Презентация към лекция 4 от 12 ноември 2020

В лилав цвят е поставен текста, който допълнен или поправен спрямо предходната версия.

Допълнение: групови алгебри

Допълнение: групови алгебри

Груповите алгебри са примери на абстрактно (не операторно или функционално) зададени асоциативни (*-)алгебри, които обаче са с широко приложение в мат. физ.

Допълнение: групови алгебри

Груповите алгебри са примери на абстрактно (не операторно или функционално) зададени асоциативни (*-)алгебри, които обаче са с широко приложение в мат. физ.

<u>Определение.</u> Нека G е група

Допълнение: групови алгебри

Груповите алгебри са примери на абстрактно (не операторно или функционално) зададени асоциативни (*-)алгебри, които обаче са с широко приложение в мат. физ.

<u>Определение.</u> Нека G е група

$\mathbb{C}[G] := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_g \mid g \in G\}$ - векторно пространство с базис индексиран от G

Допълнение: групови алгебри

Груповите алгебри са примери на абстрактно (не операторно или функционално) зададени асоциативни (*-)алгебри, които обаче са с широко приложение в мат. физ.

Определение. Нека G е група

$\mathbb{C}[G] := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_g \mid g \in G\}$ – векторно пространство с базис индексиран от G

Понеже произведението трябва да е билинейно (= дистрибутивно), а *-операцията е антилинейна, то е достатъчно те да се определят върху базиса $\{e_g\}_{g\in G}$ за да се продължат върху $\mathbb{C}[G]$ еднозначно по линейност:

Допълнение: групови алгебри

Груповите алгебри са примери на абстрактно (не операторно или функционално) зададени асоциативни (*-)алгебри, които обаче са с широко приложение в мат. физ.

<u>Определение.</u> Нека G е група

$\mathbb{C}[G] := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_g \mid g \in G\}$ - векторно пространство с базис индексиран от G

Понеже произведението трябва да е билинейно (= дистрибутивно), а *-операцията е антилинейна, то е достатъчно те да се определят върху базиса $\{e_g\}_{g\in G}$ за да се продължат върху $\mathbb{C}[G]$ еднозначно по линейност:

$$e_{g_1} \cdot e_{g_2} := e_{g_1 g_2} \quad , \quad e_g^* := e_{g^{-1}}$$

Допълнение: групови алгебри

Груповите алгебри са примери на абстрактно (не операторно или функционално) зададени асоциативни (*-)алгебри, които обаче са с широко приложение в мат. физ.

<u>Определение.</u> Нека G е група

$\mathbb{C}[G] := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{ e_g \mid g \in G \}$ - векторно пространство с базис индексиран от G

Понеже произведението трябва да е билинейно (= дистрибутивно), а $*$-операцията е антилинейна, то е достатъчно те да се определят върху базиса $\{e_g\}_{g \in G}$ за да се продължат върху $\mathbb{C}[G]$ еднозначно по линейност:

$$e_{g_1} \cdot e_{g_2} := e_{g_1 g_2} \quad , \quad e_g^* := e_{g^{-1}}$$

Асоциативност: $e_{g_1} \cdot (e_{g_2} \cdot e_{g_3}) = e_{g_1(g_2 g_2)} = e_{(g_1 g_2) g_3} = (e_{g_1} \cdot e_{g_2}) \cdot e_{g_3}$

Допълнение: групови алгебри

Груповите алгебри са примери на абстрактно (не операторно или функционално) зададени асоциативни ($*$-)алгебри, които обаче са с широко приложение в мат. физ.

Определение. Нека G е група

$\mathbb{C}[G] := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_g \mid g \in G\}$ – векторно пространство с базис индексиран от G

Понеже произведението трябва да е билинейно (= дистрибутивно), а $*$-операцията е антилинейна, то е достатъчно те да се определят върху базиса $\{e_g\}_{g\in G}$ за да се продължат върху $\mathbb{C}[G]$ еднозначно по линейност:

$$e_{g_1} \cdot e_{g_2} := e_{g_1 g_2} \quad , \quad e_g^* := e_{g^{-1}}$$

Например: ако $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ и $g_1, g_2, h_1, h_2 \in G$, то

$$(\alpha_1 e_{g_1} + \alpha_2 e_{g_2}) \cdot (\beta_1 e_{h_1} + \beta_2 e_{h_2}) = \alpha_1 \beta_1 e_{g_1 h_1} + \alpha_1 \beta_2 e_{g_1 h_2} + \alpha_2 \beta_1 e_{g_2 h_1} + \alpha_2 \beta_2 e_{g_2 h_2}$$

$$(\alpha_1 e_{g_1} + \alpha_2 e_{g_2})^* = \overline{\alpha}_1 e_{g_1^{-1}} + \overline{\alpha}_2 e_{g_2^{-1}}$$

Допълнение: групови алгебри

Груповите алгебри са примери на абстрактно (не операторно или функционално) зададени асоциативни ($*$-)алгебри, които обаче са с широко приложение в мат. физ.

<u>Определение.</u> Нека G е група

$\mathbb{C}[G] := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{ e_g \mid g \in G \}$ - векторно пространство с базис индексиран от G

Понеже произведението трябва да е билинейно (= дистрибутивно), а $*$-операцията е антилинейна, то е достатъчно те да се определят върху базиса $\{e_g\}_{g \in G}$ за да се продължат върху $\mathbb{C}[G]$ еднозначно по линейност:

$$e_{g_1} \cdot e_{g_2} := e_{g_1 g_2} \quad , \quad e_g^* := e_{g^{-1}}$$

Асоциативност: $e_{g_1} \cdot (e_{g_2} \cdot e_{g_3}) = e_{g_1(g_2 g_2)} = e_{(g_1 g_2) g_3} = (e_{g_1} \cdot e_{g_2}) \cdot e_{g_3}$

$*$ е анти-морфизъм: $(e_{g_1} \cdot e_{g_2})^* = (e_{g_1 g_2})^* = e_{(g_1 g_2)^{-1}} = \cdots = e_{g_2}^* e_{g_1}^*$.

Аксиоми на квантовата статистика

Аксиоми на квантовата статистика

$\mathcal{A}$ — Алгебра на наблюдаемите

Аксиоми на квантовата статистика

$\mathcal{A}$

Алгебра на наблюдаемите
- това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра
  с единица, която е положителна

Аксиоми на квантовата статистика

Алгебра на наблюдаемите
- това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Observables}(\mathcal{A}) & & \mathrm{States}(\mathcal{A}) \end{tikzcd}$$

Аксиоми на квантовата статистика

Алгебра на наблюдаемите
- това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра
с единица, която е положителна

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \text{Observables}(\mathcal{A}) & & \text{States}(\mathcal{A}) \end{tikzcd}$$

$\text{Observables}(\mathcal{A})$
$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

Аксиоми на квантовата статистика

$\mathcal{A}$

Алгебра на наблюдаемите
- това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables($\mathcal{A}$)
$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

States($\mathcal{A}$)

Аксиоми на квантовата статистика

$\mathcal{A}$

Алгебра на наблюдаемите
- това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables($\mathcal{A}$)
$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

States($\mathcal{A}$)
$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$

Аксиоми на квантовата статистика

$\mathcal{A}$

Алгебра на наблюдаемите
- това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

States$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$
$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid$

Аксиоми на квантовата статистика

$\mathcal{A}$

Алгебра на наблюдаемите
- това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

States$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$
$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid$ (положителен лин. функционал)

$$\rho(A^*A) \geq 0 \text{ за } \forall A \in \mathcal{A}$$

Аксиоми на квантовата статистика

$\mathcal{A}$ ← Алгебра на наблюдаемите
- това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

States$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$
$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid$ (положителен лин. функционал)
$\rho(A^*A) \geq 0$ за $\forall A \in \mathcal{A}$

линейни изображения със стойности в $\mathbb{C}$

Аксиоми на квантовата статистика

$\mathcal{A}$

Алгебра на наблюдаемите
- това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables$(\mathcal{A})$

$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$

$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

States$(\mathcal{A})$

$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$

$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid$ (положителен лин. функционал)

линейни изображения със стойности в $\mathbb{C}$

$$\rho(A^* A) \geq 0 \text{ за } \forall A \in \mathcal{A}$$

(нормиран) $\rho(\mathbb{1}) = 1$

Аксиоми на квантовата статистика

$\mathcal{A}$

Алгебра на наблюдаемите

- това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables $(\mathcal{A})$

$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$

$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

States $(\mathcal{A})$

$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$

$:= \Big\{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \;\Big|\;$ (положителен лин. функционал)

линейни изображения със стойности в $\mathbb{C}$

$$\rho(A^*A) \geq 0 \text{ за } \forall A \in \mathcal{A}$$

(нормиран) $\rho(\hat{1}) = 1$

(реален) $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)} \Big\}$

Аксиоми на квантовата статистика

$\mathcal{A}$ — Алгебра на наблюдаемите - това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables($\mathcal{A}$) $\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$

$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$

$\Downarrow$

A - набл.

States($\mathcal{A}$) $\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$

$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid$ (положителен лин. функционал)

линейни изображения със стойности в $\mathbb{C}$

$\rho(A^*A) \geq 0$ за $\forall A \in \mathcal{A}$

(нормиран) $\rho(\hat{1}) = 1$

(реален) $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)} \}$

$\Downarrow$

ρ - със.

$$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$$

Аксиоми на квантовата статистика

$\mathcal{A}$ — Алгебра на наблюдаемите
- това е асоциативна, комплексна, $*$-алгебра с единица, която е положителна

Observables$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
$:= \{ A \in \mathcal{A} \mid A = A^* \}$
$\Downarrow$
A - набл.

