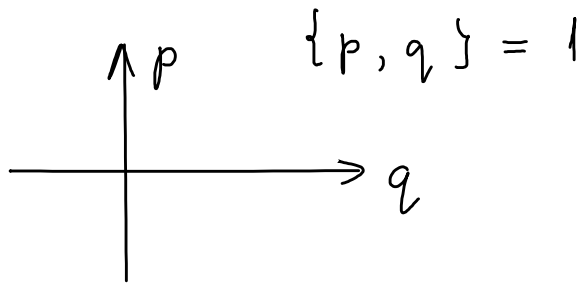


Основната идея за линеаризация на динамична система около устойчива равновесна точка, където тя има локално поведение на система от независими хармонични осцилатори се илюстрира най-лесно за система с една степен на свобода:



Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

Хамилтониан	$H(q, p)$
$\Downarrow$	
Уравнения на Хамилтон	$\left \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} \end{array} \right.$

Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

константа



Хамилтониан

$$H(q, p) = H_{(0)}$$



Уравнения на
Хамилтон

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} \end{array} \right.$$

Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

константа

↓

Хамилтониан $H(q, p) = H_{(0)}$

⇓

Уравнения на
Хамилтон $\left| \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \end{array} \right.$

↑

нулев принос

Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

Хамилтониан

$$H(q, p) = \overset{\text{константа}}{H_{(0)}} + \underbrace{\lambda q + \mu p}_{\text{линейна част } H_{(1)}}$$

$\Downarrow$
 Уравнения на Хамилтон

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \end{array} \right.$$

$\uparrow$
 нулев принос

Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

Хамилтониан

$$H(q, p) = \underbrace{H_{(0)}}_{\text{константа}} + \underbrace{\lambda q + \mu p}_{\text{линейна част } H_{(1)}}$$

Уравнения на Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 + \mu \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 - \lambda \end{cases}$$

нулев принос

константен принос по (q, p)

Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

Хамилтониан

$$H(q, p) = \underbrace{H_{(0)}}_{\text{константа}} + \underbrace{\lambda q + \mu p}_{\text{линейна част } H_{(1)}} + \underbrace{a q^2 + b p^2 + 2c q p}_{\text{квадратична част } H_{(2)}}$$

Уравнения на Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 + \mu \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 - \lambda \end{cases}$$

нулев принос

константен принос по (q, p)

Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

		константа ↓	линейна част $H_{(1)}$	квадратична част $H_{(2)}$
Хамилтониан	$H(q, p) =$	$H_{(0)}$	$+ \lambda q + \mu p$	$+ a q^2 + b p^2 + 2c q p$
↓				
Уравнения на Хамилтон	$\left \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \end{aligned} \right.$	0	$+ \mu$	$+ 2c q + 2b p$
		0	$- \lambda$	$- 2a q - 2c p$
		↑ нулев принос	константен принос по (q, p)	линеен принос по (q, p)

Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

Хамилтониан

$$H(q, p) = \underbrace{H_{(0)}}_{\text{константа}} + \underbrace{\lambda q + \mu p}_{\text{линейна част } H_{(1)}} + \underbrace{a q^2 + b p^2 + 2c q p}_{\text{квадратична част } H_{(2)}} + \dots$$

Уравнения на Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 + \mu + 2c q + 2b p + \dots \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 - \lambda - 2a q - 2c p + \dots \end{cases}$$

нулев принос

константен принос по (q, p)

линеен принос по (q, p)

Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

Хамилтониан

$$H(q, p) = \underbrace{H_{(0)}}_{\text{константа}} + \underbrace{\lambda q + \mu p}_{\text{линейна част } H_{(1)}} + \underbrace{a q^2 + b p^2 + 2c q p + \dots}_{\text{квадратична част } H_{(2)}}$$

Уравнения на Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 + \mu + 2c q + 2b p + \dots \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 - \lambda - 2a q - 2c p + \dots \end{cases}$$

нулев принос

константен принос по (q, p)

линеен принос по (q, p)

Следователно, свободният член (константата $H_{(0)}$) не дава принос в уравненията на Хамилтон и може да се изпусне - Хамилтонианът е определен с точност до константа.

Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Хамилтониан} & H(q, p) = & \underbrace{H_{(0)}}_{\text{константа}} + \underbrace{\lambda q + \mu p}_{\text{линейна част } H_{(1)}} + \underbrace{a q^2 + b p^2 + 2c q p + \dots}_{\text{квадратична част } H_{(2)}} \\
 \Downarrow & & \\
 \text{Уравнения на Хамилтон} & \left| \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 + \mu + 2c q + 2b p + \dots \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 - \lambda - 2a q - 2c p + \dots \end{array} \right. & \\
 & \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{нулев принос} \end{array} & \begin{array}{l} \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{константен принос по } (q, p)} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{линеен принос по } (q, p)} \end{array}
 \end{array}$$

Следователно, свободният член (константата $H_{(0)}$) не дава принос в уравненията на Хамилтон и може да се изпусне - Хамилтонианът е определен с точност до константа.

Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

Хамилтониан

$$H(q, p) = \underbrace{H_{(0)}}_{\text{константа}} + \underbrace{\lambda q + \mu p}_{\text{линейна част } H_{(1)}} + \underbrace{a q^2 + b p^2 + 2c q p}_{\text{квадратична част } H_{(2)}} + \dots$$

Уравнения на Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 + \mu + 2c q + 2b p + \dots \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 - \lambda - 2a q - 2c p + \dots \end{cases}$$

нулев принос

константен принос по (q, p)

линеен принос по (q, p)

Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Хамилтониан} & H(q, p) = & \underbrace{H_{(0)}}_{\text{константа}} + \underbrace{\lambda q + \mu p}_{\text{линейна част } H_{(1)}} + \underbrace{a q^2 + b p^2 + 2c q p + \dots}_{\text{квадратична част } H_{(2)}} \\
 \Downarrow & & \\
 \text{Уравнения на Хамилтон} & \left| \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 + \mu + 2c q + 2b p + \dots \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 - \lambda - 2a q - 2c p + \dots \end{array} \right. & \\
 & \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{нулев принос} \end{array} & \begin{array}{l} \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{константен принос по } (q, p)} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{линеен принос по } (q, p)} \end{array}
 \end{array}$$

НДУ точката $(q, p) = (0, 0)$ да е равновесна (т.е., $q(t) = 0$ и $p(t) = 0$ да са решения на уравненията на Хамилтон е $\lambda = \mu = 0$ (т.е., $H_{(1)} = 0$).

Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Хамилтониан} & H(q, p) = & \underbrace{H_{(0)}}_{\text{константа}} + \underbrace{\lambda q + \mu p}_{\text{линейна част } H_{(1)}} + \underbrace{a q^2 + b p^2 + 2c q p + \dots}_{\text{квадратична част } H_{(2)}} \\
 \Downarrow & & \\
 \text{Уравнения на Хамилтон} & \left| \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} + \mu + 2c q + 2b p + \dots \\ - \lambda - 2a q - 2c p + \dots \end{array} \\
 & & \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{нулев принос} \end{array} \quad \begin{array}{l} \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{константен принос по } (q, p)} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{линеен принос по } (q, p)} \end{array}
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Около равновесна точка : $H_{(1)} = 0$.

Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Хамилтониан} & H(q, p) = & \underbrace{H_{(0)}}_{\text{константа}} + \underbrace{\lambda q + \mu p}_{\text{линейна част } H_{(1)}} + \underbrace{a q^2 + b p^2 + 2c q p + \dots}_{\text{квадратична част } H_{(2)}} \\
 \Downarrow & & \\
 \text{Уравнения на Хамилтон} & \left| \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 + \mu + 2c q + 2b p + \dots \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 - \lambda - 2a q - 2c p + \dots \end{array} \right. & \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{нулев принос} \end{array} \\
 & & \begin{array}{l} \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{константен принос по } (q, p)} \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{линеен принос по } (q, p)} \end{array}
 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Около равновесна точка : $H_{(1)} = 0$.

Развитие на Хамилтониана около точката $(q, p) = (0, 0)$:

		константа	линейна част $H_{(1)}$	квадратична част $H_{(2)}$	
Хамилтониан	$H(q, p) =$	$H_{(0)}$	$+ \lambda q + \mu p$	$+ a q^2 + b p^2 + 2c q p$	$+ \dots$
$\Downarrow$					
Уравнения на Хамилтон	$\left \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \end{aligned} \right.$	0	$+ \mu$	$+ 2c q + 2b p$	$+ \dots$
		0	$- \lambda$	$- 2a q - 2c p$	$+ \dots$
		нулев принос	константен принос по (q, p)	линеен принос по (q, p)	

$\Rightarrow$ Около равновесна точка : $H_{(1)} = 0$. Тогава Хамилтонианът започва с квадратична част.

По нататък, покажем, че около устойчива равновесна точка $(q, p) = (0, 0)$
 Э канонични координати (q', p') така, че:

$H_{(2)}$ квадратична част

Хамилтониан $H(q', p') = \frac{\omega}{2} (q'^2 + p'^2) + H_{(3)} + H_{(4)} + \dots$



Уравнения на
Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q}' = \frac{\partial H}{\partial p'} = \omega p' + \dots \\ \dot{p}' = -\frac{\partial H}{\partial q'} = -\omega q' + \dots \end{cases}$$

По нататък, покажем, че около устойчива равновесна точка $(q, p) = (0, 0)$
 Э канонични координати (q', p') така, че:

$H_{(2)}$ квадратична част

Хамильтониан $H(q', p') = \frac{\omega}{2} (q'^2 + p'^2) + H_{(3)} + H_{(4)} + \dots$



Уравнения на
Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q}' = \frac{\partial H}{\partial p'} = \omega p' + \dots \\ \dot{p}' = -\frac{\partial H}{\partial q'} = -\omega q' + \dots \end{cases}$$

уравнение на
хармоничен осцилатор

$$\ddot{q}' = -\omega^2 q'$$

По нататък, покажем, че около устойчива равновесна точка $(q, p) = (0, 0)$
 ∃ канонични координати (q', p') така, че:

$H_{(2)}$ квадратична част

Хамилтониан $H(q', p') = \frac{\omega}{2} (q'^2 + p'^2) + H_{(3)} + H_{(4)} + \dots$



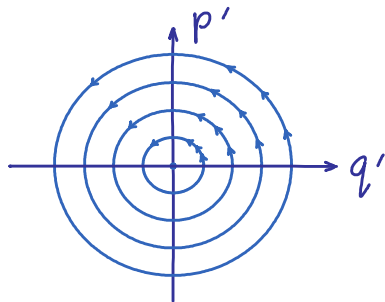
Уравнения на
Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q}' = \frac{\partial H}{\partial p'} = \omega p' + \dots \\ \dot{p}' = -\frac{\partial H}{\partial q'} = -\omega q' + \dots \end{cases}$$

уравнение на
хармоничен осцилатор

$$\ddot{q}' = -\omega^2 q'$$

с фазов портрет :



По нататък, покажем, че около устойчива равновесна точка $(q, p) = (0, 0)$
 ∃ канонични координати (q', p') така, че:

$H_{(2)}$ квадратична част

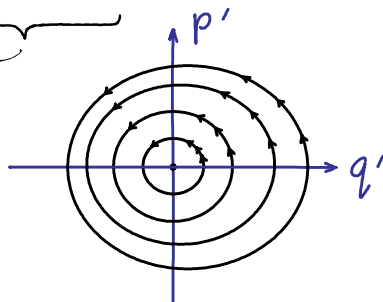
Хамилтониан $H(q', p') = \frac{\omega}{2} (q'^2 + p'^2) + H_{(3)} + H_{(4)} + \dots$



Уравнения на
Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q}' = \frac{\partial H}{\partial p'} = \omega p' + \dots \\ \dot{p}' = -\frac{\partial H}{\partial q'} = -\omega q' + \dots \end{cases}$$

Следващите
членове водят до нелинейни
корекции в динамиката:



По нататък, покажем, че около устойчива равновесна точка $(q, p) = (0, 0)$
 ∃ канонични координати (q', p') така, че:

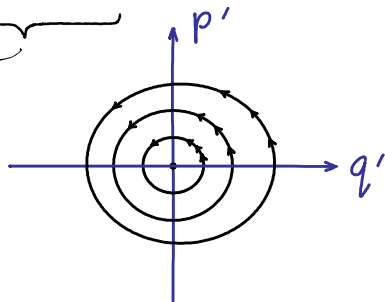
$H_{(2)}$ квадратична част

Хамилтониан $H(q', p') = \frac{\omega}{2} (q'^2 + p'^2) + H_{(3)} + H_{(4)} + \dots$

Уравнения на
Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q}' = \frac{\partial H}{\partial p'} = \omega p' + \dots \\ \dot{p}' = -\frac{\partial H}{\partial q'} = -\omega q' + \dots \end{cases}$$

Следващите
членове водят до нелинейни
корекции в динамиката:



