Квантови трансформации

Квантови трансформации

множество на наблюдаемите	множество на състоянията
$\{A, B, \dots\}$	$\{\rho, \rho', \dots\}$

Квантови трансформации

множество на наблюдаемите	множество на състоянията
$\{A, B, \ldots\}$	$\{\rho, \rho', \ldots\}$

$$\rho(A)$$

= средна стойност на A в ρ

Квантови трансформации

Картина на Хайзенберг

множество на наблюдаемите
$\{A, B, \dots\}$

множество на състоянията
$\{\rho, \rho', \dots\}$

$$\rho(A)$$

= средна стойност на A в ρ

Квантови трансформации

множество на наблюдаемите
$\{A, B, \dots\}$

множество на състоянията
$\{\rho, \rho', \dots\}$

Картина на Хайзенберг

Картина на Шрьодингер

$\rho(A)$
= средна стойност на A в ρ

Квантови трансформации

множество на наблюдаемите $\{A, B, \ldots\}$ | множество на състоянията $\{\rho, \rho', \ldots\}$

Картина на Хайзенберг

Картина на Шрьодингер

$\rho(A)$ = средна стойност на A в ρ

Съгласуване на двете картини

Квантови трансформации

множество на наблюдаемите $\{A, B, \dots\}$ | множество на състоянията $\{\rho, \rho', \dots\}$

Картина на Хайзенберг

Картина на Шрьодингер

$\rho(A)$ = средна стойност на A в ρ

Съгласуване на двете картини

$\rho \mapsto \rho'$ - в картина на Шрьодингер,

Квантови трансформации

множество на наблюдаемите
$\{A, B, \dots\}$

множество на състоянията
$\{\rho, \rho', \dots\}$

Картина на Хайзенберг

Картина на Шрьодингер

$\rho(A)$ = средна стойност на A в ρ

Съгласуване на двете картини

$\rho \mapsto \rho'$ – в картина на Шрьодингер,

$A \mapsto A'$ – в картина на Хайзенберг.

Квантови трансформации

множество на наблюдаемите $\{A, B, \dots\}$ | множество на състоянията $\{\rho, \rho', \dots\}$

Картина на Хайзенберг

Картина на Шрьодингер

$\rho(A)$

= средна стойност на A в ρ

Съгласуване на двете картини

$\rho \mapsto \rho'$ – в картина на Шрьодингер,

$A \mapsto A'$ – в картина на Хайзенберг.

Тогава искаме при двете описания

$$\rho(A) \mapsto \rho'(A) = \rho(A').$$

Квантови трансформации

Теорема на Вигнер (Wigner's theorem)

Квантови трансформации

Теорема на Вигнер (Wigner's theorem)

Нека τ е взаимно-еднозначно и обратимо съответствие на множеството $\left\{ \{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \;\middle|\; \phi \in \mathcal{H},\ \|\phi\| = 1 \right\}$ от единични лъчи на едно Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ в себе си,

Квантови трансформации

Теорема на Вигнер (Wigner's theorem)

Нека τ е взаимно-еднозначно и обратимо съответствие на множеството $\left\{ \{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \;\middle|\; \phi\in\mathcal{H},\ \|\phi\|=1 \right\}$ от единични лъчи на едно Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ в себе си, такова че ако

$$\{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \overset{\tau}{\longmapsto} \{e^{i\alpha}\phi'\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad \text{и}$$

Квантови трансформации

Теорема на Вигнер (Wigner's theorem)

Нека τ е взаимно-еднозначно и обратимо съответствие на множеството $\left\{ \{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \mid \phi \in \mathcal{H}, \|\phi\| = 1 \right\}$ от единични лъчи на едно Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ в себе си, такова че ако

$$\{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \overset{\tau}{\longmapsto} \{e^{i\alpha}\phi'\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad \text{и}$$

$$\{e^{i\alpha}\psi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \overset{\tau}{\longmapsto} \{e^{i\alpha}\psi'\}_{\alpha\in\mathbb{R}} ,$$

Квантови трансформации

Теорема на Вигнер (Wigner's theorem)

Нека τ е взаимно-еднозначно и обратимо съответствие на множеството $\left\{ \{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \;\middle|\; \phi\in\mathcal{H},\ \|\phi\|=1 \right\}$ от единични лъчи на едно Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ в себе си, такова че ако

$$\{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \xmapsto{\tau} \{e^{i\alpha}\phi'\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad \text{и}$$

$$\{e^{i\alpha}\psi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \xmapsto{\tau} \{e^{i\alpha}\psi'\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \,,$$

то $|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2$ (за $\forall\,\phi,\psi\in\mathcal{H}$, $\|\phi\|=\|\psi\|=1$).

