T-експонента - определение

T-експонента - определение

За функция $A(t)$ на реален аргумент $t \in \mathbb{R}$ със стойности $n \times n$-матрици $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$

Т-експонента - определение

матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$

За функция $A(t)$ на реален аргумент $t \in \mathbb{R}$ със стойности $n \times n$-матрици $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$

Т-експонента - определение

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$

T-експонента - определение

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

T-експонента - определение

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}),\ t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

T-експонента - определение

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\left(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\right)$$

Внимание:

при $n = 0$ по определение членът на реда е $= 1$

Тази уговорка ще важи навсякъде за реда T-exp.

T-експонента - определение

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1) \cdots A(\tau_n)\big)$$

T-експонента - определение

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

T-експонента - определение

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T\big(A(t_1)\cdots A(t_n)\big) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$

T-експонента - определение

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T\big(A(t_1)\cdots A(t_n)\big) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за такава пермутация $(j_1, \dots, j_n)$ на $(1, \dots, n)$

за която $t_{j_1} \geq \dots \geq t_{j_n}$

T-експонента - определение

За матрично-значна функция $A(t) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T\big(A(t_1)\cdots A(t_n)\big) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за такава пермутация $(j_1,\dots,j_n)$ на $(1,\dots,n)$ за която $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \theta(t_{\sigma(1)} - t_{\sigma(2)}) \cdots \theta(t_{\sigma(n-1)} - t_{\sigma(n)})\, A(t_{\sigma(1)}) \cdots A(t_{\sigma(n)})$$

T-експонента - определение

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\left(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\right)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T\left(A(t_1)\cdots A(t_n)\right) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за такава пермутация $(j_1, \dots, j_n)$ на $(1, \dots, n)$ за която $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \theta(t_{\sigma(1)} - t_{\sigma(2)}) \cdots \theta(t_{\sigma(n-1)} - t_{\sigma(n)}) \, A(t_{\sigma(1)}) \cdots A(t_{\sigma(n)})$$

по ∀ пермутации σ на $(1, \dots, n)$ →

T-експонента - определение

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T\big(A(t_1)\cdots A(t_n)\big) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за такава пермутация $(j_1,\ldots,j_n)$ на $(1,\ldots,n)$ за която $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \underbrace{\theta(t_{\sigma(1)} - t_{\sigma(2)})} \cdots \theta(t_{\sigma(n-1)} - t_{\sigma(n)})\, A(t_{\sigma(1)}) \cdots A(t_{\sigma(n)})$$

по $\forall$ пермутации $\to$
σ на $(1,\ldots,n)$

$$\theta(t) := \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$ - функция на Хевисайт / Heaviside step function

T-експонента - определение

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за такава пермутация $(j_1,\dots,j_n)$ на $(1,\dots,n)$ за която $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\theta(t_{\sigma(1)} - t_{\sigma(2)})} \cdots \theta(t_{\sigma(n-1)} - t_{\sigma(n)})\, A(t_{\sigma(1)}) \cdots A(t_{\sigma(n)})$$

по $\forall$ пермутации → σ на $(1,\dots,n)$

$$\theta(t) := \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$ - функция на Хевисайт / Heaviside step function

$T(A(t_1)\cdots A(t_n))$ се нарича T-произведение / T-product / time-ordered product

T-експонента - определение

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за такава пермутация $(j_1,\dots,j_n)$ на $(1,\dots,n)$ за която $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\theta(t_{\sigma(1)} - t_{\sigma(2)})} \cdots \theta(t_{\sigma(n-1)} - t_{\sigma(n)})\, A(t_{\sigma(1)}) \cdots A(t_{\sigma(n)})$$

по ∀ пермутации → σ на $(1,\dots,n)$

$$\theta(t) := \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$ - функция на Хевисайт / Heaviside step function

$T(A(t_1)\cdots A(t_n))$ се нарича T-произведение / T-product / time-ordered product

- при съвпадение на някои t_j и t_k, $T(A(t_1)\cdots A(t_n))$ считаме за неопределено, подобно на функцията на Хевисайт, но тези случаи са с "мярка нула" при интегрирането

T-експонента - определение

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T(A(\tau_1) \cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1) \cdots A(t_n)) := A(t_{j_1}) \cdots A(t_{j_n})$ за такава пермутация $(j_1, \dots, j_n)$ на $(1, \dots, n)$ за която $t_{j_1} \geq \dots \geq t_{j_n}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\theta(t_{\sigma(1)} - t_{\sigma(2)}) \cdots \theta(t_{\sigma(n-1)} - t_{\sigma(n)})} A(t_{\sigma(1)}) \cdots A(t_{\sigma(n)})$$

Ако всички моменти $t_1, \dots, t_n$ са различни, то произведението от θ-функции е ненулево точно за една пермутация $\sigma = (j_1, \dots, j_n)$ - тази за която $t_{j_1} > \dots > t_{j_n}$.