По нататък, покажем, че около устойчива равновесна точка $(q, p) = (0, 0)$
 ∃ канонични координати (q', p') така, че:

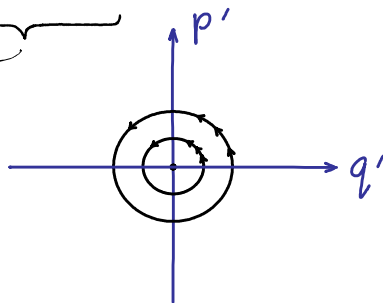
$H_{(2)}$ квадратична част

Хамилтониан $H(q', p') = \frac{\omega}{2} (q'^2 + p'^2) + H_{(3)} + H_{(4)} + \dots$

Уравнения на
Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q}' = \frac{\partial H}{\partial p'} = \omega p' + \dots \\ \dot{p}' = -\frac{\partial H}{\partial q'} = -\omega q' + \dots \end{cases}$$

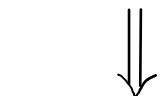
Следващите
членове водят до нелинейни
корекции в динамиката:



По нататък, покажем, че около устойчива равновесна точка $(q, p) = (0, 0)$
 ∃ канонични координати (q', p') така, че:

$H_{(2)}$ квадратична част

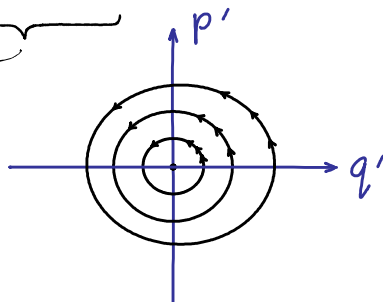
Хамилтониан $H(q', p') = \frac{\omega}{2} (q'^2 + p'^2) + H_{(3)} + H_{(4)} + \dots$



Уравнения на
Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q}' = \frac{\partial H}{\partial p'} = \omega p' + \dots \\ \dot{p}' = -\frac{\partial H}{\partial q'} = -\omega q' + \dots \end{cases}$$

Следващите
членове водят до нелинейни
корекции в динамиката:



По нататък, покажем, че около устойчива равновесна точка $(q, p) = (0, 0)$
 ∃ канонични координати (q', p') така, че:

$H_{(2)}$ квадратична част

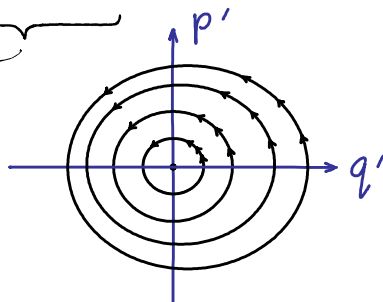
Хамилтониан $H(q', p') = \frac{\omega}{2} (q'^2 + p'^2) + H_{(3)} + H_{(4)} + \dots$



Уравнения на
Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q}' = \frac{\partial H}{\partial p'} = \omega p' + \dots \\ \dot{p}' = -\frac{\partial H}{\partial q'} = -\omega q' + \dots \end{cases}$$

Следващите
членове водят до нелинейни
корекции в динамиката:



По нататък, покажем, че около устойчива равновесна точка $(q, p) = (0, 0)$
 ∃ канонични координати (q', p') така, че:

$H_{(2)}$ квадратична част

Хамилтониан $H(q', p') = \frac{\omega}{2} (q'^2 + p'^2) + H_{(3)} + H_{(4)} + \dots$



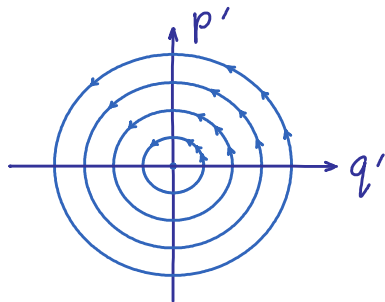
Уравнения на
Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q}' = \frac{\partial H}{\partial p'} = \omega p' + \dots \\ \dot{p}' = -\frac{\partial H}{\partial q'} = -\omega q' + \dots \end{cases}$$

уравнение на
хармоничен осцилатор

$$\ddot{q}' = -\omega^2 q'$$

с фазов портрет :



Тази картина на динамични системи около устойчива равновесна точка се запазва и при повече на брой степени на свобода : $\exists$ канонични $(q', p') = ((q'_j), (p'_j))$

$H_{(2)}$ квадратична част

Хамилтониан

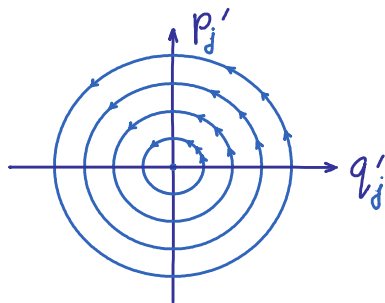
$$H(q', p') = \underbrace{\sum_{j=1}^s \frac{\omega_j}{2} (q_j'^2 + p_j'^2)}_{H_{(2)}} + H_{(3)} + H_{(4)} + \dots$$

Уравнения на
Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q}_j' = \frac{\partial H}{\partial p_j'} = \omega_j p_j' + \dots \\ \dot{p}_j' = -\frac{\partial H}{\partial q_j'} = -\omega_j q_j' + \dots \end{cases} \quad j=1, \dots, s$$

уравнение на
хармоничен осцилатор

$\ddot{q}_j' = -\omega_j^2 q_j'$
с фазов портрет :



Тази картина на динамични системи около устойчива равновесна точка се запазва и при повече на брой степени на свобода : $\exists$ канонични $(q', p') = ((q'_j), (p'_j))$

$H_{(2)}$ квадратична част

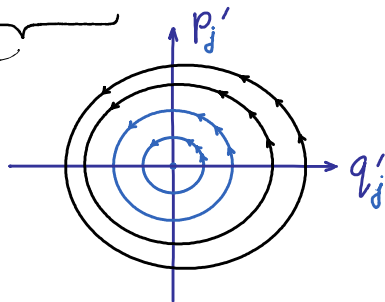
Хамилтониан

$$H(q', p') = \underbrace{\sum_{j=1}^s \frac{\omega_j}{2} (q_j'^2 + p_j'^2)}_{H_{(2)}} + H_{(3)} + H_{(4)} + \dots$$

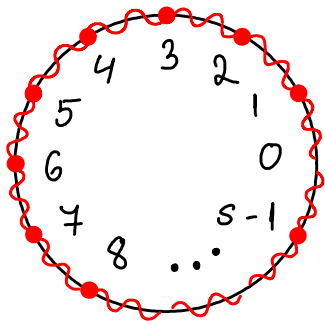
Уравнения на
Хамилтон

$$\begin{cases} \dot{q}'_j = \frac{\partial H}{\partial p'_j} = \omega_j p'_j + \dots \\ \dot{p}'_j = -\frac{\partial H}{\partial q'_j} = -\omega_j q'_j + \dots \end{cases} \quad j=1, \dots, s$$

Следващите
членове водят до нелинейни
корекции в динамиката :

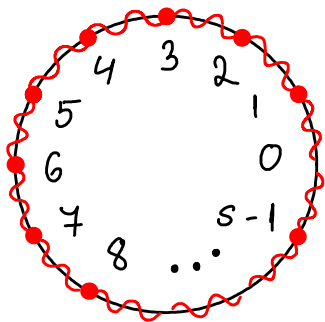


I. Модел на трептящ кристален пръстен



I. Модел на трептящ кристален пръстен

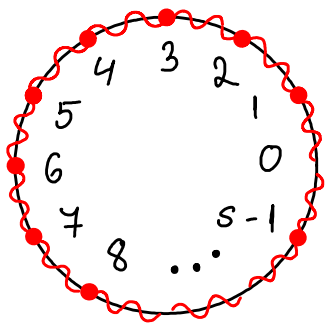
I.1. Класическо описание



s на брой еднакви малки топчета (материални точки) са нанизани на пръстен, върху който могат да се движат без триене.

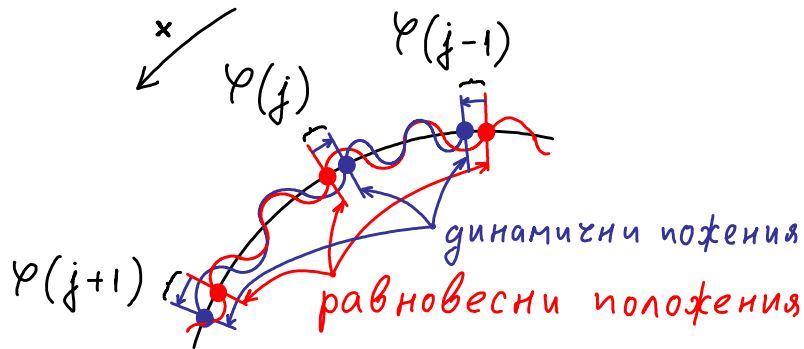
I. Модел на трептящ кристален пръстен

I.1. Класическо описание



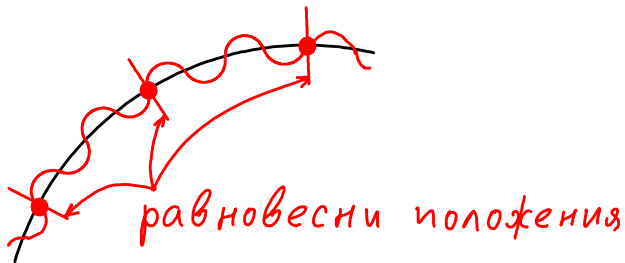
s на брой еднакви малки топчета (материални точки) са нанизани на пръстен, върху който могат да се движат без триене. Всеки две съседни топчета са свързани с еднакви идеално еластични пружини. Задачата е да се опише динамиката.

I.1.а. Конфигурационно пространство.



I.1.a. Конфигурационно пространство.

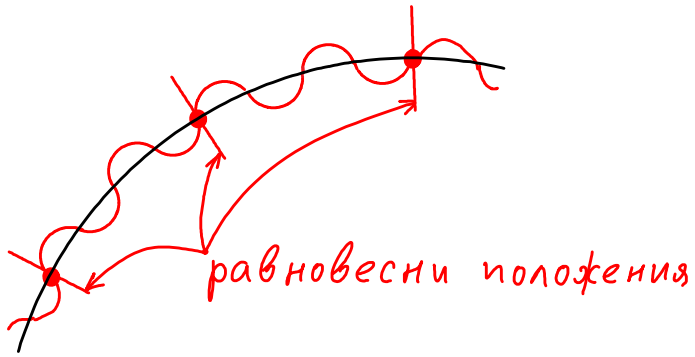
Фиксираме 5 еквилибристични позиции върху пръстена (окръжността).

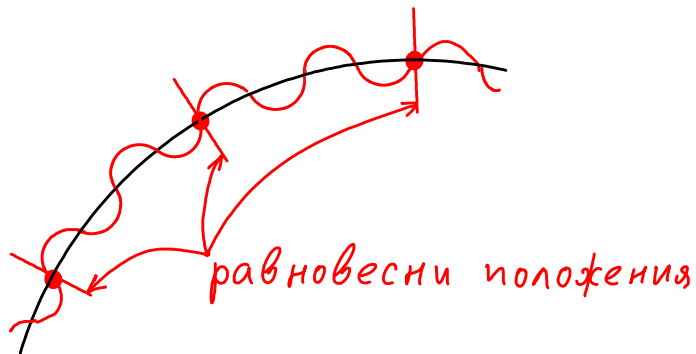


I.1.a. Конфигурационно пространство.

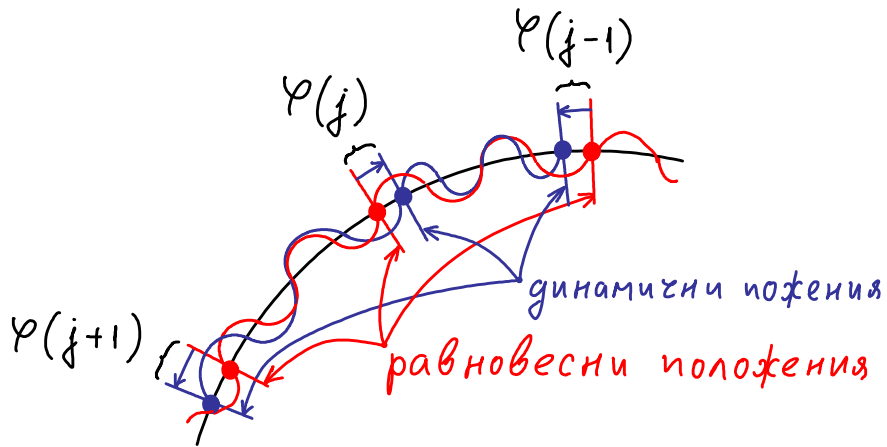
Фиксираме 5 еквилибристични позиции върху пръстена (окръжността).
В тези позиции топчетата не изпитват сили (т.е. са в равновесие),
тъй като разтяганията на пружините от двете им страни са еднакви.