Квантови трансформации

Теорема на Вигнер (Wigner's theorem)

Нека τ е взаимно-еднозначно и обратимо съответствие на множеството $\{\{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \mid \phi\in\mathcal{H}, \|\phi\|=1\}$ от единични лъчи на едно Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ в себе си, такова че ако

$$\{e^{i\alpha}\phi\} \overset{\tau}{\longmapsto} \{e^{i\alpha}\phi'\} \quad \text{и} \quad \{e^{i\alpha}\psi\} \overset{\tau}{\longmapsto} \{e^{i\alpha}\psi'\}$$

то $|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2$.

Квантови трансформации

Теорема на Вигнер (Wigner's theorem)

Нека τ е взаимно-еднозначно и обратимо съответствие на множеството $\{\{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \mid \phi\in\mathcal{H}, \|\phi\|=1\}$ от единични лъчи на едно Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ в себе си, такова че ако

$$\{e^{i\alpha}\phi\} \overset{\tau}{\longmapsto} \{e^{i\alpha}\phi'\} \quad \text{и} \quad \{e^{i\alpha}\psi\} \overset{\tau}{\longmapsto} \{e^{i\alpha}\psi'\}$$

то $|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2$.

Тогава съществува изображение $T: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, което е.

Квантови трансформации

Теорема на Вигнер (Wigner's theorem)

Нека τ е взаимно-еднозначно и обратимо съответствие на множеството $\left\{ \{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \mid \phi \in \mathcal{H}, \|\phi\| = 1 \right\}$ от единични лъчи на едно Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ в себе си, такова че ако

$$\{e^{i\alpha}\phi\} \overset{\tau}{\longmapsto} \{e^{i\alpha}\phi'\} \quad \text{и} \quad \{e^{i\alpha}\psi\} \overset{\tau}{\longmapsto} \{e^{i\alpha}\psi'\}$$

то $|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2$.

Тогава съществува изображение $T: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, което е:

- взаимно-еднозначно и обратимо;

Квантови трансформации

Теорема на Вигнер (Wigner's theorem)

Нека τ е взаимно-еднозначно и обратимо съответствие на множеството $\left\{ \{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \mid \phi\in\mathcal{H},\ \|\phi\|=1 \right\}$ от единични лъчи на едно Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ в себе си, такова че ако

$$\{e^{i\alpha}\phi\} \xmapsto{\tau} \{e^{i\alpha}\phi'\} \quad \text{и} \quad \{e^{i\alpha}\psi\} \xmapsto{\tau} \{e^{i\alpha}\psi'\}$$

то $|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2$.

Тогава съществува изображение $T: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, което е:

- взаимно-еднозначно и обратимо;
- унитарно или антиунитарно (определенията следват по-долу);

Квантови трансформации

Теорема на Вигнер (Wigner's theorem)

Нека τ е взаимно-еднозначно и обратимо съответствие на множеството $\{\{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \mid \phi \in \mathcal{H}, \|\phi\| = 1\}$ от единични лъчи на едно Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ в себе си, такова че ако

$$\{e^{i\alpha}\phi\} \overset{\tau}{\longmapsto} \{e^{i\alpha}\phi'\} \quad \text{и} \quad \{e^{i\alpha}\psi\} \overset{\tau}{\longmapsto} \{e^{i\alpha}\psi'\}$$

то $|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2$.

Тогава съществува изображение $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, което е:

- взаимно-еднозначно и обратимо;
- унитарно или антиунитарно (определенията следват по-долу);
- T представя τ по формулата:

$$\{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \overset{\tau}{\longmapsto} \{e^{i\alpha}T\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad (\forall \phi \in \mathcal{H}, \|\phi\| = 1).$$

Квантови трансформации

$$\left(\rho'(A) \equiv \right) \langle \phi' | A \phi' \rangle = \langle \phi | A' \phi \rangle \left(\equiv \rho(A') \right)$$

$$\Rightarrow \quad \langle T\phi | A T \phi \rangle = \langle \phi | A' \phi \rangle$$

$$\shortparallel$$

$$\langle \cancel{T}\phi | \cancel{T} T^{-1} A \phi \rangle = \langle \phi | T^{-1} A T \phi \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle \phi | (\underbrace{A' - T^{-1} A T}_{:= C}) \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{H}.$$

Но $C = C^*$, понеже $(A')^* = A'$ (A' е отново наблюдаема)

и $(T^{-1} A T)^* = (T^* A T) = T^* A T^{**} = T^{-1} A T.$

Квантови трансформации

От друга страна е в сила следния факт (без доказателство):

<u>Твърдение</u>. Ако C е самоспрегнат оператор в (пред) Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ за който $\langle \phi | C \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$, то $C = 0$.

Получения резултат е, че в картината на Хайзенберг трансформацията на наблюдаемите се поражда отново от унитарни (или антиунитарни) трансформации $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ по формулата

$$A \longmapsto T^{-1} A T.$$

Горната трансформация е един много специален вид трансформация в алгебрата: тя изпраща произведение в произведение:

$$T^{-1}(AB)T = (T^{-1}AT)(T^{-1}BT).$$