States$(\mathcal{A})$
$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$
$:= \{ \rho : \mathcal{A} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathbb{C} \mid$ (положителен лин. функционал)

линейни изображения със стойности в $\mathbb{C}$

$\rho(A^*A) \geq 0$ за $\forall A \in \mathcal{A}$

(нормиран) $\rho(\hat{1}) = 1$

(реален) $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)} \}$

$\Downarrow$
ρ - съст.

$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$
$:=$ средна стойност на наблюдаемата A в състоянието ρ.

Хилбертови пространства - преговор

Хилбертови пространства - преговор

1. Определение: Пред-хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

Хилбертови пространства - преговор

1. Определение: Пред-хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

Това е линейно пространство $\mathcal{H}$ над $\mathbb{C}$

Хилбертови пространства - преговор

1 Определение: Пред-хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

Това е линейно пространство $\mathcal{H}$ над $\mathbb{C}$ снабдено със т.нар. ермитово скаларно произведение $\langle \bullet , \bullet \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} : (\Phi, \Psi) \longrightarrow \langle \Phi | \Psi \rangle$

Хилбертови пространства - преговор

1 Определение : Пред-хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

Това е линейно пространство $\mathcal{H}$ над $\mathbb{C}$ снабдено със т.нар. ермитово (Hermitian) скаларно произведение $\langle \bullet , \bullet \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C} : (\Phi, \Psi) \to \langle \Phi | \Psi \rangle$

Хилбертови пространства - преговор

1 Определение : Пред-хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

Това е линейно пространство $\mathcal{H}$ над $\mathbb{C}$ снабдено със т.нар. ермитово (Hermitian) скаларно произведение $\langle \bullet , \bullet \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} : (\Phi, \Psi) \to \langle \Phi | \Psi \rangle$

антилинейно: $\langle a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 \mid \Psi \rangle = \bar{a}_1 \langle \Phi_1 | \Psi \rangle + \bar{a}_2 \langle \Phi_2 | \Psi \rangle$

Хилбертови пространства - преговор

1 Определение: Пред-хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

Това е линейно пространство $\mathcal{H}$ над $\mathbb{C}$ снабдено със т.нар. ермитово (Hermitian) скаларно произведение $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C} : (\Phi, \Psi) \to \langle \Phi | \Psi \rangle$

линейно: $\langle \Phi | a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi \rangle = a_1 \langle \Phi | \Psi_1 \rangle + a_2 \langle \Phi | \Psi_2 \rangle$

антилинейно: $\langle a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 | \Psi \rangle = \bar{a}_1 \langle \Phi_1 | \Psi \rangle + \bar{a}_2 \langle \Phi_2 | \Psi \rangle$

Хилбертови пространства - преговор

1 Определение: Пред-хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

Hermitian

Това е линейно пространство $\mathcal{H}$ над $\mathbb{C}$ снабдено със т.нар. ермитово скаларно произведение $\langle \bullet , \bullet \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C} : (\Phi, \Psi) \to \langle \Phi | \Psi \rangle$

(за $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ и $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}$)

линейно: $\langle \Phi | a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi \rangle = a_1 \langle \Phi | \Psi_1 \rangle + a_2 \langle \Phi | \Psi_2 \rangle$

антилинейно: $\langle a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 | \Psi \rangle = \bar{a}_1 \langle \Phi_1 | \Psi \rangle + \bar{a}_2 \langle \Phi_2 | \Psi \rangle$

Хилбертови пространства - преговор

1 Определение: Пред-хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

Това е линейно пространство $\mathcal{H}$ над $\mathbb{C}$ снабдено със т.нар. ермитово (Hermitian) скаларно произведение $\langle \bullet , \bullet \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} : (\Phi, \Psi) \longrightarrow \langle \Phi | \Psi \rangle$

(за $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ и $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}$)

линейно: $\langle \Phi | a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi \rangle = a_1 \langle \Phi | \Psi_1 \rangle + a_2 \langle \Phi | \Psi_2 \rangle$

антилинейно: $\langle a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 | \Psi \rangle = \bar{a}_1 \langle \Phi_1 | \Psi \rangle + \bar{a}_2 \langle \Phi_2 | \Psi \rangle$

То изпълнява свойствата: (ермитова симетрия): $\langle \Phi | \Psi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}$

Хилбертови пространства - преговор

1 Определение: Пред-хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

Това е линейно пространство $\mathcal{H}$ над $\mathbb{C}$ снабдено със т.нар. ермитово (Hermitian) скаларно произведение $\langle \bullet , \bullet \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} : (\Phi, \Psi) \rightarrow \langle \Phi | \Psi \rangle$

(за $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ и $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}$)

линейно: $\langle \Phi | a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi \rangle = a_1 \langle \Phi | \Psi_1 \rangle + a_2 \langle \Phi | \Psi_2 \rangle$

антилинейно: $\langle a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 | \Psi \rangle = \bar{a}_1 \langle \Phi_1 | \Psi \rangle + \bar{a}_2 \langle \Phi_2 | \Psi \rangle$

То изпълнява свойствата: (ермитова симетрия): $\langle \Phi | \Psi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}$

(строга положителна дефинитност): $\|\Phi\|^2 := \langle \Phi | \Phi \rangle \geq 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$

$$= 0 \iff \Phi = 0$$

Хилбертови пространства - преговор

1 Определение: Пред-хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

Hermitian

Това е линейно пространство $\mathcal{H}$ над $\mathbb{C}$ снабдено със т.нар. ермитово скаларно произведение $\langle\bullet,\bullet\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{C} : (\Phi,\Psi)\rightarrow\langle\Phi|\Psi\rangle$

(за $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ и $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}$)

линейно: $\langle\Phi|a_1\Psi_1 + a_2\Psi_2\rangle = a_1\langle\Phi|\Psi_1\rangle + a_2\langle\Phi|\Psi_2\rangle$

антилинейно: $\langle a_1\Phi_1 + a_2\Phi_2|\Psi\rangle = \bar{a}_1\langle\Phi_1|\Psi\rangle + \bar{a}_2\langle\Phi_2|\Psi\rangle$

То изпълнява свойствата: (ермитова симетрия): $\langle\Phi|\Psi\rangle = \overline{\langle\Psi|\Phi\rangle}$

(строга положителна дефинитност): $\|\Phi\|^2 := \langle\Phi|\Phi\rangle \geq 0 \quad \forall\,\Phi\in\mathcal{H}$

$$= 0 \iff \Phi = 0$$

Хилбертови пространства - преговор

1 Определение : Пред-хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

Това е линейно пространство $\mathcal{H}$ над $\mathbb{C}$ снабдено със т.нар. ермитово (Hermitian) скаларно произведение $\langle \bullet , \bullet \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} : (\Phi, \Psi) \rightarrow \langle \Phi | \Psi \rangle$

(за $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ и $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}$)

линейно: $\langle \Phi | a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi \rangle = a_1 \langle \Phi | \Psi_1 \rangle + a_2 \langle \Phi | \Psi_2 \rangle$

антилинейно: $\langle a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 | \Psi \rangle = \bar{a}_1 \langle \Phi_1 | \Psi \rangle + \bar{a}_2 \langle \Phi_2 | \Psi \rangle$

То изпълнява свойствата : (ермитова симетрия) : $\langle \Phi | \Psi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}$

(строга положителна дефинитност) : $\| \Phi \|^2 := \langle \Phi | \Phi \rangle \geq 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$

$= 0 \iff \Phi = 0$

Хилбертови пространства - преговор

1 Определение : Пред-хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

Това е линейно пространство $\mathcal{H}$ над $\mathbb{C}$ снабдено със т.нар. ермитово (Hermitian) скаларно произведение $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C} : (\Phi, \Psi) \to \langle \Phi | \Psi \rangle$

(за $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ и $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}$)

линейно: $\langle \Phi | a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2 \rangle = a_1 \langle \Phi | \Psi_1 \rangle + a_2 \langle \Phi | \Psi_2 \rangle$

антилинейно: $\langle a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 | \Psi \rangle = \bar{a}_1 \langle \Phi_1 | \Psi \rangle + \bar{a}_2 \langle \Phi_2 | \Psi \rangle$

То изпълнява свойствата: (ермитова симетрия): $\langle \Phi | \Psi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}$

(строга положителна дефинитност): $\|\Phi\|^2 := \langle \Phi | \Phi \rangle \geq 0 \quad \forall \Phi \in \mathcal{H}$

$$= 0 \iff \Phi = 0$$

Пред-хилбертовото пространство $\mathcal{H}$ се нарича Хилбертово, ако спрямо нормата $\|\Phi\| = \sqrt{\langle \Phi | \Phi \rangle} \ (\Phi \in \mathcal{H})$ е пълно.

Хилбертови пространства - преговор

1 Определение : Пред-хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

Това е линейно пространство $\mathcal{H}$ над $\mathbb{C}$ снабдено със т.нар. ермитово (Hermitian) скаларно произведение $\langle \bullet , \bullet \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C} : (\Phi, \Psi) \to \langle \Phi | \Psi \rangle$

(за $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ и $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}$)

линейно: $\langle \Phi | a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi \rangle = a_1 \langle \Phi | \Psi_1 \rangle + a_2 \langle \Phi | \Psi_2 \rangle$

антилинейно: $\langle a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 | \Psi \rangle = \bar{a}_1 \langle \Phi_1 | \Psi \rangle + \bar{a}_2 \langle \Phi_2 | \Psi \rangle$

То изпълнява свойствата : (ермитова симетрия) : $\langle \Phi | \Psi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}$

(строга положителна дефинитност) : $\| \Phi \|^2 := \langle \Phi | \Phi \rangle \geq 0 \quad \forall \, \Phi \in \mathcal{H}$

$= 0 \iff \Phi = 0$

Пред-хилбертовото пространство $\mathcal{H}$ се нарича Хилбертово , ако спрямо нормата $\| \Phi \| = \sqrt{\langle \Phi | \Phi \rangle}$ $(\Phi \in \mathcal{H})$ е пълно. Ако $\mathcal{H}$ е крайно-мерно, то пълнотата е винаги изпълнена.