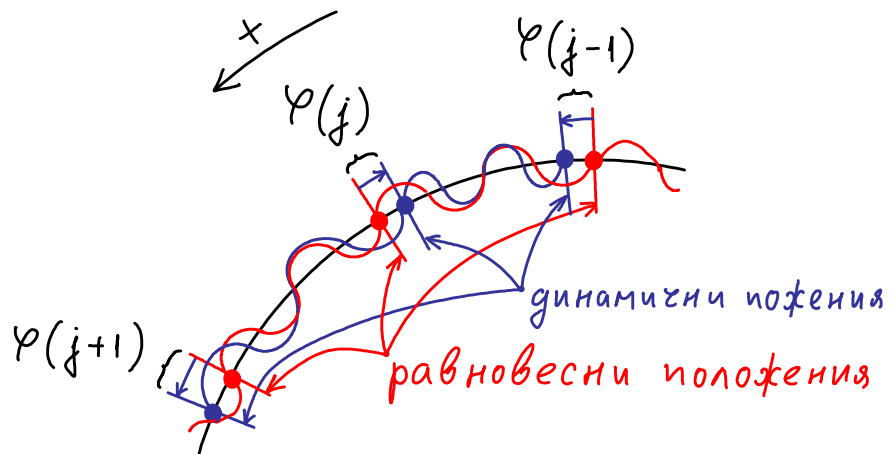




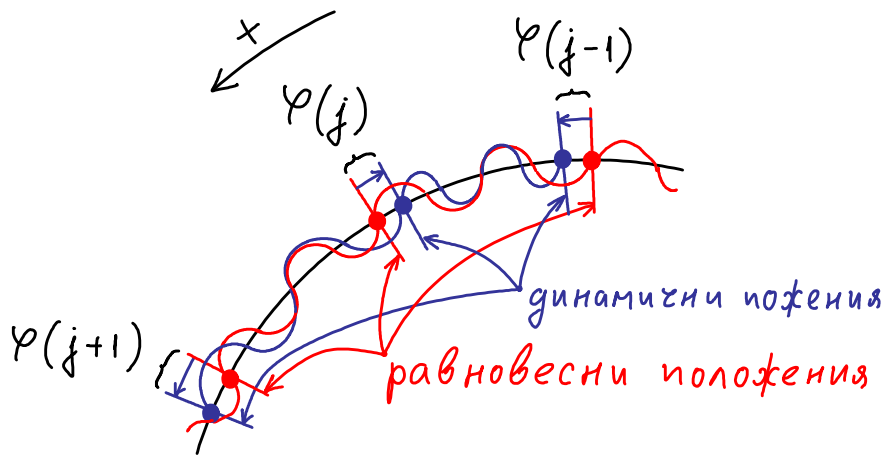
Нека $\varphi(j)$ е дължината на дъгата от окръжността между равновесната позиция на j -тото топче (за $j = 0, \dots, s-1$)



Нека $\varphi(j)$ е дължината на дъгата от окръжността между равновесната позиция на j -тото точче (за $j = 0, \dots, s-1$) и неговата текуща, динамична позиция



Нека $\varphi(j)$ е дължината на дъгата от окръжността между равновесната позиция на j -тото топче (за $j=0, \dots, s-1$) и неговата текуща, динамична позиция, отчитана с положителен знак при отклонение обратно на часовниковата стрелка.

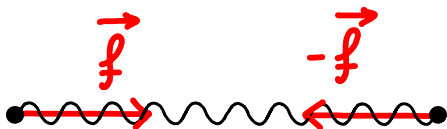


Нека $\varphi(j)$ е дължината на дъгата от окръжността между равновесната позиция на j -тото точка (за $j = 0, \dots, s-1$) и негова текуща, динамична позиция, отчитана с положителен знак при отклонение обратно на часовниковата стрелка.

Закона за движение на системата се задава от функциите:

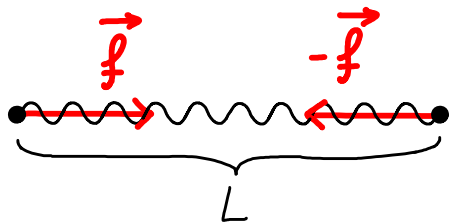
$$\varphi(j, t), \quad j = 0, \dots, s-1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

I.1.8. Динамика



I.1.8. Динамика

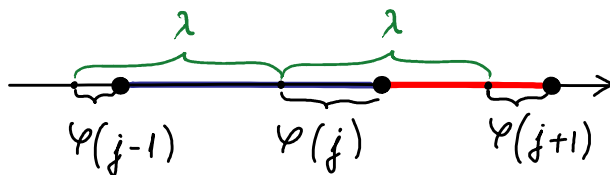
Еластичната сила в случая на идеално еластична пружина по определение е с големина, която е право пропорционална на дължината на пружината, а посоката на силата е противоположна на разтягането.



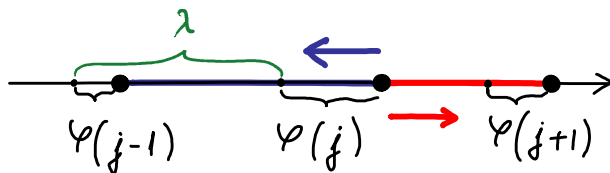
$$, \quad f = \alpha \cdot L ,$$

където коефициента на пропорционалност α се нарича коефициент на еластичност.

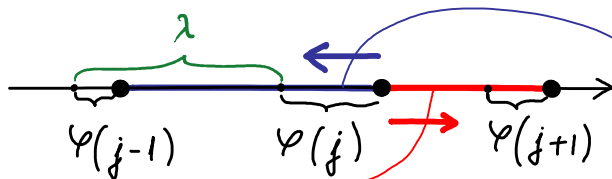
Нека λ е дължината на всяка една от пружините в равновесно положение (т.е., $\lambda = (\text{дължината на окръжността})/s$).



Нека λ е дължината на всяка една от пружините в равновесно положение (т.е., $\lambda = (\text{дължината на окръжността})/s$). Тогава силите, които действат на j -то топче са следните:



Нека λ е дължината на всяка една от пружините в равновесно положение (т.е., $\lambda = (\text{дължината на окръжността})/s$). Тогава силите, които действат на j -то топче са следните:

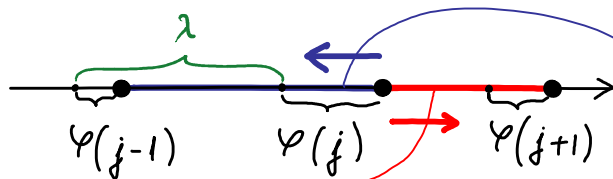


$$\underbrace{\mathcal{K}(\underbrace{\lambda - \varphi(j) + \varphi(j+1)}_{\text{дължина на дясната пружина}})}_{\text{сила от дясно: действа в положителна посока}} - \underbrace{\mathcal{K}(\underbrace{\lambda - \varphi(j-1) + \varphi(j)}_{\text{дължина на лявата пружина}})}_{\text{сила от ляво: действа в отрицателна посока}}$$

сила от дясно: действа в
положителна посока

сила от ляво: действа в
отрицателна посока

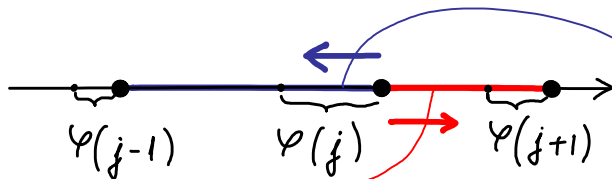
Нека λ е дължината на всяка една от пружините в равновесно положение (т.е., $\lambda = (\text{дължината на окръжността})/s$). Тогава силите, които действат на j -то топче са следните:



$$m \ddot{\varphi}(j) = \underbrace{\mathcal{K}(\lambda - \varphi(j) + \varphi(j+1))}_{\substack{\text{дължина на дясната} \\ \text{пружина}}} - \underbrace{\mathcal{K}(\lambda - \varphi(j-1) + \varphi(j))}_{\substack{\text{дължина на лявата} \\ \text{пружина}}}$$

сила от дясно: действа в положителна посока
сила от ляво: действа в отрицателна посока

Така, по втория закон на Нютон:



$$m \ddot{\varphi}(j) = \underbrace{\kappa (\lambda - \varphi(j) + \varphi(j+1))}_{\substack{\text{дължина на дясната} \\ \text{пружина}}} - \underbrace{\kappa (\lambda - \varphi(j-1) + \varphi(j))}_{\substack{\text{дължина на лявата} \\ \text{пружина}}}$$

сила от дясно: действа в
положителна посока
сила от ляво: действа в
отрицателна посока

Така, по втория закон на Нютон:

$$m \ddot{\varphi}(j) = \kappa (\lambda - \varphi(j) + \varphi(j+1)) - \kappa (\lambda - \varphi(j-1) + \varphi(j))$$

Така, по втория закон на Нютон:

$$m \ddot{\varphi}(j) = \kappa (\lambda - \varphi(j) + \varphi(j+1)) - \kappa (\lambda - \varphi(j-1) + \varphi(j))$$

където m е масата на всяко едно от топчетата

Така, по втория закон на Нютон:

$$m \ddot{\varphi}(j) = \kappa (\lambda - \varphi(j) + \varphi(j+1)) - \kappa (\lambda - \varphi(j-1) + \varphi(j))$$

където m е масата на всяко едно от точкестата и също:

$$\frac{d}{dt} \varphi(j, t) =: \dot{\varphi}(j, t) \equiv \dot{\varphi}(j)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^2 \varphi(j, t) =: \ddot{\varphi}(j, t) \equiv \ddot{\varphi}(j)$$

(по някой път в точка **I.1.** ще подразбираме времето t без го пишем за краткост).

Така, по втория закон на Нютон:

$$m \ddot{\varphi}(j) = \kappa (\lambda - \varphi(j) + \varphi(j+1)) - \kappa (\lambda - \varphi(j-1) + \varphi(j))$$

където m е масата на всяко едно от топчетата.

Така, по втория закон на Нютон:

$$m \ddot{\varphi}(j) = \kappa (\lambda - \varphi(j) + \varphi(j+1)) - \kappa (\lambda - \varphi(j-1) + \varphi(j))$$

където m е масата на всяко едно от топчетата.

И така, уравненията за движение са

$$\left| \begin{aligned} m \ddot{\varphi}(j, t) &= -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)), \\ j &= 0, \dots, s-1. \end{aligned} \right.$$

И така, уравненията за движение са

$$\left| \begin{aligned} m \ddot{\varphi}(j, t) &= -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)), \\ j &= 0, \dots, s-1. \end{aligned} \right.$$

И така, уравненията за движение са

$$\left| \begin{aligned} m \ddot{\varphi}(j, t) &= -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)), \\ j &= 0, \dots, s-1. \end{aligned} \right.$$

Основната ни задача е да намерим такава линейна смяна

$$\tilde{\varphi}(k, t) = \sum_{j=0}^{s-1} F_{k,j} \varphi(j, t)$$

И така, уравненията за движение са

$$\left| m \ddot{\varphi}(j, t) = -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)) \right.,$$

$$j = 0, \dots, s-1.$$

Основната ни задача е да намерим такава линейна смяна

$$\tilde{\varphi}(k, t) = \sum_{j=0}^{s-1} F_{k,j} \varphi(j, t)$$

така, че $\left| \ddot{\tilde{\varphi}}(k, t) = -\omega(k)^2 \tilde{\varphi}(k, t) \right., \quad k = 0, \dots, s-1.$

И така, уравненията за движение са

$$\left| \begin{aligned} m \ddot{\varphi}(j, t) &= -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)), \\ j &= 0, \dots, s-1. \end{aligned} \right.$$

Основната ни задача е да намерим такава линейна смяна

$$\tilde{\varphi}(k, t) = \sum_{j=0}^{s-1} F_{k,j} \varphi(j, t)$$

така, че $\left| \ddot{\tilde{\varphi}}(k, t) = -\omega(k)^2 \tilde{\varphi}(k, t), \quad k = 0, \dots, s-1. \right.$

Тоест, имаме задача за диагонализация, т.е., за привеждане в нормална форма на система от линейни обикновени диференциални уравнения.

И така, уравненията за движение са

$$\left| \begin{aligned} m \ddot{\varphi}(j, t) &= -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)), \\ j &= 0, \dots, s-1. \end{aligned} \right.$$

Забележка :

И така, уравненията за движение са

$$\left| \begin{aligned} m \ddot{\varphi}(j, t) &= -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)), \\ j &= 0, \dots, s-1. \end{aligned} \right.$$

Забележка: В задачите за хармонични трептения е много удобно използването на комплексни решения.

