$$\Longrightarrow \{S_{t_0}(t_1, t_2)\}_{t_1, t_2}$$ – квант. дин. сист.

$$\longleftrightarrow \quad I(t) := \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} S_{t_0}(t, t_0')\Big|_{t_0' = t}$$

$$\mathcal{U}_0(t_1, t_2) \longleftrightarrow H_0(t)$$

$$\mathcal{U}(t_1, t_2) \longleftrightarrow H(t)$$

Сравняване на две динамични системи

$$S_{t_0}(t_1, t_2) := \mathcal{U}_0(t_0, t_1)\,\mathcal{U}(t_1, t_2)\,\mathcal{U}_0(t_2, t_0)$$

$$\Longrightarrow \{S_{t_0}(t_1, t_2)\}_{t_1, t_2}$$ – квант. дин. сист.

$$\longleftrightarrow \quad I(t) = \mathcal{U}_0(t_0, t)\big(H(t) - H_0(t)\big)\,\mathcal{U}_0(t, t_0)$$

$$\mathcal{U}_0(t_1,t_2) \longleftrightarrow H_0(t)$$

$$\mathcal{U}(t_1,t_2) \longleftrightarrow H(t)$$

Сравняване на две динамични системи

$$S_{t_0}(t_1,t_2) := \mathcal{U}_0(t_0,t_1)\,\mathcal{U}(t_1,t_2)\,\mathcal{U}_0(t_2,t_0)$$

$\Longrightarrow \{S_{t_0}(t_1,t_2)\}_{t_1,t_2}$ – квант. дин. сист.

$$\longleftrightarrow \quad I(t) = \mathcal{U}_0(t_0,t)\big(H(t)-H_0(t)\big)\,\mathcal{U}_0(t,t_0)$$

хамилтониян на взаимодействието

$$S_{t_0} := \lim_{\substack{t_1 \to \infty \\ t_2 \to -\infty}} S_{t_0}(t_1, t_2)$$ – оператор на разсейване

$$S_{t_0} := \lim_{\substack{t_1 \to \infty \\ t_2 \to -\infty}} S_{t_0}(t_1, t_2)$$ – оператор на разсейване

Ако U, U_0 – автономни

$$\Longrightarrow \quad S_{t_0} = S \quad \text{и} \quad H_0 S = S H_0$$

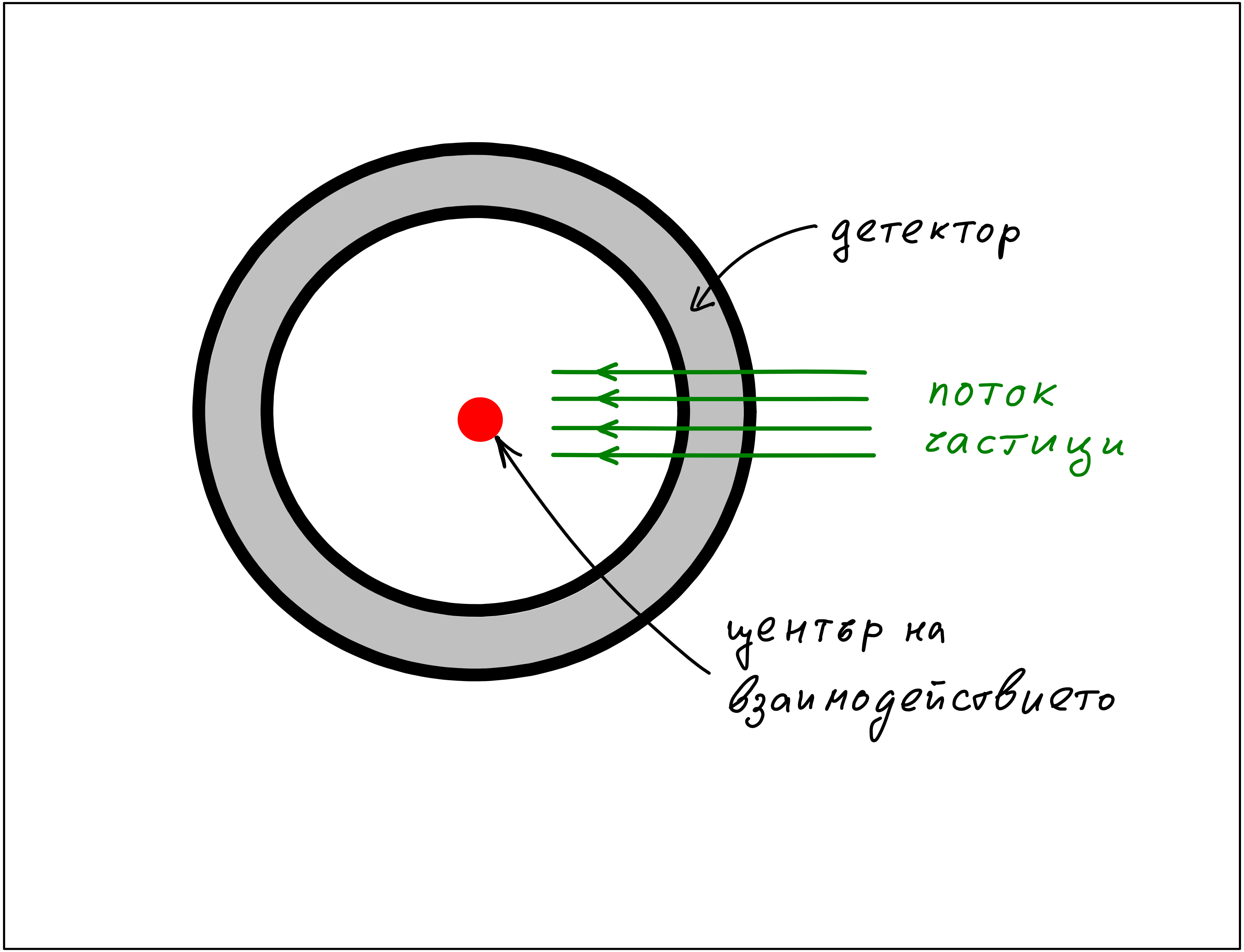
$$\mathcal{S}_{t_0} := \lim_{\substack{t_1 \to \infty \\ t_2 \to -\infty}} \mathcal{S}_{t_0}(t_1, t_2)$$ – оператор на разсейване

