

КТП и ЕЧ, 21.01.2021

1. Групи на Лоренц и Пуанкаре

а) на Лоренц / Lorentz

$$O(\underbrace{D-1}_{\#+}, \underbrace{1}_{\#-}) \cong O(\underbrace{1}_{\#+}, \underbrace{D-1}_{\#-})$$



$$= \{ \Lambda = (\Lambda_{\mu}^{\nu})_{\mu, \nu=0, \dots, D-1} \mid \sum_{\mu, \nu} \Lambda_{\mu}^{\mu'} \Lambda_{\nu}^{\nu'} \eta_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu\nu} \}$$

$$(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$$

или $= \text{diag}(\underbrace{+1, -1, \dots, -1}_{D-1})$

↑ конвенция за сумиране по повтарящи се горен и долен индекс

$$O(D-1, 1) \cong \{ \Lambda \in O(D-1, 1) \mid \det \Lambda = 1 \}$$

специална група на Лоренц

$$O_{\uparrow}(D-1, 1) := \{ \Lambda \in O(D-1, 1) \mid \Lambda^0_0 > 0 \}$$

ортохронна група на Лоренц

$SO_0(D-1, 1)$ Собствена (свързана) група на Лоренц

$$\frac{SO(D-1, 1)}{SO_0(D-1, 1)} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{ 1, \mathcal{I}_p, \mathcal{I}_t, \mathcal{I}_p \mathcal{I}_t \}$$

пространствено отражение обръщане на времето пълна инверсия

<http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020/Streater R.F., Wightman A.S., PCT, Spin And Statistics, And All That %5b2000%5d.pdf>

- стр. 7 - 21

При унитарните представления в КТП

$\mathcal{I}_p, \mathcal{I}_t$ са по правило "антиунитарни"

По теоремата на Вигнер за "квантовите симетрии"

https://en.wikipedia.org/wiki/Wigner%27s_theorem

$$U: SO_0(D-1, 1) \rightarrow U(\mathcal{H}) \text{ - унитарната група на хилб. пр-во на състояния}$$

$$\Lambda \mapsto U(\Lambda)$$

така, че $U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) = \xi_{\Lambda_1, \Lambda_2} U(\Lambda_1 \Lambda_2)$

където $\xi_{\Lambda_1, \Lambda_2} = \pm 1$.

Следствие: Може да се постигне $\xi_{\Lambda_1, \Lambda_2} = 1$, ако се

преминае към

$$\begin{array}{ccc} Spin(D-1, 1) & & \\ \downarrow & \text{red arrows} & \searrow \\ SO_0(D-1, 1) & & U(\mathcal{H}) \end{array}$$

"спинорна група на Лоренц"

$$Spin(D-1, 1) \cong SL(2, \mathbb{C}) \quad \text{за } D=4$$

Крайномерните неприводими представления на спинорната група на Лоренц ($SL(2, \mathbb{C})$) се класифицират от две неотриц. полуцели числа $j_1, j_2 \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$

https://en.wikipedia.org/wiki/Representation_theory_of_the_Lorentz_group

Важни специални случаи:

- $(0, 0)$ - скалярно представление
- $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ - спинорно представление
- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ - векторното представление в $\mathbb{R}^{3,1}$
- $(1, 0) \oplus (0, 1)$ - електромагнитно поле $F_{\mu\nu}$

б) Група на Пуанкаре / Poincaré (нехомогенна група на Лоренц; група на псевдо-евклидовите движения)

Обща схема на т.нар. "полу-пряко произведение"

https://en.wikipedia.org/wiki/Semidirect_product

$$P = SO(D-1, 1) \ltimes \mathbb{R}^{D-1, 1}$$

$$(\overset{\vee}{\Lambda}, \overset{\vee}{a}) : x \mapsto \Lambda x + a$$

$$(\Lambda_1, a_1) \left((\Lambda_2, a_2)(x) \right) = (\Lambda_1, a_1) (\Lambda_2 x + a_2)$$

$$(\Lambda_1 \Lambda_2, a_1 + \Lambda_2 a_1)(x) = \Lambda_1 (\Lambda_2 x + a_2) + a_1$$

$$\Rightarrow (\Lambda_1, a_1) (\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_1 \Lambda_2, a_1 + \Lambda_1 a_2)$$

Обобщава се за $Spin(D-1, 1) \ltimes \mathbb{R}^{D-1, 1}$ – спинорна група на Пуанкаре

$$(\tilde{\Lambda}_1, a_1) (\tilde{\Lambda}_2, a_2) = (\tilde{\Lambda}_1 \tilde{\Lambda}_2, a_1 + \tilde{\Lambda}_1(a_2))$$

където за $\tilde{\Lambda} \in Spin(D-1, 1)$ и $a \in \mathbb{R}^{D-1, 1}$

$\tilde{\Lambda}(a) \in \mathbb{R}^{D-1, 1}$ е действието на $Spin(D-1, 1)$ върху $\mathbb{R}^{D-1, 1}$, посредством проекцията $Spin(D-1, 1) \twoheadrightarrow SO_0(D-1, 1)$.

Кинематичният модел на една свободна релативистка частица е неприводимо унитарно представяне на (спинорната) група на Пуанкаре.