И така, уравненията за движение са

$$\left| \begin{aligned} m \ddot{\varphi}(j, t) &= -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)), \\ j &= 0, \dots, s-1. \end{aligned} \right.$$

Забележка: В задачите за хармонични трептения е много удобно използването на комплексни решения. При първоначалната физическа постановка $\varphi(j, t)$ са реално-значни (real valued) функции

И така, уравненията за движение са

$$\left| \begin{aligned} m \ddot{\varphi}(j, t) &= -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)), \\ j &= 0, \dots, s-1. \end{aligned} \right.$$

Забележка: В задачите за хармонични трептения е много удобно използването на комплексни решения. При първоначалната физична постановка $\varphi(j, t)$ са реално-значни (real valued) функции, но понеже уравненията за движение са с реални коефициенти, то ако допуснем

И така, уравненията за движение са

$$\left| \begin{aligned} m \ddot{\varphi}(j, t) &= -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)), \\ j &= 0, \dots, s-1. \end{aligned} \right.$$

Забележка: В задачите за хармонични трептения е много удобно използването на комплексни решения. При първоначалната физична постановка $\varphi(j, t)$ са реално-значни (real valued) функции, но понеже уравненията за движение са с реални коефициенти, то ако допуснем, комплексно-значни решения $\varphi(j, t)$

И така, уравненията за движение са

$$\left| \begin{aligned} m \ddot{\varphi}(j, t) &= -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)), \\ j &= 0, \dots, s-1. \end{aligned} \right.$$

Забележка: В задачите за хармонични трептения е много удобно използването на комплексни решения. При първоначалната физична постановка $\varphi(j, t)$ са реално-значни (real valued) функции, но понеже уравненията за движение са с реални коефициенти, то ако допуснем, комплексно-значни решения $\varphi(j, t)$, тогава както реалната им част $\operatorname{Re} \varphi(j, t)$, така и имажинерната $\operatorname{Im} \varphi(j, t)$ ще са решения на уравненията за движение.

И така, уравненията за движение са

$$\left| \begin{aligned} m \ddot{\varphi}(j, t) &= -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)), \\ j &= 0, \dots, s-1. \end{aligned} \right.$$

Забележка: В задачите за хармонични трептения е много удобно използването на комплексни решения. При първоначалната физична постановка $\varphi(j, t)$ са реално-значни (real valued) функции, но понеже уравненията за движение са с реални коефициенти, то ако допуснем, комплексно-значни решения $\varphi(j, t)$, тогава както реалната им част $\operatorname{Re} \varphi(j, t)$, така и имажинерната $\operatorname{Im} \varphi(j, t)$ ще са решения на уравненията за движение. С тази уговорка, търсената линейна трансформация

$$\tilde{\varphi}(k, t) = \sum_{j=0}^{s-1} F_{k,j} \varphi(j, t) \quad \text{ще бъде комплексна.}$$

I.1.6. Дискретна Фурие трансформация

Решението за матрицата $F = (F_{j,k})$ се дава от т.нар. "дискретна Фурие трансформация" (някои също я наричат "квантова Фурие трансф."). За детайлното ѝ въвеждане и свойства - виж. в записките).

Нека $\xi_s := e^{\frac{2\pi i}{s}} = \overline{\xi_s}^{-1}$ е примитивен s -ти корен на единицата, $\xi_s^s = 1$, и да въведем $s \times s$ - матрицата:

$$F = (F_{j,k})_{j,k=1}^s, \quad F_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{s}} \xi_s^{kj} = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{2\pi i \frac{kj}{s}}.$$

I.1.2. Нормални честоти и моди на трептене (normal frequencies and modes)

Замествайки

$$\tilde{\varphi}(k, t) = \sum_{j=1}^s F_{k,j} \varphi(j, t)$$

I.1.2. Нормални честоти и моди на трептене (normal frequencies and modes)

Замествайки

$$\tilde{\varphi}(k, t) = \sum_{j=1}^s \frac{1}{\sqrt{s}} e^{2\pi i \frac{kj}{s}} \varphi(j, t)$$

I.1.2. Нормални честоти и моди на трептене (normal frequencies and modes)

Замествайки

$$\tilde{\varphi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{j=1}^s e^{2\pi i \frac{kj}{s}} \varphi(j, t)$$

I.1.2. Нормални честоти и моди на трептене (normal frequencies and modes)

Замествайки $\tilde{\varphi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{j=1}^s e^{2\pi i \frac{kj}{s}} \varphi(j, t)$

в уравненията за движение

$$\left| m \ddot{\varphi}(j, t) = -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)) \right., \\ \left. j = 0, \dots, s-1. \right.$$

I.1.2. Нормални честоти и моди на трептене (normal frequencies and modes)

Замествайки $\tilde{\varphi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{j=1}^s e^{2\pi i \frac{kj}{s}} \varphi(j, t)$

в уравненията за движение

$$\left| m \ddot{\varphi}(j, t) = -\kappa (2\varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)) \right., \\ \left. j = 0, \dots, s-1. \right.$$

те преминават в нормална форма:

$$\left| \ddot{\tilde{\varphi}}(k, t) = -\omega(k)^2 \tilde{\varphi}(k, t) \right., \quad k = 0, \dots, s-1$$

Замествайки

$$\tilde{\varphi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{j=1}^s e^{2\pi i \frac{kj}{s}} \varphi(j, t)$$

в уравненията за движение

$$\left| m \ddot{\varphi}(j, t) = -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)) \right.,$$

$$j = 0, \dots, s-1.$$

те преминават в нормална форма:

$$\left| \ddot{\tilde{\varphi}}(k, t) = -\omega(k)^2 \tilde{\varphi}(k, t) \right., \quad k = 0, \dots, s-1$$

Замествайки

$$\tilde{\varphi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{j=1}^s e^{2\pi i \frac{kj}{s}} \varphi(j, t)$$

в уравненията за движение

$$\left| m \ddot{\varphi}(j, t) = -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)) \right.,$$

$$j = 0, \dots, s-1.$$

те преминават в нормална форма:

$$\left| \ddot{\tilde{\varphi}}(k, t) = -\omega(k)^2 \tilde{\varphi}(k, t) \right., \quad k = 0, \dots, s-1$$

където:

$$\omega(k) = 2 \left| \sin \frac{\pi k}{s} \right| \sqrt{\frac{2\kappa}{m}} = \omega(-k).$$

Замествайки

$$\tilde{\varphi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{j=1}^s e^{2\pi i \frac{kj}{s}} \varphi(j, t)$$

в уравненията за движение

$$\left| m \ddot{\varphi}(j, t) = -\kappa (2\varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)) \right.,$$

$$j = 0, \dots, s-1.$$

те преминават в нормална форма:

$$\left| \ddot{\tilde{\varphi}}(k, t) = -\omega(k)^2 \tilde{\varphi}(k, t) \right., \quad k = 0, \dots, s-1$$

където:

$$\omega(k) = 2 \left| \sin \frac{\pi k}{s} \right| \sqrt{\frac{2\kappa}{m}} = \omega(-k).$$

Числото $k \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ се нарича **вълново число**.

Замествайки

$$\tilde{\varphi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{j=1}^s e^{2\pi i \frac{kj}{s}} \varphi(j, t)$$

в уравненията за движение

$$\left| m \ddot{\varphi}(j, t) = -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)) \right.,$$

$$j = 0, \dots, s-1.$$

те преминават в нормална форма :

$$\left| \ddot{\tilde{\varphi}}(k, t) = -\omega(k)^2 \tilde{\varphi}(k, t) \right., \quad k = 0, \dots, s-1$$

където :

$$\omega(k) = 2 \left| \sin \frac{\pi k}{s} \right| \sqrt{\frac{2\kappa}{m}} = \omega(-k).$$

$\omega(k)$ се наричат нормални честоти.

Замествайки

$$\tilde{\varphi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{j=1}^s e^{2\pi i \frac{kj}{s}} \varphi(j, t)$$

в уравненията за движение

$$\left| m \ddot{\varphi}(j, t) = -\kappa (2 \varphi(j, t) - \varphi(j+1, t) + \varphi(j-1, t)) \right.,$$

$$j = 0, \dots, s-1.$$

те преминават в нормална форма :

$$\left| \ddot{\tilde{\varphi}}(k, t) = -\omega(k)^2 \tilde{\varphi}(k, t) \right., \quad k = 0, \dots, s-1$$

където :

$$\omega(k) = 2 \left| \sin \frac{\pi k}{s} \right| \sqrt{\frac{2\kappa}{m}} = \omega(-k).$$

Решенията $\tilde{\varphi}(k, t)$ се наричат нормални моди.

Замествайки $\tilde{\varphi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{j=1}^s e^{2\pi i \frac{kj}{s}} \varphi(j, t)$

в уравненията за движение преминават в нормална форма :

$\ddot{\tilde{\varphi}}(k, t) = -\omega(k)^2 \tilde{\varphi}(k, t)$, $k = 0, \dots, s-1$ където :

Замествайки $\tilde{\varphi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{j=1}^s e^{2\pi i \frac{kj}{s}} \varphi(j, t)$

в уравненията за движение преминават в нормална форма :

$$\ddot{\tilde{\varphi}}(k, t) = -\omega(k)^2 \tilde{\varphi}(k, t), \quad k = 0, \dots, s-1 \quad \text{където :}$$

нормални
честоти

$$\left| \omega(k) = 2 \left| \sin \frac{\pi k}{s} \right| \sqrt{\frac{2\kappa}{m}} = \omega(-k) \right.$$

Замествайки
$$\tilde{\varphi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{j=1}^s e^{2\pi i \frac{kj}{s}} \varphi(j, t)$$

В уравненията за движение преминават в нормална форма :

$$\ddot{\tilde{\varphi}}(k, t) = -\omega(k)^2 \tilde{\varphi}(k, t), \quad k = 0, \dots, s-1 \quad \text{където :}$$

нормални
честоти

$$\omega(k) = 2 \left| \sin \frac{\pi k}{s} \right| \sqrt{\frac{2\kappa}{m}} = \omega(-k)$$

нормални
моди

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_k(k', t) &= A(k) \delta_{k, k'} e^{i\omega(k)t}, \\ \tilde{\varphi}_k(k', t)^* &= A(k)^* \delta_{k, k'} e^{-i\omega(k)t} \quad (k \neq 0 \bmod s), \\ \tilde{\varphi}_0(k', t) &= A(0)t + B(0). \end{aligned}$$

нормални
честоти

$$\omega(k) = 2 \left| \sin \frac{\pi k}{s} \right| \sqrt{\frac{2\kappa}{m}} = \omega(-k)$$

нормални
моди

$$\tilde{\varphi}_k(k', t) = A(k) \delta_{k, k'} e^{i\omega(k)t},$$

$$\tilde{\varphi}_k(k', t)^* = A(k)^* \delta_{k, k'} e^{-i\omega(k)t} \quad (k \neq 0 \bmod s),$$

$$\tilde{\varphi}_0(k', t) = A(0)t + B(0).$$

нормални
честоти

$$\omega(k) = 2 \left| \sin \frac{\pi k}{s} \right| \sqrt{\frac{2\kappa}{m}} = \omega(-k)$$

нормални
моди

$$\tilde{\varphi}_k(k', t) = A(k) \delta_{k, k'} e^{i\omega(k)t},$$

$$\tilde{\varphi}_k(k', t)^* = A(k)^* \delta_{k, k'} e^{-i\omega(k)t} \quad (k \neq 0 \bmod s),$$

$$\tilde{\varphi}_0(k', t) = A(0)t + B(0).$$

Както виждаме, случаят $k = 0$ е специален, понеже $\omega(0) = 0$.

нормални
честоти

$$\omega(k) = 2 \left| \sin \frac{\pi k}{s} \right| \sqrt{\frac{2\kappa}{m}} = \omega(-k)$$

нормални
моди

$$\tilde{\varphi}_k(k', t) = A(k) \delta_{k, k'} e^{i\omega(k)t},$$

$$\tilde{\varphi}_k(k', t)^* = A(k)^* \delta_{k, k'} e^{-i\omega(k)t} \quad (k \neq 0 \bmod s),$$

$$\tilde{\varphi}_0(k', t) = A(0)t + B(0).$$

Както виждаме, случаят $k = 0$ е специален, понеже $\omega(0) = 0$. Това отговаря на свободно въртене на пръстена, без трептения.

нормални
честоти

$$\omega(k) = 2 \left| \sin \frac{\pi k}{s} \right| \sqrt{\frac{2\kappa}{m}} = \omega(-k)$$

нормални
моди

$$\tilde{\varphi}_k(k', t) = A(k) \delta_{k, k'} e^{i\omega(k)t},$$

$$\tilde{\varphi}_k(k', t)^* = A(k)^* \delta_{k, k'} e^{-i\omega(k)t} \quad (k \neq 0 \bmod s),$$

$$\tilde{\varphi}_0(k', t) = A(0)t + B(0).$$

Както виждаме, случаят $k = 0$ е специален, понеже $\omega(0) = 0$. Това отговаря на свободно въртене на пръстена, без трептения.

В точка: I.1.e. Стабилизация и нелинейности

се въвежда допълнителни сили, които премахват тази изроденост.