$T(A(t_1) \cdots A(t_n))$ се нарича T-произведение / T-product / time-ordered product

- при съвпадение на някои t_j и t_k, $T(A(t_1) \cdots A(t_n))$ считаме за неопределено, подобно на функцията на Хевисайт, но тези случаи са с "мярка нула" при интегрирането

T-експонента - определение

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T\big(A(t_1)\cdots A(t_n)\big) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента – произход на означението

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\left(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\right)$$

където $T\left(A(t_1)\cdots A(t_n)\right) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента - произход на означението

Разглеждаме "T", като оператор,

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

където $T\big(A(t_1)\cdots A(t_n)\big) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента - произход на означението

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}),\ t \in \mathbb{R}$ определяме

Разглеждаме "T", като оператор, който действа върху произведения на оператори зависещи от времето

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

където $T\big(A(t_1)\cdots A(t_n)\big) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента – произход на означението

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

Разглеждаме "T", като оператор, който действа върху произведения на оператори зависещи от времето, като ги подрежда хронологически

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\left(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\right)$$

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента - произход на означението

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

Разглеждаме "T", като оператор, който действа върху произведения на оператори зависещи от времето, като ги подрежда хронологически

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\left(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\right)$$

където $T\left(A(t_1)\cdots A(t_n)\right) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента - произход на означението

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

"T", като линеен оператор,

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

където $T\big(A(t_1)\cdots A(t_n)\big) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента – произход на означението

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}),\ t \in \mathbb{R}$ определяме

"T", като линеен оператор, пред който стоят суми/интеграли

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

където $T\big(A(t_1)\cdots A(t_n)\big) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента – произход на означението

"T", като линеен оператор, пред който стоят суми/интеграли и произведения от числа

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T(A(\tau_1) \cdots A(\tau_n))$$

където $T(A(t_1) \cdots A(t_n)) := A(t_{j_1}) \cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента - произход на означението

За матрично-значна функция $A(t) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

"T", като линеен оператор, пред който стоят суми/интеграли и произведения от числа, може да премине през тях

където $T\big(A(t_1)\cdots A(t_n)\big) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

P002.10

T-експонента – произход на означението

За матрично-значна функция $A(t) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, A(\tau_1) \cdots A(\tau_n)\right)$$

"T", като линеен оператор, пред който стоят суми/интеграли и произведения от числа, може да премине през тях

където $T(A(t_1) \cdots A(t_n)) := A(t_{j_1}) \cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента - произход на означението

Прегрупираме интегралите.

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\right)$$

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента - произход на означението

Прегрупираме интегралите.

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 A(\tau_1) \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n A(\tau_n)\right)$$

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента – произход на означението

Прегрупираме интегралите.
Те се оказват равни по между си.

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 A(\tau_1) \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n A(\tau_n)\right)$$

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента – произход на означението

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

Прегрупираме интегралите.
Те се оказват равни по между си.

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\int_{t_1}^{t_2} d\tau\, A(\tau)\right)^n\right)$$

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента – произход на означението

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\, dt\right) := T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\int_{t_1}^{t_2} d\tau\, A(\tau)\right)^n\right)$$

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

Прегрупираме интегралите.
Те се оказват равни по между си.
Получаваме реда на експонентата.

T-експонента – произход на означението

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}),\ t \in \mathbb{R}$ определяме

Прегрупираме интегралите.
Те се оказват равни по между си.
Получаваме реда на експонентата.

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := T\left(\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} d\tau\, A(\tau)\right)^n\right)$$

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента - произход на означението

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := T\left(\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} d\tau\, A(\tau)\right)^n\right)$$

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента - условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\, dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T(A(\tau_1) \cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1) \cdots A(t_n)) := A(t_{j_1}) \cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента – условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T\big(A(t_1)\cdots A(t_n)\big) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

<u>Теорема.</u> Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$

T-експонента – условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T\big(A(t_1)\cdots A(t_n)\big) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

непрекъсната с изключение на краен брой точки

__Теорема.__ Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$

T-експонента – условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

непрекъсната с изключение на краен брой точки

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$ и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}\ (\ni A(t))$

T-експонента – условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T\big(A(t_1)\cdots A(t_n)\big) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

непрекъсната с изключение на краен брой точки

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$ и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}\ (\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

T-експонента – условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

непрекъсната с изключение на краен брой точки

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$ и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}$ $(\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

↳ това е нормирана алгебра

T-експонента - условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}),\ t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

непрекъсната с изключение на краен брой точки

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$ и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}\ (\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

↳ това е нормирана алгебра

$\mathcal{A}$ е банахово пространство

T-експонента – условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

непрекъсната с изключение на краен брой точки

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$ и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}$ $(\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