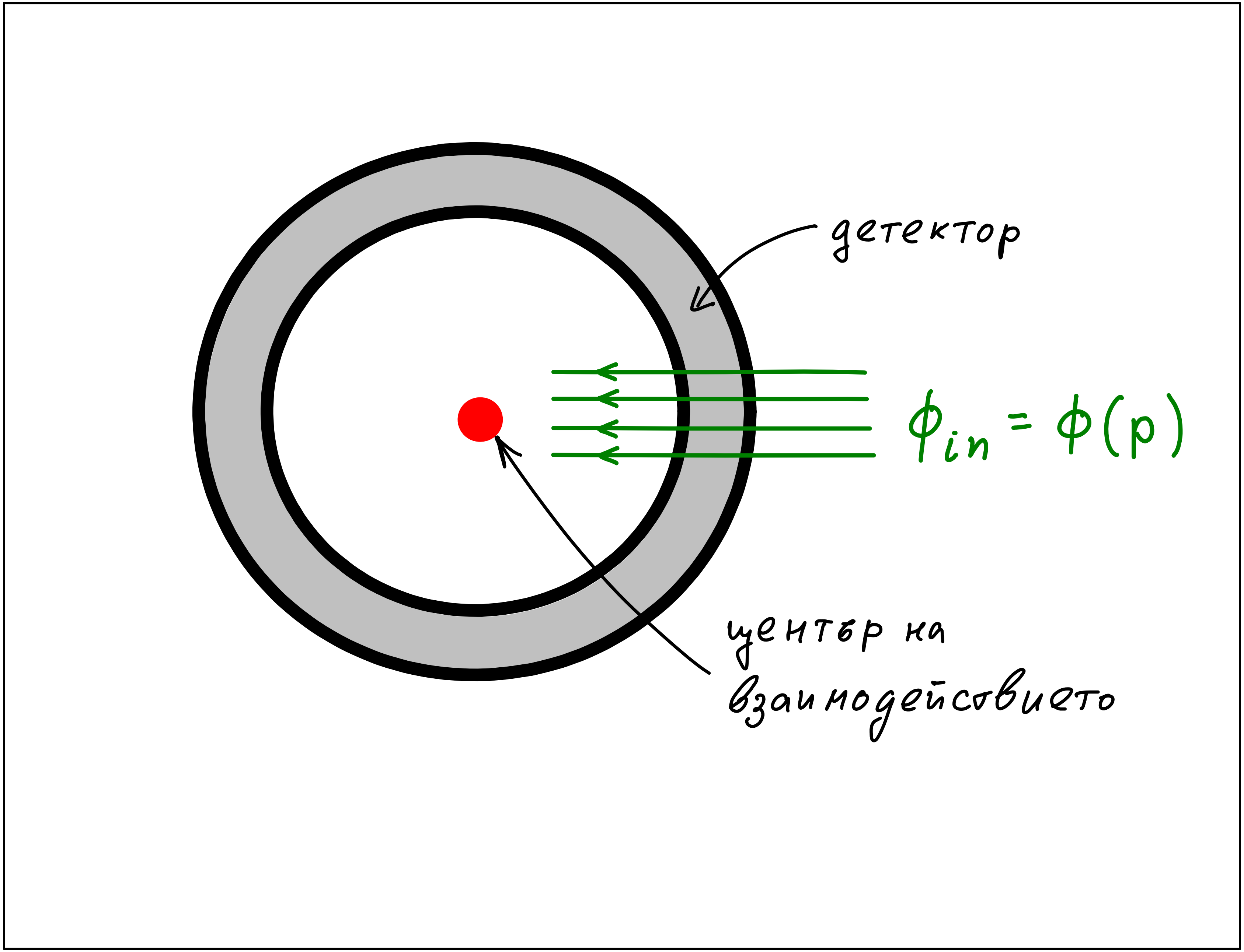
Ако U, U_0 – автономни

$$\Longrightarrow \mathcal{S}_{t_0} = \mathcal{S} \quad \text{и} \quad H_0 \mathcal{S} = \mathcal{S} H_0$$