2. Класификация на неприводимите унитарни представления на (спинорната) група на Пюанкаре с положителна енергия
 = кинематична класификация на свободни гасици.

а) За унитарните представления на непрекъснати групи

Barut A.O., Raczka R., Theory of Group Representations and Applications

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020/Barut_A.O.,Raczka_R.,Theory_of_Group_Representations_and_Applications.pdf

точка 5.1 (+) - общи изисквания за непрекъснатост във безкрайно-мерния случай,

точка 11.1 (+) - следствие за представяния на генераторите

Elliott J.P., Dawber P.G., Symmetry in Physics (Volums 1,2)

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020/Elliott_J.P.,Dawber_P.G.,Symmetry_in_Physics_Volume_1-Principles_and_Simple_Applications.pdf

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020/Elliott_J.P.,Dawber_P.G.,Symmetry_in_Physics-Further_Applications.pdf

Основно общо изискване за непрекъснатост на унитарни представления

$$G \longrightarrow U(\mathcal{H})$$

$$g \longmapsto U(g)$$

- слабата непрекъснатост: $\forall \Phi, \Psi \in \mathcal{H} : g \mapsto \langle \Phi | U(g) \Psi \rangle$
 са непрекъснати по $g \in G$

$\Rightarrow \exists$ генератори X - като ермитови оператори в
 обща, инвариантна деф. област $\subseteq \mathcal{H}$

Там се са съществено самоспрегнати и комутиращите
 имат съвместен спектър. (Теория на Гординг)

https://en.wikipedia.org/wiki/G%C3%A5rding_domain (както и цитата по-горе)

→ Математическата основа за представяне на
 непрекъснати групи.

δ) Неприводимост:

$$\nexists \mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H} \quad \text{с.е.} \quad U(g)(\mathcal{H}_1) \subseteq \mathcal{H}_1, \\ \text{ненулево} \quad \forall g \in G \\ \text{затворено} \\ \text{подпр.}$$

Ако $\exists$ таква $\mathcal{H}_1$, то $U(g)|_{\mathcal{H}_1}$ е само по себе си представление - нарича се подпредставление

Теорема Ако $\mathcal{H}_1$ е подпредставление, то и $\mathcal{H}_1^\perp$ е подпредст.
и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$ - пряка сума на представления.
(Това е само за унитарни представления !!!)

В общия случай, такива представления се наричат разложими.

Разложими $\Rightarrow$ приводими

Неприводими $\Rightarrow$ неразложими

За унитарни представления са $\Leftrightarrow$, но за по-общи - не.

в) Неприводимите представления на гр. на Пуанкаре
- унитарни с полож. ел-е

$$U(\tilde{L}_1, a_1) U(\tilde{L}_2, a_2) = U(\tilde{L}_1 \tilde{L}_2, a_1 + \tilde{L}_1 a_2)$$

В ясност: $U(1, a_1) U(1, a_2) = U(1, a_1 + a_2)$

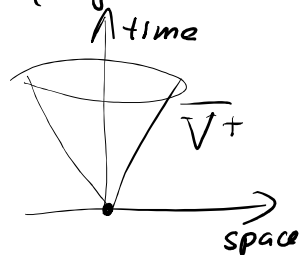
За краткост: $U(a) := U(1, a)$

От обща теория $\Rightarrow U(a) = e^{i a^\mu \hat{P}_\mu}$

и $\hat{P}_\mu$ - взаимно комутирани ермитови (свеществ. самоспр.) оператори със съвместен спектър

$$\text{Spec}(\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_3) \subseteq \overline{V}_+$$

$$= \{p \mid p^2 \leq 0, p_0 \geq 0\}$$



→ това е условието за положителност на енергията

Има единствено неприводимо тривиално представление:

$$U(\tilde{L}, a) \Psi = \Psi \quad \forall \Psi \in \mathcal{H} : \mathcal{H} = \mathbb{C} \Psi - \text{вакуумно пр.}$$

Теорема на Вигнер за класификацията

https://en.wikipedia.org/wiki/Wigner%27s_classification

Невакуумните неприводими унитарни представления на спинорната група на Пуанкаре с положителна енергия се определят с точност до еквивалентност от две реални числа: маса $m \in [0, \infty)$ и спин s .

В случая, когато $m > 0$, $s \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$ (полуцело, неотриц.)

При $m = 0$ има два подслучая за s : а) полуцел, неотриц.

в този случай се нарича "helicity" б) непрекъснат

3. Доказателство и конструкция на класификацията на Вигнер

а) Структура на собствените подпространства

Нека за $p = (p) \in \overline{V}^+$:

$$\mathcal{H}_p = \{ \Psi \in \mathcal{H} \mid \hat{P}_p \Psi = p_p \Psi \}$$

↑ пространството включващо и т.нар. "несобствени вектори"

Следствие 1 Ако $p \neq p'$ то $\mathcal{H}_p \perp \mathcal{H}_{p'}$

- понеже са собствени подпространства на ермитови оператори за различни собствени стойности. $\square$

По-общо, за $S' \subseteq \overline{V}^+$ - измеримо подмножество

нека $\Pi(S')$ е спектралния проектор на $(\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_{D-1})$

и нека $\mathcal{H}_{S'} = \Pi(S') \mathcal{H}$

Тогава $\mathcal{H}_{S'} = \int_{p \in S'}^{\oplus} d\mu(p) \mathcal{H}_p$ - пряк интеграл (интегрална прека сума).

https://en.wikipedia.org/wiki/Direct_integral

и ако $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, то $\mathcal{H}_{S_1} \perp \mathcal{H}_{S_2}$

$$\mathcal{H}_{S_1 \cup S_2} = \mathcal{H}_{S_1} \oplus \mathcal{H}_{S_2}$$

- понеже са разнени от взаимно ортогонални $\mathcal{H}_p$.