Лекция 4/2013 - завършек

Б.2. Канонично квантуване на осцилатор

Лекция 4/2013 - завършек

6.2. Канонично квантуване на осцилатор

Една осцилаторна система приведена в каноничен вид се задава от хамилтониан, който е сума от *независими* едномерни осцилатори.

Лекция 4/2013 - завършек

6.2. Канонично квантуване на осцилатор

Една осцилаторна система приведена в каноничен вид се задава от хамилтониан, който е сума от **независими** едномерни осцилатори. Ето защо, в основата на задачата за квантуване на такива динамични системи стои задачата за един осцилатор.

Лекция 4/2013 - завършек

6.2. Канонично квантуване на осцилатор

Една осцилаторна система приведена в каноничен вид се задава от хамилтониан, който е сума от **независими** едномерни осцилатори. Ето защо, в основата на задачата за квантуване на такива динамични системи стои задачата за един осцилатор.

Класическият хамилтониан е:
$$H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$$

Лекция 4/2013 - завършек

Б.2. Канонично квантуване на осцилатор

Една осцилаторна система приведена в каноничен вид се задава от хамилтониан, който е сума от **независими** едномерни осцилатори. Ето защо, в основата на задачата за квантуване на такива динамични системи стои задачата за един осцилатор.

Класическият хамилтониан е: $H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$

Уравненията за движение са: $\begin{cases} \dot{q} = \omega p \\ \dot{p} = -\omega q \end{cases}$

Лекция 4/2013 - завършек

Б.2. Канонично квантуване на осцилатор

Една осцилаторна система приведена в каноничен вид се задава от хамилтониан, който е сума от **независими** едномерни осцилатори. Ето защо, в основата на задачата за квантуване на такива динамични системи стои задачата за един осцилатор.

Класическият хамилтониан е: $H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$

Уравненията за движение са: $\left| \begin{array}{l} \dot{q} = \omega p \\ \dot{p} = -\omega q \end{array} \right. \Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q.$

Относно физичните размерности.

Относно физическите размерности.

За простота в тази лекция сме избрали да работим в канонични координати (q, p) (т.е., $\{q, p\} = 1$), за които хамилтониана на хармоничния осцилатор приема вида $H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$.

Относно физическите размерности.

За простота в тази лекция сме избрали да работим в канонични координати (q, p) (т.е., $\{q, p\} = 1$), за които хамилтониана на хармоничния осцилатор приема вида $H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$. В частност, q и p имат еднаква размерност $[H \omega^{-1}]^{1/2} = \text{kg}^{1/2} \text{ m s}^{-1/2}$.

Относно физическите размерности.

За простота в тази лекция сме избрали да работим в канонични координати (q, p) (т.е., $\{q, p\} = 1$), за които хамилтониана на хармоничния осцилатор приема вида $H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$. В частност, q и p имат еднаква размерност $[H\omega^{-1}]^{1/2} = \text{kg}^{1/2} \text{m s}^{-1/2}$. Връзката с q_{ph} и p_{ph} на материална точка с маса m е $q_{ph} = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} q$, $p_{ph} = \sqrt{m\omega} p$

Относно физическите размерности.

За простота в тази лекция сме избрали да работим в канонични координати (q, p) (т.е., $\{q, p\} = 1$), за които хамилтониана на хармоничния осцилатор приема вида $H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$. В частност, q и p имат еднаква размерност $= [H\omega^{-1}]^{1/2} = \text{kg}^{1/2} \text{m s}^{-1/2}$. Връзката с q_{ph} и p_{ph} на материална точка с маса m е $q_{ph} = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} q$, $p_{ph} = \sqrt{m\omega} p$ ($\{q_{ph}, p_{ph}\} = 1$).

Относно физическите размерности.

За простота в тази лекция сме избрали да работим в канонични координати (q, p) (т.е., $\{q, p\} = 1$), за които хамилтониана на хармоничния осцилатор приема вида $H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$. В частност, q и p имат еднаква размерност $= [H \omega^{-1}]^{1/2} = \text{kg}^{1/2} \text{m s}^{-1/2}$. Връзката с q_{ph} и p_{ph} на материална точка с маса m е $q_{ph} = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} q$, $p_{ph} = \sqrt{m\omega} p$ ($\{q_{ph}, p_{ph}\} = 1$). Тогава:

$$H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$$

Относно физическите размерности.

За простота в тази лекция сме избрали да работим в канонични координати (q, p) (т.е., $\{q, p\} = 1$), за които хамилтониана на хармоничния осцилатор приема вида $H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$. В частност, q и p имат еднаква размерност $= [H \omega^{-1}]^{1/2} = \text{kg}^{1/2} \text{m s}^{-1/2}$. Връзката с q_{ph} и p_{ph} на материална точка с маса m е $q_{ph} = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} q$, $p_{ph} = \sqrt{m\omega} p$ ($\{q_{ph}, p_{ph}\} = 1$). Тогава:

$$H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) = \frac{1}{2} m \omega^2 q_{ph}^2 + \frac{1}{2m} p_{ph}^2$$

Относно физическите размерности.

За простота в тази лекция сме избрали да работим в канонични координати (q, p) (т.е., $\{q, p\} = 1$), за които хамилтониана на хармоничния осцилатор приема вида $H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$. В частност, q и p имат еднаква размерност $= [H \omega^{-1}]^{1/2} = \text{kg}^{1/2} \text{m s}^{-1/2}$. Връзката с q_{ph} и p_{ph} на материална точка с маса m е $q_{ph} = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} q$, $p_{ph} = \sqrt{m\omega} p$ ($\{q_{ph}, p_{ph}\} = 1$). Тогава:

$$H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) = \frac{1}{2} m \omega^2 q_{ph}^2 + \underbrace{\frac{1}{2m} p_{ph}^2}_{\text{кинетична енергия}}$$

Относно физическите размерности.

За простота в тази лекция сме избрали да работим в канонични координати (q, p) (т.е., $\{q, p\} = 1$), за които хамилтониана на хармоничния осцилатор приема вида $H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$. В частност, q и p имат еднаква размерност $= [H \omega^{-1}]^{1/2} = \text{kg}^{1/2} \text{ m s}^{-1/2}$. Връзката с q_{ph} и p_{ph} на материална точка с маса m е $q_{ph} = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} q$, $p_{ph} = \sqrt{m\omega} p$ ($\{q_{ph}, p_{ph}\} = 1$). Тогава:

$$H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) = \underbrace{\frac{1}{2} m \omega^2 q_{ph}^2}_{\text{потенциална енергия}} + \underbrace{\frac{1}{2m} p_{ph}^2}_{\text{кинетична енергия}}$$

Относно физическите размерности.

За простота в тази лекция сме избрали да работим в канонични координати (q, p) (т.е., $\{q, p\} = 1$), за които хамилтониана на хармоничния осцилатор приема вида $H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$. В частност, q и p имат еднаква размерност $= [H \omega^{-1}]^{1/2} = \text{kg}^{1/2} \text{m s}^{-1/2}$. Връзката с q_{ph} и p_{ph} на материална точка с маса m е $q_{ph} = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} q$, $p_{ph} = \sqrt{m\omega} p$ ($\{q_{ph}, p_{ph}\} = 1$). Тогава:

$$H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) = \underbrace{\frac{1}{2} m \omega^2 q_{ph}^2}_{\text{потенциална енергия}} + \underbrace{\frac{1}{2m} p_{ph}^2}_{\text{кинетична енергия}},$$

$$\left| \begin{aligned} \dot{q}_{ph} &= \frac{1}{m} p_{ph} \\ \dot{p}_{ph} &= -\omega^2 m q_{ph} \end{aligned} \right.$$

Лекция 4/2013 - завършек

Б.2. Канонично квантуване на осцилатор

Една осцилаторна система приведена в каноничен вид се задава от хамилтониан, който е сума от **независими** едномерни осцилатори. Ето защо, в основата на задачата за квантуване на такива динамични системи стои задачата за един осцилатор.

Класическият хамилтониан е: $H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$

Уравненията за движение са: $\left| \begin{array}{l} \dot{q} = \omega p \\ \dot{p} = -\omega q \end{array} \right. \Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q.$

$$\Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q.$$

$\Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q$. Както за всяко линейно хомогенно обикновено диференциално уравнение, общото решение е сума на кои да е линейно независими частни решения, толкова на брой, колкото е редът на системата – в случая две.

$\Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q$. Както за всяко линейно хомогенно обикновено диференциално уравнение, общото решение е сума на кои да е линейно независими частни решения, толкова на брой, колкото е редът на системата - в случая две. Такива частни решения за уравнението $\ddot{q} = -\omega^2 q$ са

$$e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad e^{-i\omega t}$$

$\Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q$. Както за всяко линейно хомогенно обикновено диференциално уравнение, общото решение е сума на кои да е линейно независими частни решения, толкова на брой, колкото е редът на системата - в случая две. Такива частни решения за уравнението $\ddot{q} = -\omega^2 q$ са

$$e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad e^{-i\omega t}$$

И така, общото решение на $\ddot{q}(t) = -\omega^2 q(t)$ е:

$$q(t) = \frac{a^*}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} + \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t}.$$

$\Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q$. Общего решение е:

$$q(t) = \frac{a^*}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} + \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t}.$$

$\Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q$. Общото решение е:

$$q(t) = \frac{a^*}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} + \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t}.$$

Тук, **знаменателят $\sqrt{2}$ е избран за удобство**, а константите a и a^* са комплексни числа, които се оказват и комплексно спрегнати, поради условието за реалност на решението:

$$\overline{q(t)} = q(t) \quad (\forall t) \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = a^*.$$

$\Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q$. Общото решение е:

$$q(t) = \frac{a^*}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} + \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t}.$$

условието за реалност на решението:

$$\overline{q(t)} = q(t) \quad (\forall t) \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = a^*.$$

$\Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q$. Общото решение е:

$$q(t) = \frac{a^*}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} + \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t}.$$

условието за реалност на решението:

$$\overline{q(t)} = q(t) \quad (\forall t) \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = a^*.$$

Нека изразим a и a^* от началните условия:

$\Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q$. Общото решение е:

$$q(t) = \frac{a^*}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} + \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t}.$$

условието за реалност на решението:

$$\overline{q(t)} = q(t) \quad (\forall t) \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = a^*.$$

Нека изразим a и a^* от началните условия:

$$q_0 = q(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^*)$$

$\Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q$. Общото решение е:

$$q(t) = \frac{a^*}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} + \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t}.$$

условието за реалност на решението:

$$\overline{q(t)} = q(t) \quad (\forall t) \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = a^*.$$

Нека изразим a и a^* от началните условия:

$$\left| \begin{array}{l} q_0 = q(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^*) \\ p_0 = p(0) = \frac{1}{\omega} \dot{q}(0) \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q$. Общото решение е:

$$q(t) = \frac{a^*}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} + \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t}.$$

условието за реалност на решението:

$$\overline{q(t)} = q(t) \quad (\forall t) \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = a^*.$$

Нека изразим a и a^* от началните условия:

$$\left| \begin{array}{l} q_0 = q(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^*) \\ p_0 = p(0) = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \left(\frac{a^*}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} + \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0} \end{array} \right|$$

$\Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q$. Общото решение е:

$$q(t) = \frac{a^*}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} + \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t}.$$

условието за реалност на решението:

$$\overline{q(t)} = q(t) \quad (\forall t) \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = a^*.$$

Нека изразим a и a^* от началните условия:

$$\left| \begin{array}{l} q_0 = q(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^*) \\ p_0 = p(0) = \frac{i}{\sqrt{2}} (a^* - a) \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q$. Общото решение е:

$$q(t) = \frac{a^*}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} + \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t}.$$

условието за реалност на решението:

$$\overline{q(t)} = q(t) \quad (\forall t) \quad \Rightarrow \quad \overline{a} = a^*.$$

Нека изразим a и a^* от началните условия:

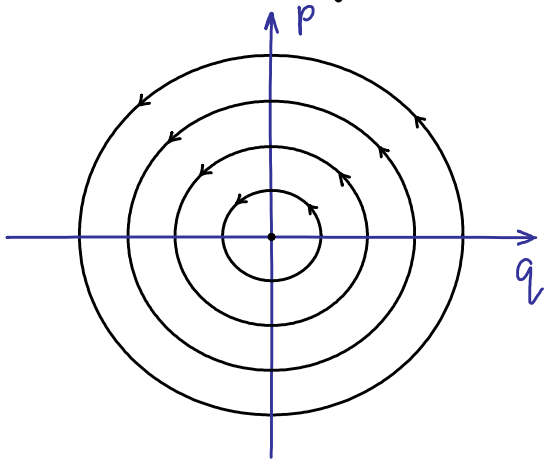
$$\left| \begin{array}{l} q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^*) \\ p_0 = \frac{i}{\sqrt{2}} (a^* - a) \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} a = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_0 + i p_0) \\ a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_0 - i p_0) \end{array} \right.$$

Общого решение приговдива вида :