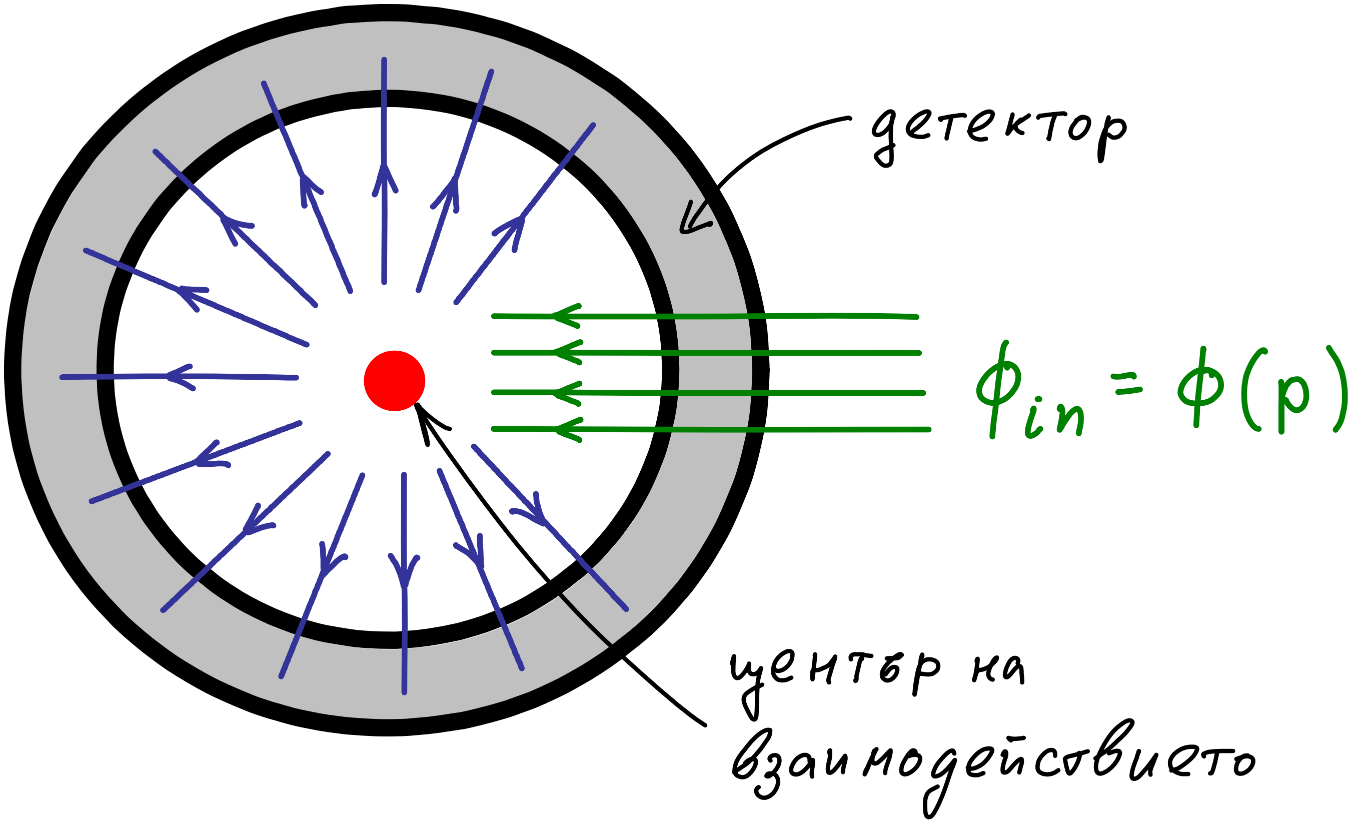
$$\boxed{\mathcal{S} = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_n \, i^n \times T\big(I(\tau_1) \cdots I(\tau_n)\big)}$$