Лема 2. За $\forall \tilde{\Lambda} \in Spin(D-1, 1)$: $U(\tilde{\Lambda}, 0) \mathcal{H}_p \subseteq \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}p}$

Доказательство. Нека $\Psi' := U(\tilde{\Lambda}, 0) \Psi$ - защо $\Psi' \in \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}p}$?

- $\Psi \in \mathcal{H}_p \Leftrightarrow \hat{p}_\mu \Psi = p_\mu \Psi \Leftrightarrow f(\hat{p}_\mu) \Psi = f(p) \Psi \quad \forall f$
 $\Leftrightarrow U(1, a) \Psi \left(\equiv e^{ia^\mu \hat{p}_\mu} \Psi \right) = e^{ia \cdot p} \Psi \quad \forall a \in \mathbb{R}^{D-1,1}$
- $U(1, a) \Psi' = e^{ia \cdot p'} \Psi'$ за $p' := \tilde{\Lambda} p$ и $\forall a$? - остава за док.

- наистина :

$$\Rightarrow U(1, a) \Psi' = \underbrace{U(1, a) U(\tilde{\Lambda}, 0)}_{U(1, \tilde{\Lambda} a)} \Psi$$

$$= U(\tilde{\Lambda}, 0) U(1, a'), \text{ където } a' := \tilde{\Lambda}^{-1} a$$

$$\Rightarrow U(1, a) \Psi' = U(\tilde{\Lambda}, 0) \underbrace{U(1, a') \Psi}_{e^{ia' \cdot p} \Psi}$$

$$\Rightarrow U(1, a) \Psi' = e^{ia' \cdot p} \underbrace{U(\tilde{\Lambda}, 0) \Psi}_{\Psi'}$$

$$\Rightarrow U(1, a) \Psi' = e^{ia' \cdot p} \Psi'$$

$$\text{Но } a' \cdot p = (\tilde{\Lambda}^{-1} a) \cdot p = a \cdot (\tilde{\Lambda} p) = a \cdot p'$$

- понеже $\tilde{\Lambda}$ действа псевдо-ортогонално: $(\tilde{\Lambda} a) \cdot (\tilde{\Lambda} b) = a \cdot b$

$$\Rightarrow U(1, a) \Psi' = e^{ia \cdot p'} \Psi' \quad \forall a$$

- $\Rightarrow \hat{p}_\mu \Psi' = p'_\mu \Psi'$ за $p' = \tilde{\Lambda} p$, т.е. $\Psi' \in \mathcal{H}_{p'}$. $\square$

Следствие. 3 $U(\tilde{\Lambda}, 0) \mathcal{H}_S \subseteq \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}S}$

б) "Малката група на Лоренц" / "little group"

Това е: $\text{Spin}_0(D-1, 1)_p := \{ \tilde{\Lambda} \in \text{Spin}(D-1, 1) \mid \tilde{\Lambda} a = a \}$
↳ стабилизатор / stabilizer на p

Лема 4 (а) За $\tilde{\Lambda} \in \text{Spin}_0(D-1, 1)_p$: $U(\tilde{\Lambda}, 0) \mathcal{H}_p \subseteq \mathcal{H}_p$
- т.е. $\mathcal{H}_p$ е (унитарно) представление на малката група

(б) За да бъде $\mathcal{H}$ неприводимо представление на групата на Пойнкаре е необходимо $\mathcal{H}_p$ да е неприводимо представление на малката група.

Доказателство. (а) От Лема 3: $U(\tilde{\Lambda}, 0) \mathcal{H}_p \subseteq \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda} p}$, но $\tilde{\Lambda} p = p$.

б) Нека $0 \neq \mathcal{H}'_p \subsetneq \mathcal{H}_p$ е подпредставление за малката гр. на .

Тогави $\mathcal{H}' := \overline{\text{span}} \{ U(\tilde{\Lambda}, a) \mathcal{H}'_p \mid \forall (\tilde{\Lambda}, a) \in \text{гр. на Пойнкаре} \}$
↳ порождено с линейни комбинации и затваряне
ще е подпредставление на $\mathcal{H}$ за групата на Пойнкаре.

Но $0 \neq \mathcal{H}' \subsetneq \mathcal{H}$ — очевидно; понеже:

$$U(\tilde{\Lambda}, a) \mathcal{H}'_p = U(\tilde{\Lambda}, 0) \underbrace{U(1, a') \mathcal{H}'_p}_{e^{ia' \cdot p} \mathcal{H}'_p \subseteq \mathcal{H}'_p} \subseteq U(\tilde{\Lambda}, 0) \mathcal{H}'_p \subseteq \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda} p}$$

$a' = \tilde{\Lambda}^{-1} a$

$\Rightarrow$ единствения начин да достигнем вектори от $\mathcal{H}_p \setminus \mathcal{H}'_p$ е чрез $\Lambda \in$ малката група (т.е., $\tilde{\Lambda} p = p$). Но $\mathcal{H}'_p$ е подпредставление за малката група — тя ще го изкарва извън себе си.