↳ това е нормирана алгебра

$\mathcal{A}$ е банахово пространство

Неравенство на Банах / Banach

T-експонента – условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$ и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}$ $(\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

непрекъсната с изключение на краен брой точки

↳ това е нормирана алгебра : $\exists\ \|\!|\cdot|\!\| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, така че

(1) $|\!|\!| aA |\!|\!| = |a|\,|\!|\!| A |\!|\!|$ $\forall a \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{A}$ (хомогенност)

(2) $|\!|\!| A |\!|\!| = 0 \iff A = 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$ (неизроденост)

(3) $|\!|\!| A + B |\!|\!| \leq |\!|\!| A |\!|\!| + |\!|\!| B |\!|\!|$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$ (неравенство на триъгълника)

$\mathcal{A}$ е банахово пространство

Неравенство на Банах / Banach

T-експонента – условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

непрекъсната с изключение на краен брой точки

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$ и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}$ $(\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

↳ това е нормирана алгебра: $\exists \, \|\!|\bullet|\!\| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, така че

(1) $\|\!|aA|\!\| = |a| \, \|\!|A|\!\| \quad \forall a \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{A}$ (хомогенност)

(2) $\|\!|A|\!\| = 0 \iff A = 0, \forall A \in \mathcal{A}$ (неизроденост)

(3) $\|\!|A + B|\!\| \leq \|\!|A|\!\| + \|\!|B|\!\|, \forall A, B \in \mathcal{A}$ (неравенство на триъгълника)

$\mathcal{A}$ е банахово пространство:

(пълнота) Ако $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ и $\|\!|A_k - A_l|\!\| \xrightarrow[k,l\to\infty]{} 0$, то $\exists A \in \mathcal{A}$

$\|\!|A_k - A|\!\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Неравенство на Банах / Banach

T-експонента - условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T(A(\tau_1) \cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1) \cdots A(t_n)) := A(t_{j_1}) \cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$ (непрекъсната с изключение на краен брой точки) и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A} (\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

↳ това е нормирана алгебра : $\exists \, \|\cdot\| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, така че

(1) $\|aA\| = |a| \, \|A\| \quad \forall a \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{A}$ (хомогенност)

(2) $\|A\| = 0 \iff A = 0, \forall A \in \mathcal{A}$ (неизроденост)

(3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A, B \in \mathcal{A}$ (неравенство на триъгълника)

$\mathcal{A}$ е банахово пространство: (пълнота) Ако $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ и $\|A_k - A_l\| \xrightarrow[k,l \to \infty]{} 0$, то $\exists A \in \mathcal{A}$
$\|A_k - A\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

Неравенство на Банах / Banach
$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$
$\forall A, B \in \mathcal{A}$

T-експонента – условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

непрекъсната с изключение на краен брой точки

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$ и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}\ (\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

↳ това е нормирана алгебра : $\exists \|\!|\cdot|\!\| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, така че

(1) $\|\!|aA|\!\| = |a|\,\|\!|A|\!\| \quad \forall a \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{A}$ (хомогенност)

(2) $\|\!|A|\!\| = 0 \iff A = 0, \ \forall A \in \mathcal{A}$ (неизроденост)

(3) $\|\!|A+B|\!\| \leq \|\!|A|\!\| + \|\!|B|\!\|, \ \forall A, B \in \mathcal{A}$ (неравенство на триъгълника)

$\mathcal{A}$ е банахово пространство:

(пълнота) Ако $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ и $\|\!|A_k - A_l|\!\| \xrightarrow[k,l\to\infty]{} 0$, то $\exists A \in \mathcal{A}$ $\|\!|A_k - A|\!\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Неравенство на Банах / Banach

$\|\!|AB|\!\| \leq \|\!|A|\!\|\,\|\!|B|\!\|$

$\forall A, B \in \mathcal{A}$

Примери на банахови алгебри

T-експонента – условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

непрекъсната с изключение на краен брой точки

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$ и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}\ (\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

↳ това е нормирана алгебра : $\exists\ \|\!|\bullet|\!\| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, така че

(1) $\|\!|aA|\!\| = |a|\,\|\!|A|\!\|\ \ \forall a \in \mathbb{C},\ A \in \mathcal{A}$ (хомогенност)

(2) $\|\!|A|\!\| = 0 \iff A = 0,\ \forall A \in \mathcal{A}$ (неизроденост)

(3) $\|\!|A + B|\!\| \leq \|\!|A|\!\| + \|\!|B|\!\|,\ \forall A, B \in \mathcal{A}$ (неравенство на триъгълника)

$\mathcal{A}$ е банахово пространство :

(пълнота) Ако $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ и $\|\!|A_k - A_\ell|\!\| \xrightarrow[k,\ell\to\infty]{} 0$, то $\exists A \in \mathcal{A}$

$\|\!|A_k - A|\!\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Неравенство на Банах / Banach