Хилбертови пространства - преговор

1 Определение: Пред-хилбертово пространство над $\mathbb{C}$

Това е линейно пространство $\mathcal{H}$ над $\mathbb{C}$ снабдено със т.нар. ермитово (Hermitian) скаларно произведение $\langle \bullet , \bullet \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C} : (\Phi, \Psi) \to \langle \Phi | \Psi \rangle$

(за $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ и $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}$)

линейно: $\langle \Phi | a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi \rangle = a_1 \langle \Phi | \Psi_1 \rangle + a_2 \langle \Phi | \Psi_2 \rangle$

антилинейно: $\langle a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 | \Psi \rangle = \bar{a}_1 \langle \Phi_1 | \Psi \rangle + \bar{a}_2 \langle \Phi_2 | \Psi \rangle$

То изпълнява свойствата: (ермитова симетрия): $\langle \Phi | \Psi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}$

(строга положителна дефинитност): $\| \Phi \|^2 := \langle \Phi | \Phi \rangle \geq 0 \quad \forall \Phi \in \mathcal{H}$

$$= 0 \iff \Phi = 0$$

Пред-хилбертовото пространство $\mathcal{H}$ се нарича Хилбертово, ако спрямо нормата $\| \Phi \| = \sqrt{\langle \Phi | \Phi \rangle}$ $(\Phi \in \mathcal{H})$ е пълно. Ако $\mathcal{H}$ е крайно-мерно, то пълнотата е винаги изпълнена.

Пример: $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n \ni \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} : \langle \Phi | \Psi \rangle := \bar{\phi}_1 \psi_1 + \cdots + \bar{\phi}_n \psi_n$

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

*-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid$

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}$, така че

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

$$Op^*(\mathcal{H}) := \left\{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \;\middle|\; \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \right\}$$

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

$$Op^*(\mathcal{H}) := \left\{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \;\middle|\; \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A \Psi \rangle = \langle B \Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \right\}$$

Твърдим, че $Op^*(\mathcal{H})$ е $*$-алгебра с $*$-операция $A^* := B$ от

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

$$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A \Psi \rangle = \langle B \Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \}$$

твърдим, че $Op^*(\mathcal{H})$ е $*$-алгебра с $*$-операция $A^* := B$ от

Доказателство.

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

$$Op^*(\mathcal{H}) := \left\{ A:\mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \;\middle|\; \exists B:\mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \right\}$$

Твърдим, че $Op^*(\mathcal{H})$ е $*$-алгебра с $*$-операция $A^* := B$ от

Доказателство. а) Защо B е единствен ?

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

$$Op^*(\mathcal{H}) := \left\{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \;\middle|\; \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A \Psi \rangle = \langle B \Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \right\}$$

Твърдим, че $Op^*(\mathcal{H})$ е $*$-алгебра с $*$-операция $A^* := B$ от

Доказателство. а) Защо B е единствен ?

– защото, ако $\langle B\Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B_1 \Phi | \Psi \rangle$ $(\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

$$Op^*(\mathcal{H}) := \Big\{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \;\Big|\; \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A \Psi \rangle = \langle B \Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \Big\}$$

Твърдим, че $Op^*(\mathcal{H})$ е $*$-алгебра с $*$-операция $A^* := B$ от

Доказателство. а) Защо B е единствен?

- защото, ако $\langle B\Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | A \Psi \rangle = \langle B_1 \Phi | \Psi \rangle$ $(\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$, то

$\langle (B - B_1)\Phi | \Psi \rangle = 0$ $(\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$.

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

$$Op^*(\mathcal{H}) := \left\{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \;\middle|\; \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \right\}$$

Твърдим, че $Op^*(\mathcal{H})$ е $*$-алгебра с $*$-операция $A^* := B$ от

Доказателство. а) Защо B е единствен?

- защото, ако $\langle B\Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B_1\Phi | \Psi \rangle$ $(\forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$, то

$\langle (B - B_1)\Phi | \Psi \rangle = 0$ $(\forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$. $\Rightarrow$ ако $\Psi := (B - B_1)\Phi$, то

$\| (B - B_1)\Phi \|^2 = 0$ $(\forall\, \Phi \in \mathcal{H})$.

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

$$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \}$$

Твърдим, че $Op^*(\mathcal{H})$ е $*$-алгебра с $*$-операция $A^* := B$ от

Доказателство. а) Защо B е единствен?

- защото, ако $\langle B\Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B_1\Phi | \Psi \rangle$ $(\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$, то
$\langle (B - B_1)\Phi | \Psi \rangle = 0$ $(\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$. $\Rightarrow$ ако $\Psi := (B - B_1)\Phi$, то
$\|(B - B_1)\Phi\|^2 = 0$ $(\forall \Phi \in \mathcal{H})$. $\Rightarrow$ $B\Phi = B_1\Phi$ $(\forall \Phi \in \mathcal{H})$.

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

$$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \text{, така че } \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \}$$

Твърдим, че $Op^*(\mathcal{H})$ е $*$-алгебра с $*$-операция $A^* := B$ от

Доказателство. а) Защо B е единствен? И така, $A^* := B$ е коректно

- защото, ако $\langle B\Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B_1\Phi | \Psi \rangle$ $(\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$, то

$\langle (B - B_1)\Phi | \Psi \rangle = 0$ $(\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$. $\Rightarrow$ ако $\Psi := (B - B_1)\Phi$, то

$\|(B - B_1)\Phi\|^2 = 0$ $(\forall \Phi \in \mathcal{H})$. $\Rightarrow$ $B\Phi = B_1\Phi$ $(\forall \Phi \in \mathcal{H})$.

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

$$Op^*(\mathcal{H}) := \left\{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \;\middle|\; \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \right\}$$

Твърдим, че $Op^*(\mathcal{H})$ е $*$-алгебра с $*$-операция $A^* := B$ от

Доказателство. а) Защо B е единствен? И така, $A^* := B$ е коректно

- защото, ако $\langle B\Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B_1\Phi | \Psi \rangle$ $(\forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$, то

$\langle (B - B_1)\Phi | \Psi \rangle = 0$ $(\forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$. $\Rightarrow$ ако $\Psi := (B - B_1)\Phi$, то

$\| (B - B_1)\Phi \|^2 = 0$ $(\forall\, \Phi \in \mathcal{H})$. $\Rightarrow$ $B\Phi = B_1\Phi$ $(\forall\, \Phi \in \mathcal{H})$.

б) Защо $Op^*(\mathcal{H})$ е подалгебра на $\mathrm{End}(\mathcal{H}) := \left\{ A \;\middle|\; A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \right\}$

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

$$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \}$$

Твърдим, че $Op^*(\mathcal{H})$ е $*$-алгебра с $*$-операция $A^* := B$ от

Доказателство. а) Защо B е единствен? И така, $A^* := B$ е коректно

- защото, ако $\langle B\Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B_1\Phi | \Psi \rangle$ $(\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$, то

$\langle (B - B_1)\Phi | \Psi \rangle = 0$ $(\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$. $\Rightarrow$ ако $\Psi := (B - B_1)\Phi$, то

$\| (B - B_1)\Phi \|^2 = 0$ $(\forall \Phi \in \mathcal{H})$. $\Rightarrow$ $B\Phi = B_1\Phi$ $(\forall \Phi \in \mathcal{H})$.

б) Защо $Op^*(\mathcal{H})$ е подалгебра на $End(\mathcal{H}) := \{ A \mid A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \}$

- защото $\exists (A_1 A_2)^*$ и $(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$:

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

$$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A \Psi \rangle = \langle B \Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \}$$

Твърдим, че $Op^*(\mathcal{H})$ е $*$-алгебра с $*$-операция $A^* := B$ от

Доказателство. а) Защо B е единствен? И така, $A^* := B$ е коректно

- защото, ако $\langle B\Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | A \Psi \rangle = \langle B_1 \Phi | \Psi \rangle$ $(\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$, то

$\langle (B - B_1) \Phi | \Psi \rangle = 0$ $(\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$. $\Rightarrow$ ако $\Psi := (B - B_1)\Phi$, то

$\| (B - B_1) \Phi \|^2 = 0$ $(\forall \Phi \in \mathcal{H})$. $\Rightarrow$ $B\Phi = B_1 \Phi$ $(\forall \Phi \in \mathcal{H})$.

б) Защо $Op^*(\mathcal{H})$ е подалгебра на $End(\mathcal{H}) := \{ A \mid A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \}$

- защото $\exists (A_1 A_2)^*$ и $(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$:

$$\langle \Phi | A_1 A_2 \Psi \rangle = \langle A_1^* \Phi | A_2 \Psi \rangle = \langle A_2^* A_1^* \Phi | \Psi \rangle. \qquad \square$$

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определяме

$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}$, така че

$$\langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \}$$

Твърдим, че $Op^*(\mathcal{H})$ е $*$-алгебра с $*$-операция $A^* := B$ от

Доказателство. а) Защо B е единствен? И така, $A^* := B$ е коректно

- защото, ако $\langle B\Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B_1\Phi | \Psi \rangle$ $(\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$, то

$\langle (B - B_1)\Phi | \Psi \rangle = 0$ $(\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H})$. $\Rightarrow$ ако $\Psi := (B - B_1)\Phi$, то

$\| (B - B_1)\Phi \|^2 = 0$ $(\forall \Phi \in \mathcal{H})$. $\Rightarrow$ $B\Phi = B_1\Phi$ $(\forall \Phi \in \mathcal{H})$.