$\Rightarrow \mathcal{H}'_p = \mathcal{H}_p$. $\square$

Извод. $\mathcal{H}_p$ е неприводимо унитарно предст. за малката група

в) Носителя на представенето в $\overline{V^+}$

$$\text{supp}_0 \mathcal{H} := \{ p \in \overline{V^+} \mid \mathcal{H}_p \neq 0 \} \text{ ~~closure~~}$$

Лема. 5 (a) $\text{Spin}(D-1, D)(\text{supp}_0 \mathcal{H}) \subseteq \text{supp}_0 \mathcal{H}$
т.е.е., $\text{supp}_0 \mathcal{H}$ е (затворено) подмножество на $\overline{V^+}$, което е лоренц-инвариантно.

(b) Ако $S \subseteq \overline{V^+}$ е лоренц-инвариантно ($\text{Spin}(D-1, 1)(S) \subseteq S$),
то $\mathcal{H}_S$ е подпредставяне на групата на Пуанкаре.

Доказателство. (a) Преди всичко, $\overline{V^+}$ е самото то лоренц-инвариантно.

Ако $\mathcal{H}_p \neq 0$, то и $\mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}p} \neq 0$, понеже $\mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}p} \supseteq U(\tilde{\Lambda}, 0)\mathcal{H}_p \neq 0$.

$\Rightarrow \{ p \in \overline{V^+} \mid \mathcal{H}_p \neq 0 \}$ е лоренц-инвариантно.

(b) От формулите: $\mathcal{H}_S = \int_{p \in S}^{\oplus} d\mu(p) \mathcal{H}_p$, $U(\tilde{\Lambda}, a)\mathcal{H}_p \subseteq \mathcal{H}_{\tilde{\Lambda}p}$

следва, че $U(\tilde{\Lambda}, p)\mathcal{H}_S \subseteq \mathcal{H}_S$, ако $\tilde{\Lambda}(S) \subseteq S$. $\square$

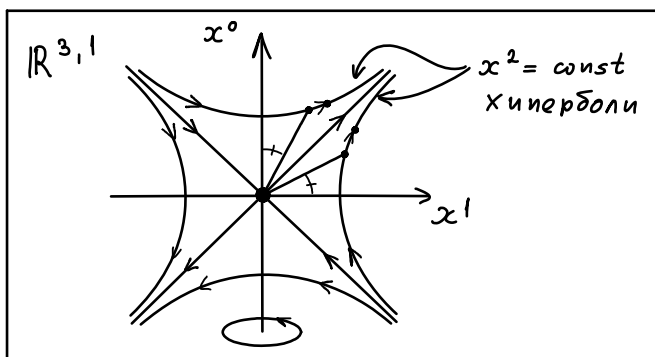
Следствие 6 $\text{supp}_0 \mathcal{H}$ е една орбита при действието на групата на Лоренц в $\mathbb{R}^{D-1, 1}$.

Напомниме понятието "орбита" при действие на група G върху множество M :

- орбита на $p \in M$ е $Gp := \{ p' \in M \mid \exists g \in G : p' = gp \}$

т.е.е., орбита е всяко минимално по отношение на включването подмножество на M , което е инвариантно по действието на G .

г) Геометрични факти



(1) Някои понятия: $\Gamma_a := \{x \in \mathbb{R}^{3,1} \mid x^2 = a^2\}$

• при $a = 0$ - светлинен конус  Γ_0

• при $a > 0$ - свързан хиперболоид  Γ_a ← De Sitter space

• при $a < 0$ - два свързани хиперboloида  Γ_a^+ ← масов хиперболоид

$$\Gamma_a = \Gamma_a^+ \dot{\cup} \Gamma_a^-$$

$$\Gamma_a^\pm := \{p \in \Gamma_a \mid \pm p_0 \geq 0\}$$

(2) Орбитите на групата на Лоренц при действието ѝ в $\mathbb{R}^{3,1}$ са следните:

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • $\{0\}$ • $\Gamma_{-m^2}^+$, за $m \geq 0$ • $\Gamma_{-m^2}^-$, за $m \geq 0$ • Γ_{m^2}, за $m > 0$ | $\left. \begin{array}{l} \text{От тях:} \\ \text{първите две лежат в } \overline{V^+} \\ \text{последните две не пресичат } \overline{V^+} \end{array} \right\}$ |
|---|--|

Случаят на орбитата $\{0\}$ отговаря на вакуумното представяне.

g) Теорема (Първа формулировка на класификацията на Вигнер.)

Невакуумните неприводими унитарни представления $\mathcal{H}$ на спинорната група на Пуанкаре се фиксират с точност до еквивалентност от едно реално число $m \in [0, \infty)$ и едно неприводимо унитарно представление $\mathcal{H}_p$ на малката група на Лоренц $\text{Spin}(D-1, 1)_p$ за някое $p \in \Gamma_{-m}^+$

Доказателство. $\Rightarrow$ (Определянето на m и $\mathcal{H}_p$).