$\|\!|AB|\!\| \leq \|\!|A|\!\|\,\|\!|B|\!\|$

$\forall A, B \in \mathcal{A}$

Примери на банахови алгебри : за $\mathcal{A} := Mat_n(\mathbb{C})$: $\|\!|A|\!\| := \|A\| := \sup\{\|A\Psi\| \mid \Psi \in \mathbb{C}^n, \|\Psi\| = 1\}$ – операторната норма

(

T-експонента – условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

непрекъсната с изключение на краен брой точки

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$ и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}\,(\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

↳ това е нормирана алгебра: $\exists\, |||\bullet||| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, така че

(1) $|||aA||| = |a|\,|||A||| \quad \forall a \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{A}$ (хомогенност)

(2) $|||A||| = 0 \iff A = 0, \forall A \in \mathcal{A}$ (неизроденост)

(3) $|||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||, \forall A, B \in \mathcal{A}$ (неравенство на триъгълника)

$\mathcal{A}$ е баханово пространство:

(пълнота) Ако $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ и $|||A_k - A_\ell||| \xrightarrow[k,\ell\to\infty]{} 0$, то $\exists A \in \mathcal{A}$ $|||A_k - A||| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Неравенство на Банах / Banach

$|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$

$\forall A, B \in \mathcal{A}$

Примери на банахови алгебри: за $\mathcal{A} := Mat_n(\mathbb{C})$: $|||A||| := \|A\| := \sup\{\|A\Psi\| \mid \Psi \in \mathbb{C}^n, \|\Psi\| = 1\}$ – операторната норма

Обобщава се и за $\mathbb{C}^n \mapsto \mathcal{H}$ – всяко хилбертово пространство: $\mathcal{A} = Op^*(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{H})$ е банахова алгебра.

T-експонента – условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната (непрекъсната с изключение на краен брой точки) за $t \in (t_1, t_2)$ и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}\ (\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

↳ това е нормирана алгебра: $\exists \|\|\bullet\|\| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, така че

(1) $\|\|aA\|\| = |a|\,\|\|A\|\| \quad \forall a \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{A}$ (хомогенност)

(2) $\|\|A\|\| = 0 \iff A = 0, \forall A \in \mathcal{A}$ (неизроденост)

(3) $\|\|A + B\|\| \leq \|\|A\|\| + \|\|B\|\|, \forall A, B \in \mathcal{A}$ (неравенство на триъгълника)

$\mathcal{A}$ е банахово пространство: (пълнота) Ако $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ и $\|\|A_k - A_\ell\|\| \xrightarrow[k,\ell\to\infty]{} 0$, то $\exists A \in \mathcal{A}$ $\|\|A_k - A\|\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Неравенство на Банах / Banach

$\|\|AB\|\| \leq \|\|A\|\|\,\|\|B\|\| \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$

Примери на банахови алгебри: за $\mathcal{A} := Mat_n(\mathbb{C})$: $\|\|A\|\| := \|A\| := \sup\{\|A\Psi\| \mid \Psi \in \mathbb{C}^n, \|\Psi\| = 1\}$ – операторната норма

Обобщава се и за $\mathbb{C}^n \mapsto \mathcal{H}$ – всяко хилбертово пространство: $\mathcal{A} = Op^*(\mathcal{H}) \equiv \mathcal{B}(\mathcal{H})$ е банахова алгебра.

И отново за $Mat_n(\mathbb{C})$: $\|\|A\|\| := \|A\|_2 := \sqrt{tr(A^*A)}$ – "трейс-2" норма.

T-експонента - условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

непрекъсната с изключение на краен брой точки

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$ и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}$ $(\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

↳ това е нормирана алгебра : $\exists \, \|\!|\cdot|\!\| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, така че

(1) $\|\!|aA|\!\| = |a|\,\|\!|A|\!\| \quad \forall a \in \mathbb{C},\ A \in \mathcal{A}$ (хомогенност)

(2) $\|\!|A|\!\| = 0 \iff A = 0, \ \forall A \in \mathcal{A}$ (неизроденост)

(3) $\|\!|A+B|\!\| \leq \|\!|A|\!\| + \|\!|B|\!\|, \ \forall A, B \in \mathcal{A}$ (неравенство на триъгълника)

$\mathcal{A}$ е банахово пространство :

(пълнота) Ако $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ и $\|\!|A_k - A_l|\!\| \xrightarrow[k,l\to\infty]{} 0$, то $\exists A \in \mathcal{A}$

$\|\!|A_k - A|\!\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Неравенство на Банах / Banach

$\|\!|AB|\!\| \leq \|\!|A|\!\|\,\|\!|B|\!\|$

$\forall A, B \in \mathcal{A}$

Схема на доказателството

T-експонента - условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t)\in Mat_n(\mathbb{C}),\ t\in\mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{t_1}^{t_2}d\tau_1\cdots\int_{t_1}^{t_2}d\tau_n\; T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1}\geq\cdots\geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