б) Защо $Op^*(\mathcal{H})$ е подалгебра на $End(\mathcal{H}) := \{ A \mid A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \}$

- защото $\exists (A_1 A_2)^*$ и $(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$:

$$\langle \Phi | A_1 A_2 \Psi \rangle = \langle A_1^* \Phi | A_2 \Psi \rangle = \langle A_2^* A_1^* \Phi | \Psi \rangle . \qquad \square$$

Забележка: $End(\mathcal{H})$ не е в общия случай $*$-алгебра

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определихме:

$$Op^*(\mathcal{H}) := \left\{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \;\middle|\; \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \right\}$$

Коментари:

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определихме:

$$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \}$$

Коментари: 1) <u>Теорема.</u> Ако $\mathcal{H}$ е пълно, тоест е Хилбертово

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определихме:

$$Op^*(\mathcal{H}) := \left\{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \;\middle|\; \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \right\}$$

Коментари: 1) <u>Теорема.</u> Ако $\mathcal{H}$ е пълно, тоест е Хилбертово, то следва

$$Op^*(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{ A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid A \text{ е ограничен оператор} \}$$

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определихме:

$$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A \Psi \rangle = \langle B \Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \}$$

Коментари: 1) <u>Теорема.</u> Ако $\mathcal{H}$ е пълно, тоест е Хилбертово, то следва

$$Op^*(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{ A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid A \text{ е ограничен оператор} \}$$

- това следва от теоремата на Hellinger–Toeplit

https://en.wikipedia.org/wiki/Hellinger%E2%80%93Toeplitz_theorem

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определихме:

$$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A \Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \}$$

Коментари: 1) <u>Теорема.</u> Ако $\mathcal{H}$ е пълно, тоест е Хилбертово, то следва

$$Op^*(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{ A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid A \text{ е ограничен оператор} \}$$

– това следва от теоремата на Hellinger–Toeplit
https://en.wikipedia.org/wiki/Hellinger%E2%80%93Toeplitz_theorem

2) Ако $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$, то $Op^*(\mathcal{H}) \equiv End(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong Mat_n(\mathbb{C})$

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определихме:

$$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A \Psi \rangle = \langle B \Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \}$$

Коментари: 1) <u>Теорема.</u> Ако $\mathcal{H}$ е пълно, тоест е Хилбертово, то следва

$$Op^*(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{ A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid A \text{ е ограничен оператор} \}$$

2) Ако $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$, то $Op^*(\mathcal{H}) \equiv End(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong Mat_n(\mathbb{C})$

3) В произволна $*$-алгебра имаме понятия

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определихме:

$$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A \Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \}$$

Коментари: 1) <u>Теорема.</u> Ако $\mathcal{H}$ е пълно, тоест е Хилбертово, то следва

$$Op^*(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{ A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid A \text{ е ограничен оператор} \}$$

2) Ако $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$, то $Op^*(\mathcal{H}) \equiv End(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong Mat_n(\mathbb{C})$

3) В произволна $*$-алгебра имаме понятия

a) самоспрегнат идемпотент

$$P^* = P = P^2$$

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определихме:

$$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A\Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \}$$

Коментари: 1) <u>Теорема.</u> Ако $\mathcal{H}$ е пълно, тоест е Хилбертово, то следва

$$Op^*(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{ A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid A \text{ е ограничен оператор} \}$$

2) Ако $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$, то $Op^*(\mathcal{H}) \equiv End(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong Mat_n(\mathbb{C})$

3) В произволна $*$-алгебра имаме понятия

a) самоспрегнат идемпотент

$$P^* = P = P^2$$

в $Op^*(\mathcal{H})$ това отговаря на ортогонален проектор:

$$\mathcal{H} = P\mathcal{H} \oplus (\hat{1} - P)\mathcal{H}$$

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определихме:

$$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A \Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \}$$

Коментари: 1) <u>Теорема.</u> Ако $\mathcal{H}$ е пълно, тоест е Хилбертово, то следва

$$Op^*(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{ A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid A \text{ е ограничен оператор} \}$$

2) Ако $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$, то $Op^*(\mathcal{H}) \equiv End(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong Mat_n(\mathbb{C})$

3) В произволна $*$-алгебра имаме понятия

а) самоспрегнат идемпотент

$$P^* = P = P^2$$

в $Op^*(\mathcal{H})$ това отговаря на ортогонален проектор:

$$\mathcal{H} = P\mathcal{H} \oplus (\hat{1} - P)\mathcal{H}$$

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определихме:

$$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}, \text{ така че } \langle \Phi | A \Psi \rangle = \langle B\Phi | \Psi \rangle \text{ за } \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \}$$

Коментари: 1) <u>Теорема.</u> Ако $\mathcal{H}$ е пълно, тоест е Хилбертово, то следва

$$Op^*(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{ A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid A \text{ е ограничен оператор} \}$$

2) Ако $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$, то $Op^*(\mathcal{H}) \equiv End(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong Mat_n(\mathbb{C})$

3) В произволна $*$-алгебра имаме понятия

а) самоспрегнат идемпотент

$$P^* = P = P^2$$

в $Op^*(\mathcal{H})$ това отговаря на ортогонален проектор:

$$\mathcal{H} = P\mathcal{H} \oplus (\hat{1} - P)\mathcal{H}$$

$*$-Алгебрата $Op^*(\mathcal{H})$

За пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ определихме:

$Op^*(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H} \mid \exists B : \mathcal{H} \xrightarrow[\text{лин.}]{} \mathcal{H}$, така че

$\langle \Phi | A \Psi \rangle = \langle B \Phi | \Psi \rangle$ за $\forall\, \Phi, \Psi \in \mathcal{H} \}$

Коментари: 1) <u>Теорема.</u> Ако $\mathcal{H}$ е пълно, тоест е Хилбертово, то следва

$Op^*(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{ A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid A$ е ограничен оператор $\}$

2) Ако $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$, то $Op^*(\mathcal{H}) \equiv End(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong Mat_n(\mathbb{C})$

3) В произволна $*$-алгебра имаме понятия

а) самоспрегнат идемпотент $P^* = P = P^2$	в $Op^*(\mathcal{H})$ това отговаря на ортогонален проектор: $\mathcal{H} = P\mathcal{H} \oplus (\hat{1} - P)\mathcal{H}$
б) Унитарен елемент $U^* = U^{-1}$	в $Op^*(\mathcal{H})$ това отговаря на унитарен оператор: $\langle U\Phi \mid U\Psi \rangle = \langle \Phi \mid \Psi \rangle$

Представяния на $*$-алгебри в пред-хилб. пр-ва

Представяния на $*$-алгебри в пред-хилб. пр-ва

Определение. Ако $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с 1, то представяне на $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$

Представяния на $*$-алгебри в пред-хилб. пр-ва

<u>Определение.</u> Ако $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с 1, то <u>представяне</u> на $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ наричаме всеки $*$-морфизъм на алгебри с 1:

$$\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$$

Представяния на $*$-алгебри в пред-хилб. пр-ва

<u>Определение.</u> Ако $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с 1, то <u>представяне</u> на $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ наричаме всеки $*$-морфизъм на алгебри с 1:

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow Op^*(\mathcal{H})$$

<u>Примери.</u> 1) Ако $\mathcal{A} = Op^*(\mathcal{H})$, то идентитета $\pi := id : \mathcal{A} \longrightarrow Op^*(\mathcal{H})$ е представяне - нарича се понякога: тривиално представяне

Представяния на $*$-алгебри в пред-хилб. пр-ва

<u>Определение.</u> Ако $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с 1, то <u>представяне</u> на $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ наричаме всеки $*$-морфизъм на алгебри с 1:

$$\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$$

<u>Примери.</u> 1) Ако $\mathcal{A} = Op^*(\mathcal{H})$, то идентитета $\pi := id : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е представяне - нарича се понякога: тривиално представяне

2) Ако $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ и $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, то

Представяния на $*$-алгебри в пред-хилб. пр-ва

<u>Определение.</u> Ако $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с 1, то <u>представяне</u> на $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ наричаме всеки $*$-морфизъм на алгебри с 1:

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow Op^*(\mathcal{H})$$

<u>Примери.</u> 1) Ако $\mathcal{A} = Op^*(\mathcal{H})$, то идентитета $\pi := id : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е представяне – нарича се понякога: тривиално представяне

2) Ако $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ и $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, то

$$\pi\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} := \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}}_{\text{умножение на матрици}}$$

Представяния на $*$-алгебри в пред-хилб. пр-ва

<u>Определение.</u> Ако $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с 1, то <u>представяне</u> на $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ наричаме всеки $*$-морфизъм на алгебри с 1:

$$\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$$

<u>Примери.</u> 1) Ако $\mathcal{A} = Op^*(\mathcal{H})$, то идентитета $\pi := id : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е представяне – нарича се понякога: тривиално представяне

2) Ако $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ и $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, то

$$\pi\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} := \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}}_{\text{умножение на матрици}}$$

е представяне $\mathcal{A} \to Op^*(\mathbb{C}^n)$, което е естествения изоморфизъм $Mat_n(\mathbb{C}) \cong Op^*(\mathbb{C}^n)$.

Представяния на $*$-алгебри в пред-хилб. пр-ва

<u>Определение.</u> Ако $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с 1, то <u>представяне</u> на $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ наричаме всеки $*$-морфизъм на алгебри с 1:

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow Op^*(\mathcal{H})$$

<u>Примери.</u> 1) Ако $\mathcal{A} = Op^*(\mathcal{H})$, то идентитета $\pi := id : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е представяне - нарича се понякога: тривиално представяне

2) Ако $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ и $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, то естествения изоморфизъм $Mat_n(\mathbb{C}) \cong Op^*(\mathbb{C}^n)$ е представяне $\mathcal{A} \to Op^*(\mathbb{C}^n)$.