- това следва от следствие 6 и извода от точка "б").

$\Leftarrow$ (Еднозначно конструиране на $\mathcal{H}$ по m и $\mathcal{H}_p$.)

- Общо сведение за действие на група G върху множество M .

Ако $p, p' \in M$ са в една орбита на G , т.е., $p' = g p$, то $G_{p'} = g G_p g^{-1}$ - т.е., стабилизаторите са сопряжени (в частност, изоморфни).

$$\begin{aligned} \text{Наистина: } h' \in G_{p'} &\Leftrightarrow h' p' = p' \Leftrightarrow h' g p = g p \\ &\Leftrightarrow g^{-1} h' g p = p \Leftrightarrow g^{-1} h' g \in G_p \end{aligned}$$

Затова $h \in G_p \Leftrightarrow h' \in G_{p'}$ за $h' = g h g^{-1}$, $h = g^{-1} h' g$

- Нека приложим резултата от предния пункт за групата на Лоренц, $G = \text{Spin}(D-1, 1)$ и $M = \Gamma_{-m}^+$. В този случай, M е една орбита (т.е. за $\forall p, p' \in \Gamma_{-m}^+$, $\exists \tilde{\Lambda} \in \text{Spin}(D-1, 1)$ т.е.: $p' = \tilde{\Lambda} p$; казва се още че Γ_{-m}^+ е хомогенно пространство за $\text{Spin}(D-1, 1)$). Нека още:

- фиксираме точка $p^{(0)} \in \Gamma_{-m}^+$; (такава зависимост искаме)

- за $\forall p \in \Gamma_{-m}^+$ да изберем $\tilde{\Lambda}_p : p^{(0)} \mapsto p = \tilde{\Lambda}(p) p^{(0)}$;

- полагаме: $F := \mathcal{H}_{p^{(0)}}$ - хилбертово пространство;

- за $\forall p \in \Gamma_{-m}^+$: $\hat{V}(p) := U(\tilde{\Lambda}_p, 0) \big|_{\mathcal{H}_{p^{(0)}}} : F \cong \mathcal{H}_p$ - унитарен.

Тогава:

$$\mathcal{H} = \int_{\Gamma_{-m^2}^+}^{\oplus} d\mu(p) \mathcal{H}_p \xrightarrow{\sim} \int_{\Gamma_{-m^2}^+}^{\oplus} d\mu(p) \hat{V}(p) \underbrace{\mathbb{C} \otimes F}_{F}$$

$$\cong \underbrace{\left(\int_{\Gamma_{-m^2}^+}^{\oplus} d\mu(p) \mathbb{C} \right)}_{L^2(\Gamma_{-m^2}^+; d\mu)} \otimes F \cong L^2(\Gamma_{-m^2}^+ \rightarrow F; d\mu)$$

където $L^2(\Gamma_{-m^2}^+ \rightarrow F; d\mu)$

$$:= \left\{ \psi: \Gamma_{-m^2}^+ \rightarrow F \mid \|\psi\| := \int_{\Gamma_{-m^2}^+} d\mu(p) \langle \psi(p) | \psi(p) \rangle_F \right\}$$

$$p \mapsto \psi(p)$$

задава модел на $\mathcal{H}$ определен от m и F .

Лема 7 $U(\tilde{\Lambda}, a) \psi =: \psi'$ се определя по:

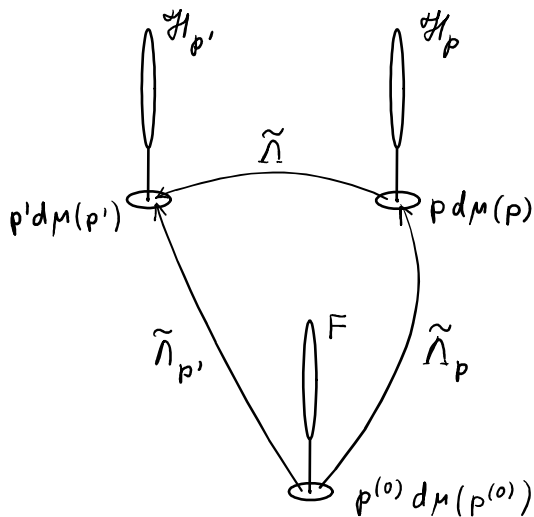
$$\psi'(p') = e^{ia \cdot p'} \rho_{p'}(\tilde{\Lambda}_{p'}^{-1}) \rho_p(\tilde{\Lambda}) \rho_{p^{(0)}}(\tilde{\Lambda}_p) \pi_p(\tilde{\Lambda})(\psi(p))$$

където $p' = \tilde{\Lambda} p$,

$$\pi_p(\tilde{\Lambda}) := \underbrace{U(\tilde{\Lambda}_p^{-1}, \tilde{\Lambda}, \tilde{\Lambda}_p)}_{\cap} : F \rightarrow F \text{ унитарно}$$

$$Spin_o(D-1, 1)_{p^{(0)}}$$

$$\rho_p(\Lambda) = \frac{d\mu(\tilde{\Lambda} p)}{d\mu(p)}, \quad \text{за } \forall p, \forall \tilde{\Lambda}.$$



https://encyclopediaofmath.org/wiki/Induced_representation

https://en.wikipedia.org/wiki/Induced_representation

<https://mathworld.wolfram.com/InducedRepresentation.html>

http://sporadic.stanford.edu/bump/group/gind4_2.html

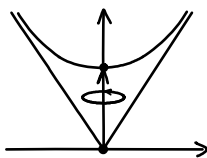
<https://ncatlab.org/nlab/show/induced+representation>

е) Коя е малката група на Лоренц?