непрекъсната с изключение на краен брой точки

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t\in(t_1,t_2)$ и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}\ (\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

↳ това е нормирана алгебра: $\exists\ |||\bullet|||:\mathcal{A}\to[0,\infty)$, така че

(1) $|||aA||| = |a|\,|||A|||\quad \forall a\in\mathbb{C},\ A\in\mathcal{A}$ (хомогенност)

(2) $|||A||| = 0 \iff A = 0,\ \forall A\in\mathcal{A}$ (неизроденост)

(3) $|||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||,\ \forall A,B\in\mathcal{A}$ (неравенство на триъгълника)

$\mathcal{A}$ е банахово пространство:

(пълнота) Ако $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ и

$|||A_k-A_l|||\xrightarrow[k,l\to\infty]{}0$, то $\exists A\in\mathcal{A}$

$|||A_k-A|||\xrightarrow[k\to\infty]{}0$

Неравенство на Банах/Banach

$|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$

$\forall A,B\in\mathcal{A}$

Схема на доказателството: Стъпка 1) За интегралите от вида $\int_{t_1}^{t_2}A(\tau)\,d\tau := \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}A(\tau_k)(\tau_{k+1}-\tau_k)$ - граници на риманови суми (както в анализа)

T-експонента – условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1)\cdots A(t_n)) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$ (непрекъсната с изключение на краен брой точки) и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}$ $(\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

↳ това е нормирана алгебра: $\exists\, \|\!|\bullet|\!\| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, така че

(1) $\|\!|aA|\!\| = |a|\,\|\!|A|\!\|$ $\forall a \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{A}$ (хомогенност)

(2) $\|\!|A|\!\| = 0 \iff A = 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$ (неизроденост)

(3) $\|\!|A+B|\!\| \leq \|\!|A|\!\| + \|\!|B|\!\|$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$ (неравенство на триъгълника)

$\mathcal{A}$ е банахово пространство:

(пълнота) Ако $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ и $\|\!|A_k - A_\ell|\!\| \xrightarrow[k,\ell\to\infty]{} 0$, то $\exists A \in \mathcal{A}$ $\|\!|A_k - A|\!\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Неравенство на Банах / Banach

$\|\!|AB|\!\| \leq \|\!|A|\!\|\,\|\!|B|\!\|$ $\forall A, B \in \mathcal{A}$

Схема на доказателството: Стъпка 1) За интегралите от вида $\int_{t_1}^{t_2} A(\tau)\,d\tau := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} A(\tau_k)(\tau_{k+1} - \tau_k)$ – граници на риманови суми (както в анализа)

Стъпка 2) От неравенството на Банах имаме $\|\!|T(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n))|\!\| \leq \|\!|A(\tau_1)|\!\| \cdots \|\!|A(\tau_n)|\!\|$

T-експонента – условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T(A(\tau_1) \cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T(A(t_1) \cdots A(t_n)) := A(t_{j_1}) \cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

непрекъсната с изключение на краен брой точки

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$ и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}$ $(\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

↳ това е нормирана алгебра: $\exists \|\cdot\| : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, така че

(1) $\|aA\| = |a|\,\|A\| \quad \forall a \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{A}$ (хомогенност)

(2) $\|A\| = 0 \iff A = 0, \forall A \in \mathcal{A}$ (неизроденост)

(3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A, B \in \mathcal{A}$ (неравенство на триъгълника)

$\mathcal{A}$ е банахово пространство:

(пълнота) Ако $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ и $\|A_k - A_\ell\| \xrightarrow[k,\ell\to\infty]{} 0$, то $\exists A \in \mathcal{A}$ $\|A_k - A\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Неравенство на Банах / Banach

$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ $\forall A, B \in \mathcal{A}$

Схема на доказателството: Окончателно, редът на T-exp се мажорира почленно от абсолютно сходящия числов ред на $\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} \|A(\tau)\|\,d\tau\right)$ и следователно е равномерно сходящ.

T-експонента – условия за сходимост на реда

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\left(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\right)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T\left(A(t_1)\cdots A(t_n)\right) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

непрекъсната с изключение на краен брой точки

Теорема. Ако $A(t)$ е ограничена и частично непрекъсната за $t \in (t_1, t_2)$ и приема стойности в банахова алгебра $\mathcal{A}$ $(\ni A(t))$, то редът на T-exp съществува и е равномерно сходящ.

В КТП обаче проблема е, че самата функция $A(t)$ (т.нар., хамилтониан на взаимодействието) не съществуват като поточкова функция на t, а само като разпределение (т.е., като обобщена функция). По тази причина техниката от горната теорема не помага.