Представяния на $*$-алгебри в пред-хилб. пр-ва

<u>Определение.</u> Ако $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с 1, то <u>представяне</u> на $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ наричаме всеки $*$-морфизъм на алгебри с 1:

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow Op^*(\mathcal{H})$$

<u>Примери.</u> 1) Ако $\mathcal{A} = Op^*(\mathcal{H})$, то идентитета $\pi := id : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е представяне - нарича се понякога: тривиално представяне

2) Ако $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ и $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, то естествения изоморфизъм $Mat_n(\mathbb{C}) \cong Op^*(\mathbb{C}^n)$ е представяне $\mathcal{A} \longrightarrow Op^*(\mathbb{C}^n)$.

3) Нетривиално представяне на $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ е породено от $*$-морфизма

Представяния на $*$-алгебри в пред-хилб. пр-ва

<u>Определение.</u> Ако $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с 1, то <u>представяне</u> на $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ наричаме всеки $*$-морфизъм на алгебри с 1:

$$\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$$

<u>Примери.</u> 1) Ако $\mathcal{A} = Op^*(\mathcal{H})$, то идентитета $\pi := id : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е представяне – нарича се понякога: тривиално представяне

2) Ако $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ и $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, то естествения изоморфизъм $Mat_n(\mathbb{C}) \cong Op^*(\mathbb{C}^n)$ е представяне $\mathcal{A} \to Op^*(\mathbb{C}^n)$.

3) Нетривиално представяне на $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ е породено от $*$-морфизма

$$Mat_n(\mathbb{C}) \to Mat_{nm}(\mathbb{C}) : \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{11}\hat{1}_m & \cdots & a_{1n}\hat{1}_m \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{n1}\hat{1}_m & \cdots & a_{nn}\hat{1}_m \\ \hline \end{array}$$

Представяния на $*$-алгебри в пред-хилб. пр-ва

Определение. Ако $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с 1, то представяне на $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ наричаме всеки $*$-морфизъм на алгебри с 1:

$$\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$$

Примери. 1) Ако $\mathcal{A} = Op^*(\mathcal{H})$, то идентитета $\pi := id : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е представяне - нарича се понякога: тривиално представяне

2) Ако $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ и $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, то естествения изоморфизъм $Mat_n(\mathbb{C}) \cong Op^*(\mathbb{C}^n)$ е представяне $\mathcal{A} \to Op^*(\mathbb{C}^n)$.

3) Нетривиално представяне на $\mathcal{A} = Mat_n(\mathbb{C})$ е породено от $*$-морфизма

$$Mat_n(\mathbb{C}) \to Mat_{nm}(\mathbb{C}) : \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{11}\mathbb{1}_m & \cdots & a_{1n}\mathbb{1}_m \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{n1}\mathbb{1}_m & \cdots & a_{nn}\mathbb{1}_m \\ \hline \end{array}$$

т.нар. фактори

Оказва се, че $\forall$ представяния на $Mat_n(\mathbb{C})$ са от този вид (т.е. еквивалентни).

Представяния на $*$-алгебри в пред-хилб. пр-ва

Определение. Ако $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, то представяне на $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ наричаме всеки $*$-морфизъм на алгебри с 1:

$$\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$$

Забележки. 1) Равносилно понятие на представяне е понятието действие на $*$-алгебра $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} : (A, \Psi) \mapsto \pi(A)\Psi$$

Представяния на $*$-алгебри в пред-хилб. пр-ва

Определение. Ако $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с 1, то представяне на $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ наричаме всеки $*$-морфизъм на алгебри с 1:

$$\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$$

Забележки. 1) Равносилно понятие на представяне е понятието действие на $*$-алгебра $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} : (A, \Psi) \mapsto \pi(A)\Psi$$

2) Задаване на представяне на груповата $*$-алгебра $\mathbb{C}[G]$ в пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$, $\pi : \mathbb{C}[G] \to Op^*(\mathcal{H})$

Представяния на $*$-алгебри в пред-хилб. пр-ва

<u>Определение.</u> Ако $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с 1, то <u>представяне</u> на $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$ наричаме всеки $*$-морфизъм на алгебри с 1:

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow Op^*(\mathcal{H})$$

<u>Забележки.</u> 1) Равносилно понятие на представяне е понятието <u>действие</u> на $*$-алгебра $\mathcal{A}$ в пред-хилбертово пространство:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} : (A, \Psi) \longmapsto \pi(A)\Psi$$

2) Задаване на представяне на груповата $*$-алгебра $\mathbb{C}[G]$ в пред-хилбертово пространство $\mathcal{H}$, $\pi : \mathbb{C}[G] \to Op^*(\mathcal{H})$, е равносилно на задаване на унитарно представяне на G в $\mathcal{H}$ по формулата

$$U_g := \pi(e_g) \in Op^*(\mathcal{H}) \text{ - унитарен оператор, т.е. } U_g^* = U_{g^{-1}}$$

$$U_{g_1 g_2} = U_{g_1} U_{g_2}$$

Еквивалентни представяния

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{I}$ и нека $\pi_j : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_j)$ за $j = 1, 2$ са две нейни представяния в пред-хилбертови пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

Еквивалентни представяния

Определение. Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{1}$ и нека $\pi_j : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_j)$ за $j = 1, 2$ са две нейни представяния в пред-хилбертови пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Представянията π_1 и π_2 се наричат <u>унитарно еквивалентни</u> (или просто еквивалентни), ако $\exists$ унитарен изоморфизъм

$$U : \mathcal{H}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}_2$$

Еквивалентни представяния

Определение. Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{1}$ и нека $\pi_j : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_j)$ за $j = 1, 2$ са две нейни представяния в пред-хилбертови пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Представянията π_1 и π_2 се наричат унитарно еквивалентни (или просто еквивалентни), ако $\exists$ унитарен изоморфизъм

$$U : \mathcal{H}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}_2$$

за който $$\pi_2(A) = U \pi_1(A) U^{-1} \quad \text{при } \forall A \in \mathcal{A}$$

Еквивалентни представяния

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{1}$ и нека $\pi_j : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_j)$ за $j = 1, 2$ са две нейни представяния в пред-хилбертови пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Представянията π_1 и π_2 се наричат <u>унитарно еквивалентни</u> (или просто еквивалентни), ако $\exists$ унитарен изоморфизъм

$$U : \mathcal{H}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}_2$$

за който $$\pi_2(A) = U \pi_1(A) U^{-1} \quad \text{при } \forall A \in \mathcal{A}$$

<u>Упражнение.</u> Докажете, че ако $\pi_1 : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_1)$ е представяне и определим

Еквивалентни представяния

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{I}$ и нека $\pi_j : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_j)$ за $j = 1, 2$ са две нейни представяния в пред-хилбертови пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Представянията π_1 и π_2 се наричат <u>унитарно еквивалентни</u> (или просто еквивалентни), ако $\exists$ унитарен изоморфизъм

$$U : \mathcal{H}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}_2$$

за който $$\pi_2(A) = U\,\pi_1(A)\,U^{-1} \quad \text{при } \forall A \in \mathcal{A}$$

<u>Упражнение.</u> Докажете, че ако $\pi_1 : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_1)$ е представяне и определим $\pi_2 : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_2)$ по формулата $\pi_2(A) = U\,\pi_1(A)\,U^{-1}$ (за $\forall A \in \mathcal{A}$)

Еквивалентни представяния

Определение. Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{I}$ и нека $\pi_j : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_j)$ за $j = 1, 2$ са две нейни представяния в пред-хилбертови пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Представянията π_1 и π_2 се наричат <u>унитарно еквивалентни</u> (или просто еквивалентни), ако $\exists$ унитарен изоморфизъм

$$U : \mathcal{H}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}_2$$

за който

$$\pi_2(A) = U\, \pi_1(A)\, U^{-1} \quad \text{при } \forall A \in \mathcal{A}$$

Упражнение. Докажете, че ако $\pi_1 : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_1)$ е представяне и определим $\pi_2 : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_2)$ по формулата $\pi_2(A) = U\, \pi_1(A)\, U^{-1}$ (за $\forall A \in \mathcal{A}$) при унитарен изоморфизъм $U : \mathcal{H}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}_2$

Еквивалентни представяния

Определение. Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{1}$ и нека $\pi_j : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_j)$ за $j = 1, 2$ са две нейни представяния в пред-хилбертови пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Представянията π_1 и π_2 се наричат <u>унитарно еквивалентни</u> (или просто еквивалентни), ако $\exists$ унитарен изоморфизъм

$$U : \mathcal{H}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}_2$$

за който
$$\pi_2(A) = U\, \pi_1(A)\, U^{-1} \quad \text{при } \forall A \in \mathcal{A}$$

Упражнение. Докажете, че ако $\pi_1 : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_1)$ е представяне и определим $\pi_2 : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_2)$ по формулата $\pi_2(A) = U\, \pi_1(A)\, U^{-1}$ (за $\forall A \in \mathcal{A}$) при унитарен изоморфизъм $U : \mathcal{H}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}_2$, то тогава π_2 е също представяне на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{H}_2$ (и $\Rightarrow$ е еквивалентно на π_1).

Еквивалентни представяния

Определение. Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{1}$ и нека $\pi_j : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_j)$ за $j = 1, 2$ са две нейни представяния в пред-хилбертови пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Представянията π_1 и π_2 се наричат <u>унитарно еквивалентни</u> (или просто еквивалентни), ако $\exists$ унитарен изоморфизъм

$$U : \mathcal{H}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}_2$$

за който
$$\pi_2(A) = U \pi_1(A) U^{-1} \quad \text{при } \forall A \in \mathcal{A}$$

Упражнение. Докажете, че ако $\pi_1 : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_1)$ е представяне и определим $\pi_2 : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_2)$ по формулата $\pi_2(A) = U \pi_1(A) U^{-1}$ (за $\forall A \in \mathcal{A}$) при унитарен изоморфизъм $U : \mathcal{H}_1 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}_2$, то тогава π_2 е също представяне на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{H}_2$ (и $\Rightarrow$ е еквивалентно на π_1).