- $p^2 = -m^2 < 0$

За $p^{(0)} = (1, 0, \dots, 0)$:

$$\text{Spin}(D-1, 1)_{p^{(0)}} = \text{Spin}(D-1)$$



(спинорната)
група на въртене
в системата на
покой.

При $D-1 = 3$ - крайномерните неприводими предст.
на $\text{Spin}(3) = \text{SU}(2)$ са

$(s) := \mathbb{R}^{2s+1}$ - представения с $\hat{J}_3 \in \{-s, \dots, +s\}$

за $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ - спин

- за $p^2 = -m^2 = 0$, $p^{(0)} = (1, 1, 0, \dots, 0)$

- нарушава се и ротач. симетрия (както при аксиалната калибровка)

$\text{Spin}(D-1, 1)_p \cong$ Група на евклидови движения на $\mathbb{R}^{D-2}$

обобщава се при квадрата на Клайн-Дирак / Klein-Dirac
нарисана още конформна компактификация.

<https://ncatlab.org/nlab/show/conformal+compactification>

Цитира Sect. 4.2: <https://arxiv.org/pdf/math-ph/0412039.pdf>

Базира се на Част 1 в:

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020/Nikolov_N.M.,_Dissertation_2002.pdf

3. Връзка полета - частици

а) Аксиомите на Уайтман - резюме

I. Данин: (1) Хилбертово пространство $\mathcal{H}$,
нещо линейно подпростр. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$, $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{H}$

Забележка: Пространството на тест-функции е друго и ще го означаваме с друг "шрифт": $\mathcal{D}$, но за по-сигурно ще пишем вместо $f \in \mathcal{D} \Leftrightarrow f$ - т.ф. (тест-функция)
вместо $\psi \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow \psi$ - о.ф. (обобщена функция)

(2) Унитарно представяне на собствената (свързаната) спринорна група на Пуанкаре

$$U(\tilde{\Lambda}, a) : \underset{\text{унит.}}{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H} \quad \forall \Lambda \in \text{Spin}(D-1, 1), a \in \mathbb{R}^{D-1, 1}$$

Забележка: още едно различно "D" $\nearrow$ размерността на пр.-вр.

(3) $\forall f$ - т.ф. са определени оператори $\phi_A[f] : \mathcal{D}_{\text{лин.}} \rightarrow \mathcal{D}$
 $A \in \{1, \dots, N\}$, N - крайно или безкрайно

(4) Зададени са и "гетности" $p_A \in \{0, 1\}$
 $\nearrow$ ϕ_A е ферми
 $\nwarrow$ ϕ_A е бозонно
и "взаимни гетности": $p_{A,B} \in \{0, 1\}$

При "нормална статистика": $p_{A,B} = p_A p_B \pmod{2}$

(5) Зададено е реално линейно представяне

$$\pi : \text{Spin}(D-1, 1) \rightarrow \text{Mat}_N(\mathbb{R})$$

$$\tilde{\Lambda} \mapsto \left(\pi(\tilde{\Lambda})_A^B \right)_{N \times N}$$

(6) Зададен е единичен вектор $\Omega \equiv |0\rangle \equiv |\Omega\rangle \in \mathcal{D}$ - "вакуум"

II. Аксиоми (условия за данните)

(1) За Поанкаре - симетрията

- $U(\tilde{\Lambda}, a)$ е унитарно представяне с положителна енергия (но възможно - приводимо !!!)

- $U(\tilde{\Lambda}, a) \Omega = \Omega$ за $\forall (\tilde{\Lambda}, a)$

и ако $\Psi \in \mathcal{H}$ е такъв, че: $U(\tilde{\Lambda}, a) \Psi = \Psi \quad \forall (\tilde{\Lambda}, a)$
тогава $\Psi = \text{const. } \Omega$.

- $U(\tilde{\Lambda}, a)(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$

- Нека означим $\underline{f} := (f_A)_{A=1}^N$ - $\overset{\text{векторна}}{\text{в.т.ф.}}$, за f_A - т.ф.

$$\underline{\phi}[\underline{f}] := \sum_{A=1}^N \phi_A[f_A] : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$$

и за $\forall (\tilde{\Lambda}, a) : \underline{f}^{(\Lambda, a)} := (f_A') :$

$$f_A'(x) := \sum_{B=1}^N \left(\pi(\tilde{\Lambda})^{-1} \right)_A^B f_B(\tilde{\Lambda}^{-1}(x-a))$$

$$\text{Тогава: } U(\tilde{\Lambda}, a) \underline{\phi}[\underline{f}] U(\tilde{\Lambda}, a)^{-1} = \underline{\phi}[\underline{f}^{(\tilde{\Lambda}, a)}]$$

- Искаме ако $P_A \neq P_B$ то $\pi(\tilde{\Lambda})_A^B = 0 \quad (\forall \tilde{\Lambda})$

(т.е. бозони се трансформират във бозони, фермиони във фермиони).