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + p_0 \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \\ &= q_0 \cos \omega t + p_0 \sin \omega t. \end{aligned}$$

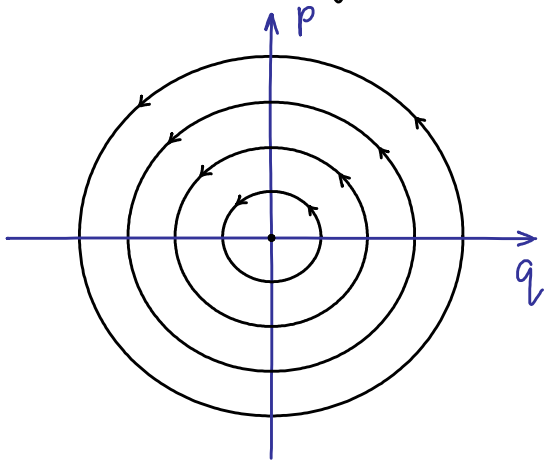
$$p(t) = \frac{1}{\omega} \dot{q}(t) = -q_0 \sin \omega t + p_0 \cos \omega t$$

Така, възпроизведохме заявената вече картина на фазов портрет:



$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

Така, възпроизведохме заявената вече картина на фазов портрет:

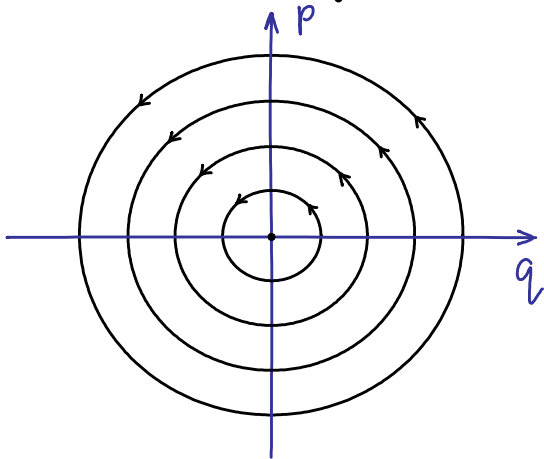


$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

Движението е периодично, с период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Така, възпроизведохме заявената вече картина на фазов портрет:



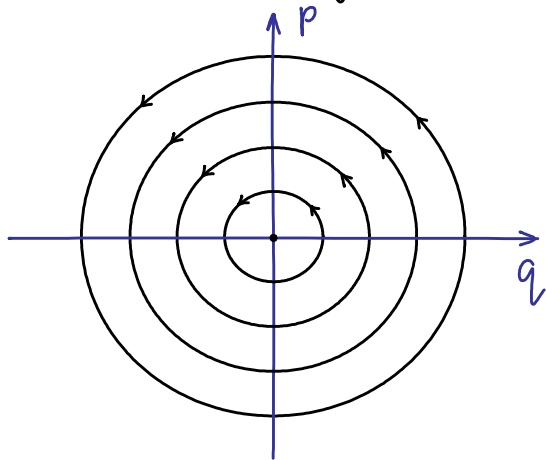
$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

Движението е периодично, с период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} . \text{ Честотата е}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} .$$

Така, възпроизведохме заявената вече картина на фазов портрет:



$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

Движението е периодично, с период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Честотата е

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Заради допълнителния множител от 2π , параметърът $\omega = 2\pi \nu$ е прието да се нарича **кръгова честота**.

Нека вземем връзката $(a, a^*) \longleftrightarrow (q, p)$ изведена по-горе и да я разгледаме като една комплексна линейна смяна на координатите:

$$\left| \begin{array}{l} q = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^*) \\ p = \frac{i}{\sqrt{2}} (a^* - a) \end{array} \right. \longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = \frac{1}{\sqrt{2}} (q + i p) \\ a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (q - i p) \end{array} \right.$$

Нека вземем връзката $(a, a^*) \longleftrightarrow (q, p)$ изведена по-горе и да я разгледаме като една комплексна линейна смяна на координатите:

$$\left| \begin{array}{l} q = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^*) \\ p = \frac{i}{\sqrt{2}} (a^* - a) \end{array} \right. \longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = \frac{1}{\sqrt{2}} (q + i p) \\ a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (q - i p) \end{array} \right.$$

Да пресметнем хамилтониана в новите координати. За да са валидни пресмятанията ни и в квантовия случай няма да променяме реда при произведения:

Да пресметнем хамилтониана в новите координати. За да са валидни пресмятанията ни и в квантовия случай няма да променяме реда при произведения:

Да пресметнем хамилтониана в новите координати. За да са валидни пресмятанията ни и в квантовия случай няма да променяме реда при произведения:

$$H = \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$$

Да пресметнем хамилтониана в новите координати. За да са валидни пресмятанията ни и в квантовия случай няма да променяме реда при произведения:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) \\ &= \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{2} (a + a^*)^2 - \frac{1}{2} (a^* - a)^2 \right) \end{aligned}$$

Да пресметнем хамилтониана в новите координати. За да са валидни пресмятанията ни и в квантовия случай няма да променяме реда при произведения:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) \\
 &= \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{2} (a + a^*)^2 - \frac{1}{2} (a^* - a)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{4} \omega \left(\cancel{a^2} + \cancel{(a^*)^2} + a a^* + a^* a \right. \\
 &\quad \left. - \cancel{a^2} - \cancel{(a^*)^2} + a a^* + a^* a \right)
 \end{aligned}$$

Да пресметнем хамилтониана в новите координати. За да са валидни пресмятанията ни и в квантовия случай няма да променяме реда при произведения:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) \\
 &= \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{2} (a + a^*)^2 - \frac{1}{2} (a^* - a)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{4} \omega \left(\cancel{a^2} + \cancel{(a^*)^2} + a a^* + a^* a \right. \\
 &\quad \left. - \cancel{a^2} - \cancel{(a^*)^2} + a a^* + a^* a \right)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H = \omega \frac{a a^* + a^* a}{2} .$$

Нека пресметнем скобките на Поасон на новите координати:

Нека пресметнем скобите на Пуасон на новите координати:

$$\{a, a^*\} = \frac{1}{2} \{q + ip, q - ip\} = i \{p, q\} = i,$$

Нека пресметнем скобките на Пуасон на новите координати:

$$\{a, a^*\} = \frac{1}{2} \{q + ip, q - ip\} = i \{p, q\} = i,$$

$$\text{т.е. } \frac{1}{i} \{a, a^*\} = 1.$$

Нека пресметнем скобките на Пуасон на новите координати:

$$\{a, a^*\} = \frac{1}{2} \{q + ip, q - ip\} = i \{p, q\} = i,$$

$$\text{т.е. } \frac{1}{i} \{a, a^*\} = 1.$$

$$\text{И разбира се, } \{a, a\} = 0 = \{a^*, a^*\}$$

Нека пресметнем скобите на Поасон на новите координати:

$$\{a, a^*\} = \frac{1}{2} \{q + ip, q - ip\} = i \{p, q\} = i,$$

т.е. $\frac{1}{i} \{a, a^*\} = 1$.

И разбира се, $\{a, a\} = 0 = \{a^*, a^*\}$: поради антисиметрията на скобката на Поасон:

$$\{f, f\} = - \overset{\curvearrowright}{\{f, f\}} = 0$$

за всяка функция f .

Скобки на Пуассон с хамильтониана :

$$\{a, H\} =$$

Скобки на Пуассон с хамильтониана :

$$\{a, H\} = \frac{\omega}{2} \{a, aa^* + a^*a\} =$$

Скобки на Пуассон с гамильтониана :

$$\begin{aligned} \{a, H\} &= \frac{\omega}{2} \{a, aa^* + a^*a\} = \\ &= \frac{\omega}{2} \left(\cancel{\{a, a\}} a^* + a \{a, a^*\} + a^* \cancel{\{a, a\}} + \{a, a^*\} a \right) \end{aligned}$$

Скобки на Пуассон с хамильтониана :

$$\begin{aligned}
 \{a, H\} &= \frac{\omega}{2} \{a, aa^* + a^*a\} = \\
 &= \frac{\omega}{2} \left(\cancel{\{a, a\}} a^* + a \{a, a^*\} + a^* \cancel{\{a, a\}} + \{a, a^*\} a \right) \\
 &= i\omega a.
 \end{aligned}$$

Скобки на Поасон с хамилтониана :

$$\begin{aligned}
 \{a, H\} &= \frac{\omega}{2} \{a, aa^* + a^*a\} = \\
 &= \frac{\omega}{2} \left(\cancel{\{a, a\}} a^* + a \{a, a^*\} + a^* \cancel{\{a, a\}} + \{a, a^*\} a \right) \\
 &= i\omega a.
 \end{aligned}$$

И така, $\frac{1}{i} \{a, H\} = +\omega a$, $\frac{1}{i} \{a^*, H\} = -\omega a^*$
 (второто се получава аналогично).

Да преминем към квантуване :

Да преминем към квантуване :

$$\frac{\hbar}{i} \underbrace{\{A, B\}}$$

скобката на Поасон

Да преминем към квантуване :

$$\frac{\hbar}{i} \underbrace{\{A, B\}}$$

$$\mapsto$$

скобката на Пуасон

преминава в

Да преминем към квантуване :

$$\frac{\hbar}{i} \underbrace{\{A, B\}}$$

скобката на Поасон

$$\mapsto$$

преминава в

$$[\hat{A}, \hat{B}]$$

комутатор

Да преминем към квантуване :

$$\frac{\hbar}{i} \underbrace{\{A, B\}}$$

$$\mapsto$$

$$[\hat{A}, \hat{B}]$$

скобката на Пуасон

преминава в

комутатор

като ще положим $\hbar = 1$.

Да преминем към квантуване :

$$\frac{\hbar}{i} \underbrace{\{A, B\}} \quad \longmapsto \quad [\hat{A}, \hat{B}]$$

скобката на Пуасон преминава в комутатор

като ще положим $\hbar = 1$.

И така, в система от единици, в която $\hbar = 1$ резултата за квантуване изглежда така

$$\frac{1}{i} \{A, B\} \quad \longmapsto \quad [\hat{A}, \hat{B}]$$

Следователно, класическите съотношения, които изведохме до тук се трансформират в :

Следователно, класическите съотношения, които изведохме до тук се трансформират в :

$$[\hat{q}, \hat{p}] \equiv \hat{q} \cdot \hat{p} - \hat{p} \cdot \hat{q} = i ,$$

Следователно, класическите съотношения, които изведохме до тук се трансформират в :

$$[\hat{q}, \hat{p}] \equiv \hat{q} \cdot \hat{p} - \hat{p} \cdot \hat{q} = i ,$$

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2} (\hat{q}^2 + \hat{p}^2)$$

Следователно, класическите съотношения, които изведохме до тук се трансформират в :

$$[\hat{q}, \hat{p}] \equiv \hat{q} \cdot \hat{p} - \hat{p} \cdot \hat{q} = i ,$$

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2} (\hat{q}^2 + \hat{p}^2)$$

$$\left| \begin{array}{l} \hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^*) \\ \hat{p} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{a}^* - \hat{a}) \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q} + i \hat{p}) \\ \hat{a}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q} - i \hat{p}) \end{array} \right.$$

$$\hat{H} = \omega \frac{\hat{a} \hat{a}^* + \hat{a}^* \hat{a}}{2}$$

$$\hat{H} = \omega \frac{\hat{a} \hat{a}^* + \hat{a}^* \hat{a}}{2} ,$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^*] \equiv \hat{a} \hat{a}^* - \hat{a}^* \hat{a} = 1$$

$$\hat{H} = \omega \frac{\hat{a} \hat{a}^* + \hat{a}^* \hat{a}}{2} ,$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^*] \equiv \hat{a} \hat{a}^* - \hat{a}^* \hat{a} = 1 ,$$

$$[\hat{a}, \hat{H}] \equiv \hat{a} \hat{H} - \hat{H} \hat{a} = +\omega \hat{a}$$

$$\hat{H} = \omega \frac{\hat{a} \hat{a}^* + \hat{a}^* \hat{a}}{2} ,$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^*] \equiv \hat{a} \hat{a}^* - \hat{a}^* \hat{a} = 1 ,$$

$$[\hat{a}, \hat{H}] \equiv \hat{a} \hat{H} - \hat{H} \hat{a} = +\omega \hat{a} ,$$

$$[\hat{a}^*, \hat{H}] \equiv \hat{a}^* \hat{H} - \hat{H} \hat{a}^* = -\omega \hat{a}^*$$

$$\hat{H} = \omega \frac{\hat{a} \hat{a}^* + \hat{a}^* \hat{a}}{2} ,$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^*] \equiv \hat{a} \hat{a}^* - \hat{a}^* \hat{a} = 1 ,$$

$$[\hat{a}, \hat{H}] \equiv \hat{a} \hat{H} - \hat{H} \hat{a} = +\omega \hat{a} ,$$

$$[\hat{a}^*, \hat{H}] \equiv \hat{a}^* \hat{H} - \hat{H} \hat{a}^* = -\omega \hat{a}^* .$$