Въведеният унитарен оператор U, който задава еквивалентност на представянията се нарича сплитащ /intertwinig/ оператор.

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е нейно представяне.

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с 1, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е нейно представяне.

<u>Цикличен</u> вектор (cyclic vector) на представянето π

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с 1, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е нейно представяне.

<u>Цикличен</u> вектор (cyclic vector) на представянето π е такъв $\Psi \in \mathcal{H}$, за който

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с 1, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е нейно представяне.
<u>Цикличен</u> вектор (cyclic vector) на представянето π е такъв $\Psi \in \mathcal{H}$, за който

$$\pi(\mathcal{A})\,\Psi$$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е нейно представяне.

<u>Цикличен</u> вектор (cyclic vector) на представянето π е такъв $\Psi \in \mathcal{H}$, за който

$$\pi(\mathcal{A})\Psi := \{ \pi(A)\Psi \mid A \in \mathcal{A} \}$$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

__Определение.__ Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с 1, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е нейно представяне.

__Цикличен__ вектор (cyclic vector) на представянето π е такъв $\Psi \in \mathcal{H}$, за който

$$\pi(\mathcal{A})\Psi := \{\pi(A)\Psi \mid A \in \mathcal{A}\} \overset{\text{искаме}}{=} \mathcal{H}$$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е нейно представяне.
<u>Цикличен</u> вектор (cyclic vector) на представянето π е такъв $\Psi \in \mathcal{H}$, за който

$$\pi(\mathcal{A})\Psi := \{\pi(A)\Psi \mid A \in \mathcal{A}\} \overset{\text{искаме}}{=} \mathcal{H}$$

Представения с цикличен вектор се наричат циклични (cyclic representations).

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с 1, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е нейно представяне.
<u>Цикличен</u> вектор (cyclic vector) на представянето π е такъв $\Psi \in \mathcal{H}$, за който

$$\pi(\mathcal{A})\Psi := \{\pi(A)\Psi \mid A \in \mathcal{A}\} \overset{\text{искаме}}{=} \mathcal{H}$$

Представяния с цикличен вектор се наричат циклични (cyclic representations).

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е нейно представяне.

<u>Цикличен</u> вектор (cyclic vector) на представянето π е такъв $\Psi \in \mathcal{H}$, за който

$$\pi(\mathcal{A})\,\Psi := \{\pi(A)\,\Psi \mid A \in \mathcal{A}\} \overset{\text{искаме}}{=} \mathcal{H}$$

Представения с цикличен вектор се наричат циклични (cyclic representations).

<u>Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал</u>

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$.

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е нейно представяне.
<u>Цикличен</u> вектор (cyclic vector) на представянето π е такъв $\Psi \in \mathcal{H}$, за който

$$\pi(\mathcal{A})\Psi := \{\pi(A)\Psi \mid A \in \mathcal{A}\} \overset{\text{искаме}}{=} \mathcal{H}$$

Представяния с цикличен вектор се наричат циклични (cyclic representations).

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists$ пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}_\rho$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е нейно представяне.

<u>Цикличен</u> вектор (cyclic vector) на представянето π е такъв $\Psi \in \mathcal{H}$, за който

$$\pi(\mathcal{A})\,\Psi := \{\pi(A)\,\Psi \mid A \in \mathcal{A}\} \overset{\text{искаме}}{=} \mathcal{H}$$

Представяния с цикличен вектор се наричат циклични (cyclic representations).

<u>Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал</u>

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists$ пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}_\rho$, представяне $\pi_\rho : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_\rho)$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е нейно представяне.
<u>Цикличен</u> вектор (cyclic vector) на представянето π е такъв $\Psi \in \mathcal{H}$, за който

искаме

$$\pi(\mathcal{A})\,\Psi := \{\pi(A)\,\Psi \mid A \in \mathcal{A}\} \overset{\downarrow}{=} \mathcal{H}$$

Представяния с цикличен вектор се наричат циклични (cyclic representations).

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists$ пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}_\rho$, представяне $\pi_\rho : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и цикличен вектор $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е нейно представяне.
<u>Цикличен</u> вектор (cyclic vector) на представянето π е такъв $\Psi \in \mathcal{H}$, за който

искаме

$$\pi(\mathcal{A})\,\Psi := \{\pi(A)\,\Psi \mid A \in \mathcal{A}\} \stackrel{\downarrow}{=} \mathcal{H}$$

Представяния с цикличен вектор се наричат циклични (cyclic representations).

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists$ пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}_\rho$, представяне $\pi_\rho : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и цикличен вектор $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ такъв, че

$$\forall A \in \mathcal{A} : \quad \rho(A) = \langle \Psi_\rho \,|\, \pi_\rho(A)\,\Psi_\rho \rangle$$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е нейно представяне.
<u>Цикличен</u> вектор (cyclic vector) на представянето π е такъв $\Psi \in \mathcal{H}$, за който

$$\pi(\mathcal{A})\,\Psi := \{\pi(A)\,\Psi \mid A \in \mathcal{A}\} \overset{\text{искаме}}{=} \mathcal{H}$$

Представяния с цикличен вектор се наричат циклични (cyclic representations).

<u>Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал</u>

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists$ пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}_\rho$, представяне $\pi_\rho : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и цикличен вектор $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ такъв, че

$$\forall A \in \mathcal{A} : \ \rho(A) = \langle \Psi_\rho \,|\, \pi_\rho(A)\, \Psi_\rho \rangle$$

формула на Дирак за средните стойности

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

<u>Определение.</u> Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ е нейно представяне.
<u>Цикличен</u> вектор (cyclic vector) на представянето π е такъв $\Psi \in \mathcal{H}$, за който

$$\pi(\mathcal{A})\,\Psi := \{\pi(A)\,\Psi \mid A \in \mathcal{A}\} \overset{\text{искаме}}{=} \mathcal{H}$$

Представяния с цикличен вектор се наричат циклични (cyclic representations).

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists$ пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}_\rho$, представяне $\pi_\rho : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и цикличен вектор $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ такъв, че

$$\forall A \in \mathcal{A} : \ \rho(A) = \langle \Psi_\rho \,|\, \pi_\rho(A)\, \Psi_\rho \rangle$$

формула на Дирак за средните стойности

(В частност, $\|\Psi_\rho\|^2 = \langle \Psi_\rho \,|\, \pi_\rho(\hat{1})\Psi_\rho \rangle \hat{1}_{\mathcal{H}} \Psi_\rho \rangle = \rho(\hat{1}) = 1$.)

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists$ пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}_\rho$, представяне $\pi_\rho : \mathcal{A} \longrightarrow Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и цикличен вектор $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ такъв, че

$$\forall A \in \mathcal{A} : \rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(A) \Psi_\rho \rangle \longleftarrow$$

формула на Дирак за средните стойности

(В частност, $\|\Psi_\rho\|^2 = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(\hat{1}) \Psi_\rho \rangle \hat{1}_{\mathcal{H}} \Psi_\rho \rangle = \rho(\hat{1}) = 1$.)

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists$ пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}_\rho$, представяне $\pi_\rho : \mathcal{A} \longrightarrow Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и цикличен вектор $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ такъв, че

$$\forall A \in \mathcal{A} : \rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(A) \Psi_\rho \rangle \longleftarrow$$ формула на Дирак за средните стойности

(В частност, $\|\Psi_\rho\|^2 = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(\hat{1}) \Psi_\rho \rangle \hat{1}_{\mathcal{H}} \Psi_\rho \rangle = \rho(\hat{1}) = 1$.)

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists$ пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}_\rho$, представяне $\pi_\rho : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и цикличен вектор $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ такъв, че

$$\forall A \in \mathcal{A} : \ \rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(A)\, \Psi_\rho \rangle$$

формула на Дирак за средните стойности

(В частност, $\|\Psi_\rho\|^2 = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(\hat{1}) \Psi_\rho \rangle = \langle \Psi_\rho | \hat{1}_{\mathcal{H}} \Psi_\rho \rangle = \rho(\hat{1}) = 1$.)

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне с цикличен вектор Ψ са такива, че

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists$ пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}_\rho$, представяне $\pi_\rho : \mathcal{A} \longrightarrow Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и цикличен вектор $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ такъв, че

$$\forall A \in \mathcal{A} : \rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(A) \Psi_\rho \rangle \longleftarrow$$ формула на Дирак за средните стойности

(В частност, $\|\Psi_\rho\|^2 = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(\hat{1}) \Psi_\rho \rangle \hat{1}_{\mathcal{H}} \Psi_\rho \rangle = \rho(\hat{1}) = 1$.)

Освен това: $\mathcal{H}_\rho$, π_ρ, Ψ_ρ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне с цикличен вектор Ψ са такива, че

$$\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle \text{ за } \forall A \in \mathcal{A},$$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists$ пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}_\rho$, представяне $\pi_\rho : \mathcal{A} \longrightarrow Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и цикличен вектор $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ такъв, че

$$\forall A \in \mathcal{A} : \quad \rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(A) \Psi_\rho \rangle \longleftarrow$$

формула на Дирак за средните стойности

(В частност, $\|\Psi_\rho\|^2 = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(\hat{1}) \Psi_\rho \rangle \hat{1}_{\mathcal{H}} \Psi_\rho \rangle = \rho(\hat{1}) = 1$.)