Забележка: При "ненормална статистика" P_A не играе роля.

(2) Операторно-значни обобщени функции :

$\forall A \in \{1, \dots, N\}, \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{D}$ съответствието

$$f\text{-т.ф.} \longmapsto \langle \Phi | \phi_A[f] \Psi \rangle \text{ - число } \in \mathbb{C}$$

е обобщена функция (числово-значна)

$$(3) \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{D}, f\text{-т.ф.} : \langle \Phi | \phi_A[f] \Psi \rangle = \langle \phi_A[f] \Phi | \Psi \rangle$$

- ермитовост

(4) Локалност / локална причинност / причинност

За $\forall f_1, f_2$ - т.ф., такива че

$$\text{ако } f_1(x_1) \neq 0 \text{ и } f_2(x_2) \neq 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 > 0$$

- пространствено

подобие : $x_1 \sim x_2$

имаме :

$$\phi_A[f_1] \phi_B[f_2] - (-1)^{P_A, B} \phi_B[f_2] \phi_A[f_1] = 0$$

(при нормална статистика :

$$\phi_A[f_1] \phi_B[f_2] - (-1)^{P_A P_B} \phi_B[f_2] \phi_A[f_1] = 0$$

т.е, бозони комутират с всички на пространствено-подобни разделения, а фермионите антикомутират по между си.)

(5) Пълнота : линейното подпространство $\mathcal{D}_0$ породено от

$$\Omega, \phi_{A_1}[f_1] \cdots \phi_{A_n}[f_n] \Omega, \text{ когато } n=1, 2, \dots, A_1, \dots, A_n=1, \dots, N,$$

$f_1, \dots, f_n$ - т.ф. - произволни

е като в $\mathcal{H}$. Забележете: $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$

$\uparrow$ някой път и полагат равни

Това са пълните аксиоми на Уайтман.

До днес не са известни модели на тези аксиоми в $\mathbb{R}^{3,1}$ ($D=4$), които да не могат да се реализират, като "под-модели" на т.нар. "обобщено-свободни полета".

Такива (т.е., "несвободни") са построени за $D=2$ и $D=3$.

Аксиомите на Уайтман са общоприетия стандарт днес, как трябва да бъде зададен математически всеки модел на квантови полета (над пространството на Минковски).

Свидетелство за това е и формулировката на един от милениум-проблемите:

https://en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Prize_Problems

Yang–Mills existence and mass gap

Оригинален източник: <http://www.claymath.org/millennium-problems>
<http://www.claymath.org/millennium-problems/yang%E2%80%93mills-and-mass-gap>

Yang–Mills Existence and Mass Gap:

Prove that for any compact simple gauge group G , a non-trivial quantum Yang–Mills theory exists on $\mathbb{R}^4$ and has a mass gap $\Delta > 0$. Existence includes establishing axiomatic properties at least as strong as those cited in [45, 35].

[45] R. Streater and A. Wightman, PCT, Spin and Statistics and all That, W. A. Benjamin, New York, 1964

Аксиомите на Уайтман в символическия запис на общият ϕ .

$$\phi_A[f] =: \int_{\mathbb{R}^D} d^D x \phi_A(x) f(x)$$

$$U(\tilde{\Lambda}, a) \phi[f] U(\tilde{\Lambda}, a)^{-1} = \phi[f(\tilde{\Lambda}, a)]$$

$$U(\tilde{\Lambda}, a) \phi_A(x) U(\tilde{\Lambda}, a)^{-1} = \sum_{B=1}^N \pi(\Lambda)_B^A \phi_B(\Lambda x + a)$$

$$\phi_A[f_1] \phi_B[f_2] - (-1)^{A,B} \phi_B[f_2] \phi_A[f_1] = 0$$

ако $\text{supp } f_1 \sim \text{supp } f_2$

$$\phi_A(x) \phi_B(y) - (-1)^{A,B} \phi_B(y) \phi_A(x) = 0$$

за $x \sim y$

Пример: електромагнитното квантово поле

$$U(\Lambda, a) \hat{F}_{\mu\nu}(x) U(\Lambda, a)^{-1}$$

$$= \sum_{\mu', \nu'=0}^3 \Lambda_{\mu}^{\mu'} \Lambda_{\nu}^{\nu'} F_{\mu'\nu'}(\Lambda x + a)$$

↑ ако приемем сумационната конвенция

Основни постижения на аксиоматичната КТП

1) Теорема на реконструкция на Уайтман

Задаването на системата от разпределения

$$W_{A_1 \dots A_n}(x_1, \dots, x_n) := \langle \Omega | \phi_{A_1}(x_1) \dots \phi_{A_n}(x_n) \Omega \rangle$$

$$W_{A_1 \dots A_n}(x_1 - x_2, \dots, x_{n-1} - x_n)$$

n -точкова функция на Уайтман
вакуумно средно
корелационна функция

при $\forall n, \forall A_1, \dots, A_n$ - определят еднозначно модела

При това, аксиомите на Уайтман могат да се преформулират изцяло за функциите на Уайтман.