T-експонента – представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

където $T\big(A(t_1)\cdots A(t_n)\big) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента – представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, \underbrace{T\left(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\right)}$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

симетрична функция на $\tau_1, \dots, \tau_n$

където $T\left(A(t_1)\cdots A(t_n)\right) := A(t_{j_1})\cdots A(t_{j_n})$ за $t_{j_1} \geq \cdots \geq t_{j_n}$ се нарича T-произведение

T-експонента – представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, \underbrace{T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)}_{\text{симетрична функция на } \tau_1,\ldots,\tau_n}$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

T-експонента – представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\, dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n}\ \underbrace{T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)}$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

можем да преномерираме интеграционните променливи $\Leftarrow$ симетрична функция на $\tau_1, \dots, \tau_n$

T-експонента – представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n}\, \underbrace{T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)}$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

можем да преномерираме интеграционните променливи $\Leftarrow$ симетрична функция на $\tau_1, \dots, \tau_n$

Но $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n$

T-експонента - представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n}\; \underbrace{T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)}$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

можем да преномерираме интеграционните променливи $\Leftarrow$ симетрична функция на $\tau_1, \dots, \tau_n$

Но $$\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n = \int \cdots \int_{(\tau_1, \dots, \tau_n) \in [t_1, t_2]} d\tau_1 \cdots d\tau_n$$

T-експонента - представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n}_{} \underbrace{T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)}_{}$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

можем да преномерираме интеграционните променливи $\Leftarrow$ симетрична функция на $\tau_1, \dots, \tau_n$

Но $\displaystyle \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n = \int \cdots \int_{(\tau_1,\dots,\tau_n) \in [t_1, t_2]} d\tau_1 \cdots d\tau_n = \sum_{\sigma \in S_n} \int \cdots \int_{\substack{(\tau_1,\dots,\tau_n) \in [t_1,t_2] \\ \tau_{\sigma(1)} \geq \cdots \geq \tau_{\sigma(n)}}} d\tau_1 \cdots d\tau_n$

T-експонента – представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n}_{} \underbrace{T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)}_{}$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

можем да преномерираме интеграционните променливи $\Leftarrow$ симетрична функция на $\tau_1, \dots, \tau_n$

Но $$\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n = \int\cdots\int_{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in[t_1,t_2]} d\tau_1 \cdots d\tau_n = \sum_{\sigma\in S_n} \underbrace{\int\cdots\int_{\substack{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in[t_1,t_2] \\ \tau_{\sigma(1)}\geq\cdots\geq\tau_{\sigma(n)}}} d\tau_1 \cdots d\tau_n}_{}$$

$\Rightarrow$ всички тези $n!$ на брой интеграли ще дават равен принос върху симетричната функция $T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$

T-експонента – представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1) \cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

Но
$$\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n = \int \cdots \int_{(\tau_1, \dots, \tau_n) \in [t_1, t_2]} d\tau_1 \cdots d\tau_n = \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\int \cdots \int_{\substack{(\tau_1, \dots, \tau_n) \in [t_1, t_2] \\ \tau_{\sigma(1)} \geq \cdots \geq \tau_{\sigma(n)}}} d\tau_1 \cdots d\tau_n}$$

$\Rightarrow$ всички тези $n!$ на брой интеграли ще дават равен принос върху симетричната функция $T\big(A(\tau_1) \cdots A(\tau_n)\big)$

T-експонента - представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, n! \underset{\substack{(\tau_1,\ldots,\tau_n)\in[t_1,t_2] \\ \tau_1 \geq \cdots \geq \tau_n}}{\int\cdots\int} d\tau_1 \cdots d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

Но
$$\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n = \underset{(\tau_1,\ldots,\tau_n)\in[t_1,t_2]}{\int\cdots\int} d\tau_1\cdots d\tau_n = \sum_{\sigma\in S_n} \underbrace{\underset{\substack{(\tau_1,\ldots,\tau_n)\in[t_1,t_2] \\ \tau_{\sigma(1)} \geq \cdots \geq \tau_{\sigma(n)}}}{\int\cdots\int} d\tau_1\cdots d\tau_n}$$

$\Rightarrow$ всички тези $n!$ на брой интеграли ще дават равен принос върху симетричната функция $T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$

T-експонента – представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t)\in Mat_n(\mathbb{C}), t\in\mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\cancel{n!}}\,\cancel{n!} \underset{\substack{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in[t_1,t_2] \\ \tau_1\geq\cdots\geq\tau_n}}{\int\cdots\int} d\tau_1\cdots d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

Но $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n = \underset{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in[t_1,t_2]}{\int\cdots\int} d\tau_1\cdots d\tau_n = \sum_{\sigma\in S_n} \underbrace{\underset{\substack{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in[t_1,t_2] \\ \tau_{\sigma(1)}\geq\cdots\geq\tau_{\sigma(n)}}}{\int\cdots\int} d\tau_1\cdots d\tau_n}$

$\Rightarrow$ всички тези $n!$ на брой интеграли ще дават равен принос върху симетричната функция $T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$