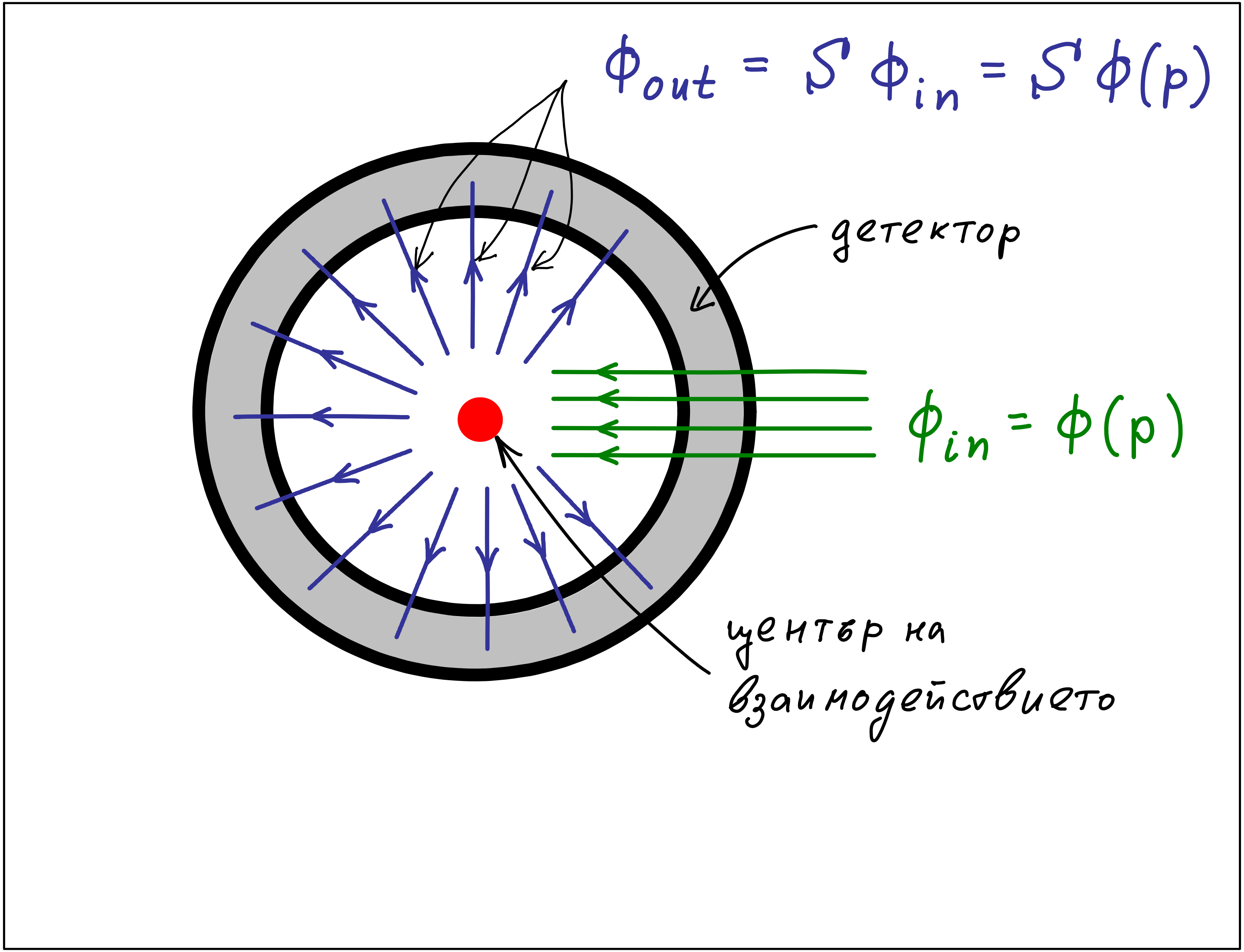
– формула на Гел-ман и Лоу M. Gell-Mann and F. Low