Нещо повече, обръщаме внимание, че горните формули са съгласувани помежду си

$$\hat{H} = \omega \frac{\hat{a} \hat{a}^* + \hat{a}^* \hat{a}}{2} ,$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^*] \equiv \hat{a} \hat{a}^* - \hat{a}^* \hat{a} = 1 ,$$

$$[\hat{a}, \hat{H}] \equiv \hat{a} \hat{H} - \hat{H} \hat{a} = +\omega \hat{a} ,$$

$$[\hat{a}^*, \hat{H}] \equiv \hat{a}^* \hat{H} - \hat{H} \hat{a}^* = -\omega \hat{a}^* .$$

Нещо повече, обръщаме внимание, че горните формули са съгласувани помежду си: ние ги извеждахме в класическия случай, като използвахме само алгебрични правила валидни и в квантовия случай!

$$\hat{H} = \omega \frac{\hat{a} \hat{a}^* + \hat{a}^* \hat{a}}{2} ,$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^*] \equiv \hat{a} \hat{a}^* - \hat{a}^* \hat{a} = 1 ,$$

$$[\hat{a}, \hat{H}] \equiv \hat{a} \hat{H} - \hat{H} \hat{a} = +\omega \hat{a} ,$$

$$[\hat{a}^*, \hat{H}] \equiv \hat{a}^* \hat{H} - \hat{H} \hat{a}^* = -\omega \hat{a}^* .$$

Обръщаме внимание, че $\hat{q}^* = \hat{q}$ и $\hat{p}^* = \hat{p}$
 - самоспрегнати оператори, като представлящи наблюдаеми

$$\hat{H} = \omega \frac{\hat{a} \hat{a}^* + \hat{a}^* \hat{a}}{2} ,$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^*] \equiv \hat{a} \hat{a}^* - \hat{a}^* \hat{a} = 1 ,$$

$$[\hat{a}, \hat{H}] \equiv \hat{a} \hat{H} - \hat{H} \hat{a} = +\omega \hat{a} ,$$

$$[\hat{a}^*, \hat{H}] \equiv \hat{a}^* \hat{H} - \hat{H} \hat{a}^* = -\omega \hat{a}^* .$$

Обръщаме внимание, че $\hat{q}^* = \hat{q}$ и $\hat{p}^* = \hat{p}$
 - самоспрежнати оператори, като представлящи наблюдаеми
 и също $\hat{a}^*$ е ермитово спрежнатия оператор на $\hat{a}$.

Така, $\hat{H} = \frac{\omega}{2} (\hat{q}^2 + \hat{p}^2)$ е явно неотрицателен оператор и следователно, неговия спектър ще се съдържа в интервала $[0, \infty)$.

Така, $\hat{H} = \frac{\omega}{2} (\hat{q}^2 + \hat{p}^2)$ е явно неотрицателен оператор и следователно, неговия спектър ще се съдържа в интервала $[0, \infty)$. Сега ще направим едно предположение, което по-късно ще обосноваем:

Така, $\hat{H} = \frac{\omega}{2} (\hat{q}^2 + \hat{p}^2)$ е явно неотрицателен оператор и следователно, неговия спектър ще се съдържа в интервала $[0, \infty)$. Сега ще направим едно предположение, което по-късно ще обосноваем: в Хилбертовото пространство на състоянията $\mathcal{H}$ съществува вектор (на състояние) $\Omega \in \mathcal{H}$, който е собствен за $\hat{H}$ с най-малка собствена стойност.

Така, $\hat{H} = \frac{\omega}{2} (\hat{q}^2 + \hat{p}^2)$ е явно неотрицателен оператор и следователно, неговия спектър ще се съдържа в интервала $[0, \infty)$. Сега ще направим едно предположение, което по-късно ще обосноваем: в Хилбертовото пространство на състоянията $\mathcal{H}$ съществува вектор (на състояние) $\Omega \in \mathcal{H}$, който е собствен за $\hat{H}$ с най-малка собствена стойност.

На основа на това предположение, ние ще изведем следната:

Теорема.

Теорема. Нека $\Omega_n := (\hat{a}^*)^n \Omega \in \mathcal{H}$, за $n = 1, 2, \dots$
 $\Omega_0 := \Omega$.

Теорема. Нека $\Omega_n := (\hat{a}^*)^n \Omega \in \mathcal{H}$, за $n = 1, 2, \dots$
 $\Omega_0 := \Omega$.

Тогав $\|\Omega_n\| = \sqrt{n!} > 0$ и:

Теорема. Нека $\Omega_n := (\hat{a}^*)^n \Omega \in \mathcal{H}$, за $n = 1, 2, \dots$
 $\Omega_0 := \Omega$.

Тогав $\|\Omega_n\| = \sqrt{n!} > 0$ и:

$$\hat{H} \Omega_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \cdot \Omega_n,$$

Теорема. Нека $\Omega_n := (\hat{a}^*)^n \Omega \in \mathcal{H}$, за $n = 1, 2, \dots$
 $\Omega_0 := \Omega$.

Тогатва $\|\Omega_n\| = \sqrt{n!} > 0$ и:

$$\hat{H} \Omega_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \cdot \Omega_n,$$

$$\hat{a} \Omega_n = n \Omega_{n-1} \quad \text{за } n = 1, 2, \dots,$$

Теорема. Нека $\Omega_n := (\hat{a}^*)^n \Omega \in \mathcal{H}$, за $n = 1, 2, \dots$
 $\Omega_0 := \Omega$.

Тогав $\|\Omega_n\| = \sqrt{n!} > 0$ и:

$$\hat{H} \Omega_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \cdot \Omega_n,$$

$$\hat{a} \Omega_n = n \Omega_{n-1} \quad \text{за } n = 1, 2, \dots,$$

$$\hat{a} \Omega_0 = 0.$$

Теорема. Нека $\Omega_n := (\hat{a}^*)^n \Omega \in \mathcal{H}$, за $n = 1, 2, \dots$
 $\Omega_0 := \Omega$.

Тогава $\|\Omega_n\| = \sqrt{n!} > 0$ и:

$$\hat{H} \Omega_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \cdot \Omega_n,$$

$$\hat{a} \Omega_n = n \Omega_{n-1} \quad \text{за } n = 1, 2, \dots,$$

$$\hat{a} \Omega_0 = 0.$$

С други думи, Ω_n са собствени вектори на $\hat{H}$ със собствени стойности $(n + \frac{1}{2})\omega$.

Лема. Ако B е **линеен** оператор в $\mathcal{H}$

Лема. Ако B е **линеен** оператор в $\mathcal{H}$, ϕ е собствен вектор на B ,

$$B\phi = b \cdot \phi$$

Лема. Ако B е **линеен** оператор в $\mathcal{H}$, ϕ е собствен вектор на B ,

$$B\phi = b \cdot \phi$$

и A е друг линеен оператор в $\mathcal{H}$ такъв, че

$$[A, B] = \beta \cdot A$$

Лема. Ако B е **линеен** оператор в $\mathcal{H}$, ϕ е собствен вектор на B ,

$$B\phi = b \cdot \phi$$

и A е друг линеен оператор в $\mathcal{H}$ такъв, че

$$[A, B] = \beta \cdot A,$$

то векторът $\phi' = A\phi$ ще изпълнява равенството

$$B\phi' = b' \cdot \phi \quad \text{за} \quad b' = b - \beta.$$

Лема. Ако B е **линеен** оператор в $\mathcal{H}$, ϕ е собствен вектор на B ,

$$B\phi = b \cdot \phi$$

и A е друг линеен оператор в $\mathcal{H}$ такъв, че

$$[A, B] = \beta \cdot A,$$

то векторът $\phi' = A\phi$ ще изпълнява равенството

$$B\phi' = b' \cdot \phi \quad \text{за} \quad b' = b - \beta.$$

В частност, ако $\phi' \neq 0$, то ϕ' е отново собствен вектор на B .

Лема. Ако B е **линеен** оператор в $\mathcal{H}$, ϕ е собствен вектор на B ,

$$B\phi = b \cdot \phi$$

и A е друг линеен оператор в $\mathcal{H}$ такъв, че

$$[A, B] = \beta \cdot A,$$

то векторът $\phi' = A\phi$ ще изпълнява равенството

$$B\phi' = b' \cdot \phi \quad \text{за} \quad b' = b - \beta.$$

В частност, ако $\phi' \neq 0$, то ϕ' е отново собствен вектор на B .

Доказателство. $B(A\phi) = AB\phi - [A, B]\phi$

Лема. Ако B е **линеен** оператор в $\mathcal{H}$, ϕ е собствен вектор на B ,

$$B\phi = b \cdot \phi$$

и A е друг линеен оператор в $\mathcal{H}$ такъв, че

$$[A, B] = \beta \cdot A,$$

то векторът $\phi' = A\phi$ ще изпълнява равенството

$$B\phi' = b' \cdot \phi \quad \text{за} \quad b' = b - \beta.$$

В частност, ако $\phi' \neq 0$, то ϕ' е отново собствен вектор на B .

Доказателство.

$$\begin{aligned} B(A\phi) &= AB\phi - [A, B]\phi \\ &= Ab\phi - \beta \cdot A\phi \end{aligned}$$

Лема. Ако B е **линеен** оператор в $\mathcal{H}$, ϕ е собствен вектор на B ,

$$B\phi = b \cdot \phi$$

и A е друг линеен оператор в $\mathcal{H}$ такъв, че

$$[A, B] = \beta \cdot A,$$

то векторът $\phi' = A\phi$ ще изпълнява равенството

$$B\phi' = b' \cdot \phi \quad \text{за} \quad b' = b - \beta.$$

В частност, ако $\phi' \neq 0$, то ϕ' е отново собствен вектор на B .

Доказателство.

$$\begin{aligned} B(A\phi) &= AB\phi - [A, B]\phi \\ &= Ab\phi - \beta \cdot A\phi = (b - \beta)(A\phi). \quad \square \end{aligned}$$

Забележка. Такива оператори A често се конструират в теория на представенията (на алгебри на $\mathcal{L}_n$) и носят името повишаващи / понижаващи оператори, в зависимост от това дали $\beta < 0$ / $\beta > 0$. Причината за това е, че "обхождат" спектъра на B .

Доказателство на теоремата.

а) Защо $\hat{a} \Omega = 0$?

Доказателство на теоремата.

а) Защо $\hat{a} \Omega = 0$? Ако $\hat{H} \Omega = E_0 \Omega$

Доказателство на теоремата.

а) Защо $\hat{a} \Omega = 0$? Ако $\hat{H} \Omega = \epsilon_0 \Omega$, то според лемата (понеже $[\hat{a}, \hat{H}] = \hat{a}$) $\hat{a} \Omega$ би бил собствен вектор със собствена стойност $\epsilon_0 - 1$, което противоречи на минималността при избора на Ω .

Доказателство на теоремата.

а) Защо $\hat{a} \Omega = 0$? Ако $\hat{H} \Omega = \epsilon_0 \Omega$, то според лемата (понеже $[\hat{a}, \hat{H}] = \hat{a}$) $\hat{a} \Omega$ би бил собствен вектор със собствена стойност $\epsilon_0 - 1$, което противоречи на минималността при избора на Ω . $\Rightarrow \hat{a} \Omega = 0$.

Доказателство на теоремата.

а) Защо $\hat{a} \Omega = 0$? Ако $\hat{H} \Omega = \epsilon_0 \Omega$, то според лемата (понеже $[\hat{a}, \hat{H}] = \hat{a}$) $\hat{a} \Omega$ би бил собствен вектор със собствена стойност $\epsilon_0 - 1$, което противоречи на минималността при избора на Ω . $\Rightarrow \hat{a} \Omega = 0$.

б) Защо $\hat{H} \Omega = \frac{\omega}{2} \Omega$?

Доказателство на теоремата.

а) Защо $\hat{a} \Omega = 0$? Ако $\hat{H} \Omega = \varepsilon_0 \Omega$, то според лемата (понеже $[\hat{a}, \hat{H}] = \hat{a}$) $\hat{a} \Omega$ би бил собствен вектор със собствена стойност $\varepsilon_0 - 1$, което противоречи на минималността при избора на Ω . $\Rightarrow \hat{a} \Omega = 0$.

б) Защо $\hat{H} \Omega = \frac{\omega}{2} \Omega$? $\hat{H} \Omega = \frac{1}{2} \omega (\hat{a} \hat{a}^* + \hat{a}^* \hat{a}) \Omega$

Доказателство на теоремата.