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне с цикличен вектор Ψ са такива, че

$$\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle \text{ за } \forall A \in \mathcal{A}, \quad \text{то } \exists! \text{ унитарен изоморфизъм}$$

$U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\rho \in \mathrm{States}(\mathcal{A})$. Тогава $\exists$ пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}_\rho$, представяне $\pi_\rho : \mathcal{A} \to \mathrm{Op}^*(\mathcal{H}_\rho)$ и цикличен вектор $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ такъв, че

$$\forall A \in \mathcal{A} : \quad \rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(A) \Psi_\rho \rangle$$

$\longleftarrow$ формула на Дирак за средните стойности

(В частност, $\|\Psi_\rho\|^2 = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(\hat{1}) \Psi_\rho \rangle \hat{1}_{\mathcal{H}} \Psi_\rho \rangle = \rho(\hat{1}) = 1$.)

Освен това: $\mathcal{H}_\rho$, π_ρ, Ψ_ρ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to \mathrm{Op}^*(\mathcal{H})$ - представяне с цикличен вектор Ψ са такива, че

$$\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle \text{ за } \forall A \in \mathcal{A}, \quad \text{то } \exists! \text{ унитарен изоморфизъм}$$

$U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ (линеен изоморфизъм, запазващ нормата),

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists$ пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}_\rho$, представяне $\pi_\rho : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и цикличен вектор $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ такъв, че

$$\forall A \in \mathcal{A} : \quad \rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(A) \Psi_\rho \rangle$$

формула на Дирак за средните стойности

(В частност, $\| \Psi_\rho \|^2 = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(\hat{1}) \Psi_\rho \rangle \hat{1}_{\mathcal{H}} \Psi_\rho \rangle = \rho(\hat{1}) = 1$.)

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне с цикличен вектор Ψ са такива, че

$\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ за $\forall A \in \mathcal{A}$, то $\exists !$ унитарен изоморфизъм

$U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ (линеен изоморфизъм, запазващ нормата), така че

$$\pi(A) = U_\rho \, \pi_\rho(A) \, U_\rho^{-1}$$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

КОРЕКЦИЯ: https://en.wikipedia.org/wiki/Gelfand%E2%80%93Naimark%E2%80%93Segal_construction

Нека $\mathcal{A}$ е $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\rho \in \mathrm{States}(\mathcal{A})$. Тогава $\exists$ пред-Хилб. пр-во $\mathcal{H}_\rho$, представяне $\pi_\rho : \mathcal{A} \to \mathrm{Op}^*(\mathcal{H}_\rho)$ и цикличен вектор $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ такъв, че

$$\forall A \in \mathcal{A} : \quad \rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(A) \Psi_\rho \rangle$$

формула на Дирак за средните стойности

(В частност, $\| \Psi_\rho \|^2 = \langle \Psi_\rho | \pi_\rho(\hat{1}) \Psi_\rho \rangle \hat{1}_{\mathcal{H}} \Psi_\rho \rangle = \rho(\hat{1}) = 1$.)

Освен това: $\mathcal{H}_\rho$, π_ρ, Ψ_ρ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to \mathrm{Op}^*(\mathcal{H})$ - представяне с цикличен вектор Ψ са такива, че

$$\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle \text{ за } \forall A \in \mathcal{A},$$

то $\exists!$ унитарен изоморфизъм

$U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ (линеен изоморфизъм, запазващ нормата), така че

$$\pi(A) = U_\rho \, \pi_\rho(A) \, U_\rho^{-1}$$

- еквивалентни представяния, а U_ρ се нарича intertwining сплитащ оператор

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

Нека – $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists\ \pi_\rho : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{предст.}} Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ - цикличен такъв, че $\rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi(A) \Psi_\rho \rangle \quad (\forall A \in \mathcal{A})$.

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне, $\Psi \in \mathcal{H}$ - цикличен, така че за $\forall A \in \mathcal{A}$:
$\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ то $\exists!$ унитарен $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ за който $\pi(A) = U_\rho \pi_\rho(A) U_\rho^{-1}$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

Нека – $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists\ \pi_\rho : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{предст.}} Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ - цикличен такъв, че $\rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi(A) \Psi_\rho \rangle \quad (\forall A \in \mathcal{A})$.

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне, $\Psi \in \mathcal{H}$ - цикличен, така че за $\forall A \in \mathcal{A}$: $\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ то $\exists !$ унитарен $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ за който $\pi(A) = U_\rho \pi_\rho(A) U_\rho^{-1}$

Док. - схема

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

Нека – $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists\; \pi_\rho : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{предст.}} Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ - цикличен такъв, че $\rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi(A) \Psi_\rho \rangle \quad (\forall A \in \mathcal{A})$.

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне, $\Psi \in \mathcal{H}$ - цикличен, така че за $\forall A \in \mathcal{A}$: $\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ то $\exists!$ унитарен $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ за който $\pi(A) = U_\rho \pi_\rho(A) U_\rho^{-1}$

Док.- схема $\mathcal{H}_\rho$ се строи като фактор-линейно простр.

$\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho$, където $\mathcal{J}_\rho = \{ A \in \mathcal{A} \mid \rho(A^*A) = 0 \}$.

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

Нека – $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists\ \pi_\rho : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{предст.}} Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ - цикличен такъв, че $\rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi(A) \Psi_\rho \rangle \quad (\forall A \in \mathcal{A})$.

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне, $\Psi \in \mathcal{H}$ - цикличен, така че за $\forall A \in \mathcal{A}$: $\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ то $\exists!$ унитарен $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ за който $\pi(A) = U_\rho \pi_\rho(A) U_\rho^{-1}$

Док.- схема $\mathcal{H}_\rho$ се строи като фактор-линейно простр.

$\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A} / \mathcal{J}_\rho$, където $\mathcal{J}_\rho = \{ A \in \mathcal{A} \mid \rho(A^* A) = 0 \}$.

За целта се установява:

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

Нека – $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists\ \pi_\rho : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{предст.}} Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ - цикличен такъв, че $\rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi(A) \Psi_\rho \rangle$ $(\forall A \in \mathcal{A})$.

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне, $\Psi \in \mathcal{H}$ - цикличен, така че за $\forall A \in \mathcal{A}$:
$\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ то $\exists !$ унитарен $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ за който $\pi(A) = U_\rho \pi_\rho(A) U_\rho^{-1}$

Док.-схема $\mathcal{H}_\rho$ се строи като фактор-линейно простр.

$$\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho \text{, където } \mathcal{J}_\rho = \{ A \in \mathcal{A} \mid \rho(A^*A) = 0 \}.$$

За целта се установява: (1) $\mathcal{J}_\rho$ е линейно подпр-во

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

Нека – $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists\ \pi_\rho : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{предст.}} Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ - цикличен такъв, че $\rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi(A) \Psi_\rho \rangle \quad (\forall A \in \mathcal{A})$.

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне, $\Psi \in \mathcal{H}$ - цикличен, така че за $\forall A \in \mathcal{A}$: $\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ то $\exists!$ унитарен $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ за който $\pi(A) = U_\rho \pi_\rho(A) U_\rho^{-1}$

Док.- схема $\mathcal{H}_\rho$ се строи като фактор-линейно простр.

$$\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho, \text{ където } \mathcal{J}_\rho = \{ A \in \mathcal{A} \mid \rho(A^* A) = 0 \}.$$

За целта се установява: (1) $\mathcal{J}_\rho$ е линейно подпр-во

– използва се неравенство на Коши - Шварц / Cauchy-Schwartz

$$|\rho(A^* B)| \leq \rho(A^* A)\, \rho(B^* B)$$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

Нека – $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists\ \pi_\rho : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{предст.}} Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ - цикличен такъв, че $\rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi(A) \Psi_\rho \rangle$ $(\forall A \in \mathcal{A})$.

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне, $\Psi \in \mathcal{H}$ - цикличен, така че за $\forall A \in \mathcal{A}$: $\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ то $\exists !$ унитарен $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ за който $\pi(A) = U_\rho \pi_\rho(A) U_\rho^{-1}$

Док.- схема $\mathcal{H}_\rho$ се строи като фактор-линейно простр.

$$\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A}/\mathcal{I}_\rho, \text{ където } \mathcal{I}_\rho = \{ A \in \mathcal{A} \mid \rho(A^* A) = 0 \}.$$

За целта се установява: (1) $\mathcal{I}_\rho$ е линейно подпр-во

– използва се неравенство на Коши - Шварц / Cauchy-Schwartz

$$|\rho(A^* B)| \leq \rho(A^* A)\, \rho(B^* B) \implies \mathcal{I}_\rho = \{ A \in \mathcal{A} \mid \rho(B^* A) = 0 \ \forall B \in \mathcal{A} \}$$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists\ \pi_\rho : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{предст.}} Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ - цикличен такъв, че $\rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi(A) \Psi_\rho \rangle \quad (\forall A \in \mathcal{A})$.

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне, $\Psi \in \mathcal{H}$ - цикличен, така че за $\forall A \in \mathcal{A}$: $\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ то $\exists!$ унитарен $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ за който $\pi(A) = U_\rho \pi_\rho(A) U_\rho^{-1}$

Док.- схема $\mathcal{H}_\rho$ се строи като фактор-линейно простр.

$$\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A} / \mathcal{J}_\rho, \text{ където } \mathcal{J}_\rho = \{ A \in \mathcal{A} \mid \rho(A^* A) = 0 \}.$$

За целта се установява: (1) $\mathcal{J}_\rho$ е линейно подпр-во

– използва се неравенсово на Коши - Шварц / Cauchy-Schwartz

$$|\rho(A^* B)| \leq \rho(A^* A)\, \rho(B^* B) \implies \mathcal{J}_\rho = \{ A \in \mathcal{A} \mid \rho(B^* A) = 0 \ \forall B \in \mathcal{A} \}$$
$$= \{ B \in \mathcal{A} \mid \rho(B^* A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A} \}$$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

Нека $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists\ \pi_\rho : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{предст.}} Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ - цикличен такъв, че $\rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi(A) \Psi_\rho \rangle$ $(\forall A \in \mathcal{A})$.