детектор
поток
частици
център на
взаимодействието

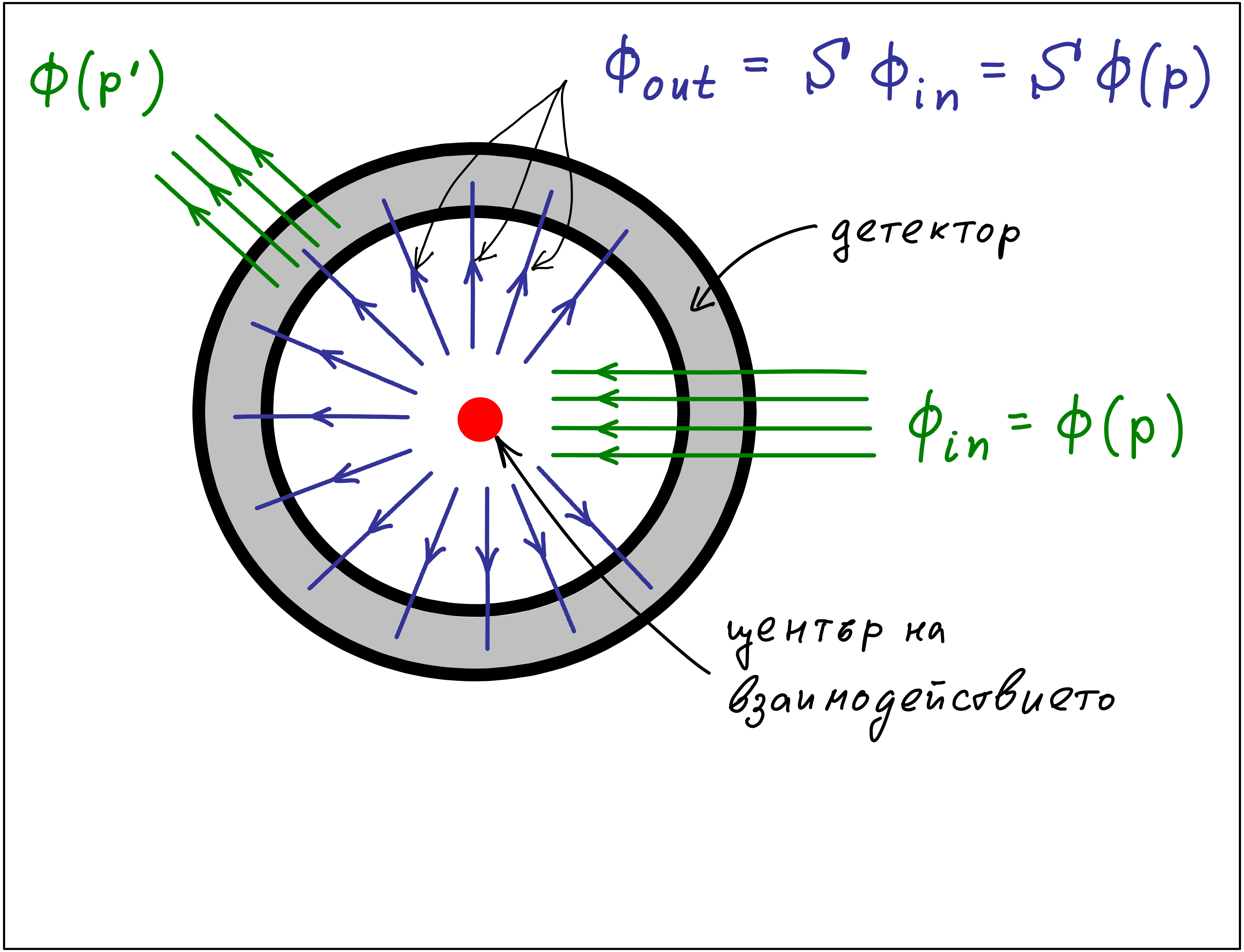


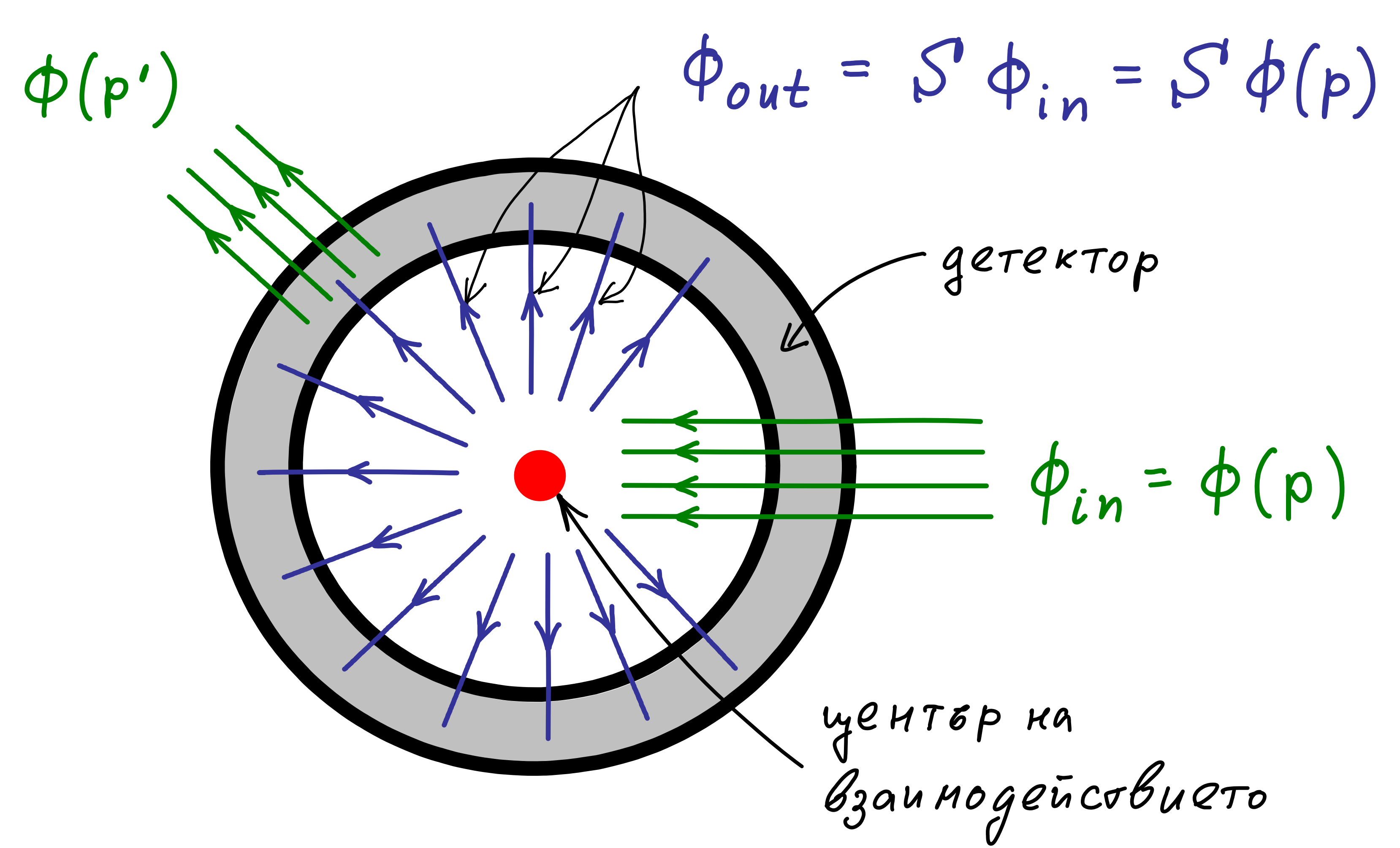
детектор
$\phi_{in} = \phi(p)$
център на
взаимодействието


детектор
$\phi_{in} = \phi(p)$
център на
взаимодействието



$\phi_{out} = S\,\phi_{in} = S\,\phi(p)$
детектор
$\phi_{in} = \phi(p)$
център на
взаимодействието


$\phi(p')$
$\phi_{out} = S\phi_{in} = S\phi(p)$
детектор
$\phi_{in} = \phi(p)$
център на
взаимодействието



$$\left|\langle \phi(p') \,|\, \phi_{out} \rangle\right|^2 = \left|\langle \phi(p') \,|\, S\,\phi(p) \rangle\right|^2$$