- доказателството - следва от GNS-теоремата

2) Аналитичните свойства на уайтм. функции

$$\exists W_{A_1 \dots A_n}(z_1, \dots, z_n), \quad z_j \in \mathbb{C}^D$$

- аналитични в област инвариантна за комплексната група на Лоренц

и са такива, че

$$W_{A_1 \dots A_n}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\substack{\text{Im}(z_{j+1} - z_j) \in V^+ \\ n \rightarrow 0 \text{ там}}} W(z_1, \dots, z_n)$$

Обобщаващ с. нар. "функции на Суховски"

$$\frac{1}{t+i0} = \lim_{\text{Im} z \downarrow 0} \frac{1}{z} \equiv \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{t+i\varepsilon}$$

Функция на Уайтман за свободно безмасово ^{скалярно} поле в $D=4$

$$W(x) := \frac{\text{const}}{(x+i0e_0)^2} \equiv \frac{\text{const}}{-(x^0+i0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

$$W(x_1, x_2) = W(x_1 - x_2)$$

За наистина:
$$W(x) = \frac{\text{const}}{\sqrt{(x+i e_0)^2}} \text{Bessel } K_1(\text{im} \sqrt{(x+i e_0)^2})$$

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/Bogolubov_N.N., Logunov_A.A., Oksak_A.I., Todorov_I., General Principles of Quantum Field Theory %5b1990%5d.pdf

Стр. 354

Забелотка: Тук се предполага, че $N = \#$ бр. базисни полета $< \infty$

$\Rightarrow \text{Span} \{ \phi_A \} =:$ полево пространство.

$$\pi(\Lambda) = \bigoplus \pi^{(j_1, j_2)}(\Lambda)$$

↑
напр. за Лоренц

$$2j_1 + 2j_2 =: \text{спин на полето} =:$$

Определение: Нормална връзка спин-статистика

- при нормална статистика: $p_A = 2 \text{спин}(\phi_A) \bmod 2$

т.е. бозони с цел спин, фермиони с полуцел

3) Теорема за връзка спин-статистика

с точност до точ. унитарна трансф. (гр. на Клайн) може да се постигне нормална връзка спин-стат.

4) Теорема на Борхерс / Boghner

"(взаимната) локалност е транзитивна"

$\Rightarrow$ "клас на Борхерс"

$:= \forall$ операторно-значит о. ф.

които задават полета взаимно лок. с изходните

Определение: Тривиална теория $:=$ такава, която влиза в класа на Борхерс на свободна (обобщено)

5) Теорема на Рее-Шлиедер (Reeh-Schlieder)

"Вакуумът е сепариративен вектор за локални полета"

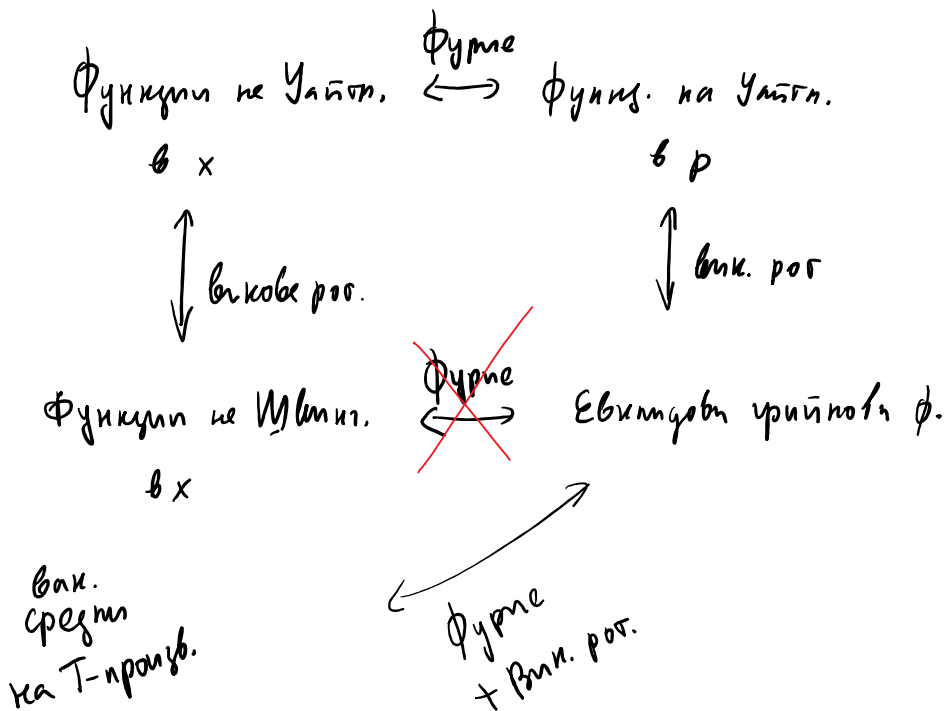
6) Теорема на Осервалдер-Иридер

В областта на асимптотичност се съдържа

$(\mathbb{R}^D)^{X \cup Y}$ - без тикетови наблюдения

$\hookrightarrow$ евклидовы ирригуови функции (не Иридер)

Строго понятие за "Викова вярване"



У) Теория на разсейването на Хааз-Риен
 Haag-Ruelle

- при с.кар. "mass-gap"