T-експонента – представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cancel{n!}} \cancel{n!} \underset{\substack{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in[t_1,t_2] \\ \tau_1 \geq \cdots \geq \tau_n}}{\int\cdots\int} d\tau_1 \cdots d\tau_n \, \underbrace{T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)}_{A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)}$$

$$\Uparrow$$

Но
$$\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n = \underset{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in[t_1,t_2]}{\int\cdots\int} d\tau_1 \cdots d\tau_n = \sum_{\sigma\in S_n} \underbrace{\underset{\substack{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in[t_1,t_2] \\ \tau_{\sigma(1)} \geq \cdots \geq \tau_{\sigma(n)}}}{\int\cdots\int} d\tau_1 \cdots d\tau_n}$$

$\Rightarrow$ всички тези $n!$ на брой интеграли ще дават равен принос върху симетричната функция $T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$

T-експонента – представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int\cdots\int_{t_2 \geqslant \tau_1 \geqslant \cdots \geqslant \tau_n \geqslant t_1} d\tau_1 \cdots d\tau_n \, A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)$$

Но $$\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n = \int\cdots\int_{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in[t_1,t_2]} d\tau_1\cdots d\tau_n = \sum_{\sigma\in S_n} \underbrace{\int\cdots\int_{\substack{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in[t_1,t_2] \\ \tau_{\sigma(1)} \geqslant \cdots \geqslant \tau_{\sigma(n)}}} d\tau_1\cdots d\tau_n}$$

$\Rightarrow$ всички тези $n!$ на брой интеграли ще дават равен принос върху симетричната функция $T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$

T-експонента – представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int\cdots\int_{t_2 \geq \tau_1 \geq \cdots \geq \tau_n \geq t_1} d\tau_1 \cdots d\tau_n \, A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)$$

T-експонента – представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_{t_2 \geq \tau_1 \geq \cdots \geq \tau_n \geq t_1} \cdots \int}_{\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n} d\tau_1 \cdots d\tau_n \, A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)$$

T-експонента - представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)$$

T-експонента – представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t)\in Mat_n(\mathbb{C})$, $t\in\mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1\cdots\int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1\int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2\cdots\int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n\; A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)$$

Но

$$\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1\cdots\int_{t_1}^{t_2} d\tau_n = \int\!\!\cdots\!\!\int_{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in[t_1,t_2]} d\tau_1\cdots d\tau_n = \sum_{\sigma\in S_n}\underbrace{\int\!\!\cdots\!\!\int_{\substack{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in[t_1,t_2]\\ \tau_{\sigma(1)}\geq\cdots\geq\tau_{\sigma(n)}}} d\tau_1\cdots d\tau_n}$$

$\Rightarrow$ всички тези $n!$ на брой интеграли ще дават равен принос върху симетричната функция $T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$

T-експонента - представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t)\in Mat_n(\mathbb{C}),\ t\in\mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1\cdots\int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1\int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2\cdots\int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n\ A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\cancel{n!}}\,\cancel{n!}\int\cdots\int_{\substack{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in[t_1,t_2]\\ \tau_n\geq\cdots\geq\tau_1}} d\tau_1\cdots d\tau_n\ \underbrace{T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)}_{A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)}$$

Но $$\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1\cdots\int_{t_1}^{t_2} d\tau_n = \int\cdots\int_{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in[t_1,t_2]} d\tau_1\cdots d\tau_n = \sum_{\sigma\in S_n}\int\cdots\int_{\substack{(\tau_1,\dots,\tau_n)\in[t_1,t_2]\\ \tau_{\sigma(1)}\geq\cdots\geq\tau_{\sigma(n)}}} d\tau_1\cdots d\tau_n$$

T-експонента – представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n \; A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

itterated integrals

Т-експонента - представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n \; A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

T-експонента - представяне с итерационни интеграли

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n))$$

наричан още ред на Дайсън / Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n\, A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n\, A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

itterated integrals

T-експонента – характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)$$

itterated
integrals

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n \; A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

T-експонента – характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2, t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1) \cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; A(\tau_1) \cdots A(\tau_n)$$

itterated integrals

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n \; A(\tau_n) \cdots A(\tau_1)$$

Т-експонента – характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2, t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1) \cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън

Dyson series

$2 > 1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; A(\tau_1) \cdots A(\tau_n)$$

itterated integrals

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n \; A(\tau_n) \cdots A(\tau_1)$$

T-експонента – характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2, t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\left(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\right)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)$$

itterated integrals

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n \; A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

T-експонента – характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2, t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\, dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1) \cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$\frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2, t_1) = ?$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; A(\tau_1) \cdots A(\tau_n)$$

itterated integrals

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n \; A(\tau_n) \cdots A(\tau_1)$$

T-експонента – характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2, t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$\frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2, t_1) = \frac{\partial}{\partial t_2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n \; A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