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне, $\Psi \in \mathcal{H}$ - цикличен, така че за $\forall A \in \mathcal{A}$: $\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ то $\exists !$ унитарен $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ за който $\pi(A) = U_\rho \pi_\rho(A) U_\rho^{-1}$

Док.- схема $\mathcal{H}_\rho$ се строи като фактор-линейно простр.

$$\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho, \text{ където } \mathcal{J}_\rho = \{A \in \mathcal{A} \mid \rho(A^*A) = 0\}.$$

За целта се установява: (1) $\mathcal{J}_\rho$ е линейно подпр-во

— използва се неравенство на Коши-Шварц / Cauchy-Schwartz

$$|\rho(A^*B)| \leq \rho(A^*A)\,\rho(B^*B) \Longrightarrow \mathcal{J}_\rho = \{A \in \mathcal{A} \mid \rho(B^*A) = 0 \ \forall B \in \mathcal{A}\}$$
$$= \{B \in \mathcal{A} \mid \rho(B^*A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}\}$$

(2) По този начин следва също, че $\mathcal{J}_\rho$ е ляв идеал: $\mathcal{A}\mathcal{J}_\rho \subseteq \mathcal{J}_\rho$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

Нека – $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists\ \pi_\rho : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{предст.}} Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ - цикличен такъв, че $\rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi(A) \Psi_\rho \rangle \quad (\forall A \in \mathcal{A})$.

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне, $\Psi \in \mathcal{H}$ - цикличен, така че за $\forall A \in \mathcal{A}$: $\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ то $\exists !$ унитарен $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ за който $\pi(A) = U_\rho \pi_\rho(A) U_\rho^{-1}$

Док.-схема $\mathcal{H}_\rho$ се строи като фактор-линейно простр.

$$\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A} / \mathcal{J}_\rho, \text{ където } \mathcal{J}_\rho = \{ A \in \mathcal{A} \mid \rho(A^* A) = 0 \}.$$

За целта: (1) $\mathcal{J}_\rho$ е линейно подпр-во; (2) $\mathcal{J}_\rho$ е ляв идеал: $\mathcal{A}\mathcal{J}_\rho \subseteq \mathcal{J}_\rho$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

Нека – $*$-алгебра с $\hat{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists\ \pi_\rho : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{предст.}} Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ - цикличен такъв, че $\rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi(A) \Psi_\rho \rangle$ $(\forall A \in \mathcal{A})$.

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне, $\Psi \in \mathcal{H}$ - цикличен, така че за $\forall A \in \mathcal{A}$: $\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ то $\exists !$ унитарен $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ за който $\pi(A) = U_\rho \pi_\rho(A) U_\rho^{-1}$

Док.- схема $\mathcal{H}_\rho$ се строи като фактор-линейно простр.

$$\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho, \text{ където } \mathcal{J}_\rho = \{ A \in \mathcal{A} \mid \rho(A^* A) = 0 \}.$$

За целта: (1) $\mathcal{J}_\rho$ е линейно подпр-во; (2) $\mathcal{J}_\rho$ е ляв идеал: $\mathcal{A}\mathcal{J}_\rho \subseteq \mathcal{J}_\rho$

(3) Тогава е коректно определено $\pi_\rho : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ за $\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

Нека $\mathcal{A}$ – $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists\ \pi_\rho : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{предст.}} Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ - цикличен такъв, че $\rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi(A) \Psi_\rho \rangle \quad (\forall A \in \mathcal{A})$.

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне, $\Psi \in \mathcal{H}$ - цикличен, така че за $\forall A \in \mathcal{A}$: $\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ то $\exists!$ унитарен $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ за който $\pi(A) = U_\rho \pi_\rho(A) U_\rho^{-1}$

Док.-схема $\mathcal{H}_\rho$ се строи като фактор-линейно простр.

$$\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A} / \mathcal{J}_\rho, \text{ където } \mathcal{J}_\rho = \{ A \in \mathcal{A} \mid \rho(A^* A) = 0 \}.$$

За целта: (1) $\mathcal{J}_\rho$ е линейно подпр-во; (2) $\mathcal{J}_\rho$ е ляв идеал: $\mathcal{A} \mathcal{J}_\rho \subseteq \mathcal{J}_\rho$

(3) Тогава е коректно определено $\pi_\rho : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ за $\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho$

за $A \in \mathcal{A}$: $\pi_\rho(A)(B + \mathcal{J}_\rho) := AB + \mathcal{J}_\rho$

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

Нека $\mathcal{A}$ - $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists$ $\pi_\rho : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{предст.}} Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ - цикличен такъв, че $\rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi(A) \Psi_\rho \rangle$ $(\forall A \in \mathcal{A})$.

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне, $\Psi \in \mathcal{H}$ - цикличен, така че за $\forall A \in \mathcal{A}$: $\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ то $\exists !$ унитарен $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ за който $\pi(A) = U_\rho \pi_\rho(A) U_\rho^{-1}$

Док.-схема $\mathcal{H}_\rho$ се строи като фактор-линейно простр.

$$\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A} / \mathcal{J}_\rho, \text{ където } \mathcal{J}_\rho = \{ A \in \mathcal{A} \mid \rho(A^* A) = 0 \}.$$

За целта: (1) $\mathcal{J}_\rho$ е линейно подпр-во; (2) $\mathcal{J}_\rho$ е ляв идеал: $\mathcal{A} \mathcal{J}_\rho \subseteq \mathcal{J}_\rho$

(3) Тогава е коректно определено $\pi_\rho : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ за $\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho$

за $A \in \mathcal{A}$: $\pi_\rho(A)(B + \mathcal{J}_\rho) := AB + \mathcal{J}_\rho$

(4) Полагаме $\Psi_\rho := \mathbb{1} + \mathcal{J}_\rho$.

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

Нека – $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists\ \pi_\rho : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{предст.}} Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ - цикличен такъв, че $\rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi(A) \Psi_\rho \rangle \quad (\forall A \in \mathcal{A})$.

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне, $\Psi \in \mathcal{H}$ - цикличен, така че за $\forall A \in \mathcal{A}$: $\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ то $\exists!$ унитарен $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ за който $\pi(A) = U_\rho \pi_\rho(A) U_\rho^{-1}$

Док.- схема $\mathcal{H}_\rho$ се строи като фактор-линейно простр.

$$\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho, \text{ където } \mathcal{J}_\rho = \{A \in \mathcal{A} \mid \rho(A^*A) = 0\}.$$

За целта: (1) $\mathcal{J}_\rho$ е линейно подпр-во; (2) $\mathcal{J}_\rho$ е ляв идеал: $\mathcal{A}\mathcal{J}_\rho \subseteq \mathcal{J}_\rho$

(3) Тогава е коректно определено $\pi_\rho : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ за $\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho$

за $A \in \mathcal{A}$: $\pi_\rho(A)(B + \mathcal{J}_\rho) := AB + \mathcal{J}_\rho$

(4) Полагаме $\Psi_\rho := \mathbb{1} + \mathcal{J}_\rho$. (5) Ск. пр-е $\langle A + \mathcal{J}_\rho | B + \mathcal{J}_\rho \rangle := \rho(A^*B)$.

Конструкция на Gelfand-Neimark-Segal (GNS)

Теорема на Гелфанд-Наймарк-Сигал

Нека — $*$-алгебра с $\mathbb{1}$, $\rho \in States(\mathcal{A})$. Тогава $\exists\ \pi_\rho : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{предст.}} Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ и $\Psi_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ - цикличен такъв, че $\rho(A) = \langle \Psi_\rho | \pi(A) \Psi_\rho \rangle \quad (\forall A \in \mathcal{A})$.

Освен това: $\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \Psi_\rho$ са единствени в следния смисъл:

Ако $\mathcal{H}$, $\pi : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H})$ - представяне, $\Psi \in \mathcal{H}$ - цикличен, така че за $\forall A \in \mathcal{A}$: $\rho(A) = \langle \Psi | \pi(A) \Psi \rangle$ то $\exists!$ унитарен $U_\rho : \mathcal{H}_\rho \cong \mathcal{H}$ за който $\pi(A) = U_\rho \pi_\rho(A) U_\rho^{-1}$

Док.-схема $\mathcal{H}_\rho$ се строи като фактор-линейно простр.

$$\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A} / \mathcal{J}_\rho, \text{ където } \mathcal{J}_\rho = \{ A \in \mathcal{A} \mid \rho(A^* A) = 0 \}.$$

За целта: (1) $\mathcal{J}_\rho$ е линейно подпр-во; (2) $\mathcal{J}_\rho$ е ляв идеал: $\mathcal{A} \mathcal{J}_\rho \subseteq \mathcal{J}_\rho$

(3) Тогава е коректно определено $\pi_\rho : \mathcal{A} \to Op^*(\mathcal{H}_\rho)$ за $\mathcal{H}_\rho := \mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho$

за $A \in \mathcal{A}$: $\pi_\rho(A)(B + \mathcal{J}_\rho) := AB + \mathcal{J}_\rho$

(4) Полагаме $\Psi_\rho := \mathbb{1} + \mathcal{J}_\rho$. (5) Ск. пр-е $\langle A + \mathcal{J}_\rho | B + \mathcal{J}_\rho \rangle := \rho(A^* B)$.

- това се нарича GNS конструкция. Следват проверки само. $\square$