T-експонента - характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}),\ t \in \mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2, t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\, dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$\frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2, t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n\, A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n\, A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

T-експонента – характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t)\in Mat_n(\mathbb{C}),\ t\in\mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2,t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\; T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$\frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2,t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n\; A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n\; A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

Използваме "основната теорема на диференциалното и интегрално смятане"

$$\frac{\partial}{\partial t_2}\int_{t_1}^{t_2} F(\tau)\,d\tau = F(t_2)$$

T-експонента – характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2, t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\, dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$\frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2, t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \, A(\tau_1) \cdots A(\tau_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n \, A(\tau_n) \cdots A(\tau_1)$$

Използваме "основната теорема на диференциалното и интегрално смятане"

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\tau_1)\, d\tau_1 = F(t_2)$$

P005.08

T-експонента - характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t)\in Mat_n(\mathbb{C}), t\in\mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2,t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$\frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2,t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} A(t_2) \int_{t_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n\; A(\tau_2)\cdots A(\tau_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n\; A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

Използваме "основната теорема на диференциалното и интегрално смятане"

$$\frac{\partial}{\partial t_2}\int_{t_1}^{t_2} F(\tau)\,d\tau = F(t_2)$$

За матрично-значна функция $A(t)\in Mat_n(\mathbb{C}), t\in\mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2,t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n \, A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2,t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} A(t_2) \int_{t_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \, A(\tau_2)\cdots A(\tau_n)$$

припомняме, че при $n=0$ редът започва с константата 1 и $\frac{\partial}{\partial t_2} 1 = 0$

Използваме "основната теорема на диференциалното и интегрално смятане"

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\tau)\,d\tau = F(t_2)$$

T-експонента – характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t)\in Mat_n(\mathbb{C}),\ t\in\mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2,t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1\cdots\int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$\frac{\partial}{\partial t_2}U(t_2,t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} A(t_2)\int_{t_1}^{t_2} d\tau_2\cdots\int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n\, A(\tau_2)\cdots A(\tau_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1\int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2\cdots\int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n\, A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

T-експонента - характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t)\in Mat_n(\mathbb{C})$, $t\in\mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2,t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$\frac{\partial}{\partial t_2}U(t_2,t_1) = A(t_2)\sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n\, A(\tau_2)\cdots A(\tau_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n\, A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

T-експонента – характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t)\in Mat_n(\mathbb{C}),\ t\in\mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2,t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$\frac{\partial}{\partial t_2}U(t_2,t_1) = A(t_2)\sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n\, A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n\, A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

T-експонента – характеризираща диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2,t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$\frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2,t_1) = A(t_2) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \, A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)}_{U(t_2,t_1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n \, A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

T-експонента - характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t)\in Mat_n(\mathbb{C}),\ t\in\mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2,t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{t_1}^{t_2}d\tau_1\cdots\int_{t_1}^{t_2}d\tau_n\, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$\frac{\partial}{\partial t_2}U(t_2,t_1) = A(t_2)\,U(t_2,t_1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2}d\tau_1\int_{\tau_1}^{t_2}d\tau_2\cdots\int_{\tau_{n-1}}^{t_2}d\tau_n\, A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

T-експонента – характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2, t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$\frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2, t_1) = A(t_2)\, U(t_2, t_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} U(t_2, t_1) = \frac{\partial}{\partial t_1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n \, A(\tau_n)\cdots A(\tau_1)$$

T-експонента – характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2, t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n\, T\big(A(\tau_1)\cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$\frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2, t_1) = A(t_2)\, U(t_2, t_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} U(t_2, t_1) = \frac{\partial}{\partial t_1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_2} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_2} d\tau_n\, A(\tau_n) \cdots A(\tau_1)$$

Отново използваме "основната теорема на диференциалното и интегрално смятане"

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \int_{t_1}^{t_2} F(\tau)\,d\tau = -F(t_1)$$

T-експонента – характеризиращи диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2, t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\big(A(\tau_1) \cdots A(\tau_n)\big)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$\frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2, t_1) = A(t_2)\, U(t_2, t_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} U(t_2, t_1) = -U(t_2, t_1)\, A(t_2)$$

T-експонента – характеризираща диференциални уравнения

За матрично-значна функция $A(t) \in Mat_n(\mathbb{C}), t \in \mathbb{R}$ определяме

$$U(t_2, t_1) := T\text{-}\exp\left(\int_{t_1}^{t_2} A(t)\,dt\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \cdots \int_{t_1}^{t_2} d\tau_n \, T\left(A(\tau_1) \cdots A(\tau_n)\right)$$

ред на Дайсън
Dyson series

$$\frac{\partial}{\partial t_2} U(t_2, t_1) = A(t_2)\, U(t_2, t_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} U(t_2, t_1) = -U(t_2, t_1)\, A(t_2)$$