а) Защо $\hat{a} \Omega = 0$? Ако $\hat{H} \Omega = \varepsilon_0 \Omega$, то според лемата (понеже $[\hat{a}, \hat{H}] = \hat{a}$) $\hat{a} \Omega$ би бил собствен вектор със собствена стойност $\varepsilon_0 - 1$, което противоречи на минималността при избора на Ω . $\Rightarrow \hat{a} \Omega = 0$.

$$\begin{aligned} \text{б) Защо } \hat{H} \Omega &= \frac{\omega}{2} \Omega? \quad \hat{H} \Omega = \frac{1}{2} \omega (\hat{a} \hat{a}^* + \hat{a}^* \hat{a}) \Omega \\ &= \frac{1}{2} \omega \left(\underbrace{(\hat{a} \hat{a}^* - \hat{a}^* \hat{a})}_1 + 2 \hat{a}^* \hat{a} \right) \Omega \end{aligned}$$

Доказателство на теоремата.

а) Защо $\hat{a} \Omega = 0$? Ако $\hat{H} \Omega = \varepsilon_0 \Omega$, то според лемата (понеже $[\hat{a}, \hat{H}] = \hat{a}$) $\hat{a} \Omega$ би бил собствен вектор със собствена стойност $\varepsilon_0 - 1$, което противоречи на минималността при избора на Ω . $\Rightarrow \hat{a} \Omega = 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{б) Защо } \hat{H} \Omega &= \frac{\omega}{2} \Omega? \quad \hat{H} \Omega = \frac{1}{2} \omega (\hat{a} \hat{a}^* + \hat{a}^* \hat{a}) \Omega \\
 &= \frac{1}{2} \omega \left(\underbrace{(\hat{a} \hat{a}^* - \hat{a}^* \hat{a})}_1 + 2 \hat{a}^* \hat{a} \right) \Omega = \frac{1}{2} \omega \cdot \Omega + \hat{a}^* \underbrace{\hat{a} \Omega}_0
 \end{aligned}$$

Доказателство на теоремата.

а) Защо $\hat{a} \Omega = 0$? Ако $\hat{H} \Omega = \varepsilon_0 \Omega$, то според лемата (понеже $[\hat{a}, \hat{H}] = \hat{a}$) $\hat{a} \Omega$ би бил собствен вектор със собствена стойност $\varepsilon_0 - 1$, което противоречи на минималността при избора на Ω . $\Rightarrow \hat{a} \Omega = 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{б) Защо } \hat{H} \Omega &= \frac{\omega}{2} \Omega? \quad \hat{H} \Omega = \frac{1}{2} \omega (\hat{a} \hat{a}^* + \hat{a}^* \hat{a}) \Omega \\
 &= \frac{1}{2} \omega \left(\underbrace{(\hat{a} \hat{a}^* - \hat{a}^* \hat{a})}_1 + 2 \hat{a}^* \hat{a} \right) \Omega = \frac{1}{2} \omega \cdot \Omega + \hat{a}^* \underbrace{\hat{a} \Omega}_0 \\
 &= \frac{1}{2} \omega \cdot \Omega.
 \end{aligned}$$

в) Равновесного $\hat{H} \Omega_n = (n + \frac{1}{2}) \omega \cdot \Omega_n$ следва с индукция по n от лемата и формулите:

$$\Omega_n = \hat{a}^* \Omega_{n-1} \quad \text{и} \quad [\hat{a}^*, \hat{H}] = -\omega \hat{a}^*.$$

в) Равновесного $\hat{H} \Omega_n = (n + \frac{1}{2}) \omega \cdot \Omega_n$ следва с индукция по n от лемата и формулите:

$$\Omega_n = \hat{a}^* \Omega_{n-1} \quad \text{и} \quad [\hat{a}^*, \hat{H}] = -\omega \hat{a}^*.$$

2) В сила са формулите:

$$\hat{H} = \left(\hat{a}^* \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \omega, \quad \hat{H} = \left(\hat{a} \hat{a}^* - \frac{1}{2} \right) \omega,$$

$$(\hat{a}^* \hat{a}) \Omega_n = n \omega \cdot \Omega_n,$$

$$(\hat{a} \hat{a}^*) \Omega_n = (n+1) \omega \cdot \Omega_n.$$

2) В сила са формулите:

$$\hat{H} = \left(\hat{a}^* \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \omega, \quad \hat{H} = \left(\hat{a} \hat{a}^* - \frac{1}{2} \right) \omega,$$

$$(\hat{a}^* \hat{a}) \Omega_n = n \omega \cdot \Omega_n,$$

$$(\hat{a} \hat{a}^*) \Omega_n = (n+1) \omega \cdot \Omega_n.$$

2) В сила са формулите:

$$\hat{H} = \left(\hat{a}^* \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \omega, \quad \hat{H} = \left(\hat{a} \hat{a}^* - \frac{1}{2} \right) \omega,$$

$$(\hat{a}^* \hat{a}) \Omega_n = n \omega \cdot \Omega_n,$$

$$(\hat{a} \hat{a}^*) \Omega_n = (n+1) \omega \cdot \Omega_n.$$

Наистина, първите две се извеждат, както в а), а вторите две следват от първите и точка в).

g) Защо $\|\Omega_n\| = \sqrt{n!}$?

g) Защо $\|\Omega_n\| = \sqrt{n!}$? $\|\Omega_n\|^2 = \langle \Omega_n | \Omega_n \rangle =$

$$\begin{aligned} g) \text{ Защо } \|\Omega_n\| &= \sqrt{n!} \quad ? \quad \|\Omega_n\|^2 = \langle \Omega_n | \Omega_n \rangle = \\ &= \langle \hat{a}^* \Omega_{n-1} | \hat{a}^* \Omega_{n-1} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g) \text{ Защо } \|\Omega_n\| &= \sqrt{n!} \quad ? \quad \|\Omega_n\|^2 = \langle \Omega_n | \Omega_n \rangle = \\ &= \langle \hat{a}^* \Omega_{n-1} | \hat{a}^* \Omega_{n-1} \rangle = \langle \Omega_{n-1} | (\hat{a} \hat{a}^*) \Omega_{n-1} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g) \text{ Защо } \|\Omega_n\| &= \sqrt{n!} \quad ? \quad \|\Omega_n\|^2 = \langle \Omega_n | \Omega_n \rangle = \\
 &= \langle \hat{a}^* \Omega_{n-1} | \hat{a}^* \Omega_{n-1} \rangle = \langle \Omega_{n-1} | (\hat{a} \hat{a}^*) \Omega_{n-1} \rangle \\
 &= n \langle \Omega_{n-1} | \Omega_{n-1} \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g) \text{ Защо } \|\Omega_n\| &= \sqrt{n!} \quad ? \quad \|\Omega_n\|^2 = \langle \Omega_n | \Omega_n \rangle = \\
 &= \langle \hat{a}^* \Omega_{n-1} | \hat{a}^* \Omega_{n-1} \rangle = \langle \Omega_{n-1} | (\hat{a} \hat{a}^*) \Omega_{n-1} \rangle \\
 &= n \langle \Omega_{n-1} | \Omega_{n-1} \rangle = n(n-1)!
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g) \text{ Защо } \|\Omega_n\| &= \sqrt{n!} \quad ? \quad \|\Omega_n\|^2 = \langle \Omega_n | \Omega_n \rangle = \\ &= \langle \hat{a}^* \Omega_{n-1} | \hat{a}^* \Omega_{n-1} \rangle = \langle \Omega_{n-1} | (\hat{a} \hat{a}^*) \Omega_{n-1} \rangle \\ &= n \langle \Omega_{n-1} | \Omega_{n-1} \rangle = n (n-1)! = n! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g) \text{ Защо } \|\Omega_n\| &= \sqrt{n!} \quad ? \quad \|\Omega_n\|^2 = \langle \Omega_n | \Omega_n \rangle = \\
 &= \langle \hat{a}^* \Omega_{n-1} | \hat{a}^* \Omega_{n-1} \rangle = \langle \Omega_{n-1} | (\hat{a} \hat{a}^*) \Omega_{n-1} \rangle \\
 &= n \langle \Omega_{n-1} | \Omega_{n-1} \rangle = n (n-1)! = n!
 \end{aligned}$$

- с индукция по n .

$$\begin{aligned}
 g) \text{ Защо } \|\Omega_n\| &= \sqrt{n!} \quad ? \quad \|\Omega_n\|^2 = \langle \Omega_n | \Omega_n \rangle = \\
 &= \langle \hat{a}^* \Omega_{n-1} | \hat{a}^* \Omega_{n-1} \rangle = \langle \Omega_{n-1} | (\hat{a} \hat{a}^*) \Omega_{n-1} \rangle \\
 &= n \langle \Omega_{n-1} | \Omega_{n-1} \rangle = n (n-1)! = n!
 \end{aligned}$$

- с индукция по n .

$$e) \text{ Равенството } \hat{a} \Omega_n = n \Omega_{n-1} \quad ?$$

$$\begin{aligned}
 \text{г) Защо } \|\Omega_n\| &= \sqrt{n!} \quad ? \quad \|\Omega_n\|^2 = \langle \Omega_n | \Omega_n \rangle = \\
 &= \langle \hat{a}^* \Omega_{n-1} | \hat{a}^* \Omega_{n-1} \rangle = \langle \Omega_{n-1} | (\hat{a} \hat{a}^*) \Omega_{n-1} \rangle \\
 &= n \langle \Omega_{n-1} | \Omega_{n-1} \rangle = n (n-1)! = n!
 \end{aligned}$$

- с индукция по n .

$$\text{е) Равенството } \hat{a} \Omega_n = n \Omega_{n-1} \quad ?$$

$$\hat{a} \Omega_n = \hat{a} \hat{a}^* \Omega_{n-1} = n \Omega_{n-1}.$$

□

Първите две точки на Лекция 5/2013

1. Математическо допълнение:
диагонализируеми и ермитови оператори в
пред-Хилбертови пространства

2. Означения на Дирак (Dirac)

са в по-голямата си част преподадени. Препоръчва се да бъдат прегледани !

3. Система от квантови хармонични осцилатори

3. Система от квантови хармонични осцилатори

В система от единици, в която $\hbar = 1$, каноничните комутиационни соотношения и хамилтонът на система от независими, хармонични квантови осцилатори се записват съответно като :

3. Система от квантови хармонични осцилатори

В система от единици, в която $\hbar = 1$, каноничните комутационни соотношения и хамилтониът на система от независими, хармонични квантови осцилатори се записват съответно като :

$$\left. \begin{aligned} [\hat{q}_j, \hat{p}_k] &= i \delta_{j,k} \cdot \hat{1} \\ [\hat{q}_j, \hat{q}_k] &= 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k], \\ \hat{q}_j^* &= \hat{q}_j, \quad \hat{p}_j^* = \hat{p}_j, \quad j, k = 1, \dots, s, \end{aligned} \right\} \quad (q, p - CCR)$$

3. Система от квантови хармонични осцилатори

В система от единици, в която $\hbar = 1$, каноничните комутационни соотношения и хамилтониът на система от независими, хармонични квантови осцилатори се записват съответно като :

$$\left. \begin{aligned} [\hat{q}_j, \hat{p}_k] &= i \delta_{j,k} \cdot \hat{1} \\ [\hat{q}_j, \hat{q}_k] &= 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k], \\ \hat{q}_j^* &= \hat{q}_j, \quad \hat{p}_j^* = \hat{p}_j, \quad j, k = 1, \dots, s, \end{aligned} \right\} \quad (q\text{p-CCR})$$

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^s \frac{\omega_j}{2} (\hat{q}_j^2 + \hat{p}_j^2). \quad (H\text{-qp})$$

При прехода:
$$\begin{cases} \hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j + i \hat{p}_j) \\ \hat{a}_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j - i \hat{p}_j) \end{cases}, \quad j = 1, \dots, s \quad (qp - aa^*)$$

имаме:

При переходе:
$$\begin{cases} \hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j + i \hat{p}_j) \\ \hat{a}_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j - i \hat{p}_j) \end{cases}, \quad j = 1, \dots, s \quad (qp - aa^*)$$

имее: $(qp - CCR)$

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i \delta_{j,k} \cdot \hat{1}$$

$$[\hat{q}_j, \hat{q}_k] = 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k],$$

$$\hat{q}_j^* = \hat{q}_j, \quad \hat{p}_j^* = \hat{p}_j, \quad j, k = 1, \dots, s$$

При переходе:
$$\begin{cases} \hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j + i \hat{p}_j) \\ \hat{a}_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j - i \hat{p}_j) \end{cases}, \quad j = 1, \dots, s \quad (qp - aa^*)$$

имее: $(qp - CCR) \iff$

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i \delta_{j,k} \cdot \hat{1}$$

$$[\hat{q}_j, \hat{q}_k] = 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k],$$

$$\hat{q}_j^* = \hat{q}_j, \quad \hat{p}_j^* = \hat{p}_j, \quad j, k = 1, \dots, s,$$

При прехода:
$$\begin{cases} \hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j + i \hat{p}_j) \\ \hat{a}_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j - i \hat{p}_j) \end{cases}, \quad j=1, \dots, s \quad (qp-aa^*)$$

имаме: $(qp-CCR)$

$\Leftrightarrow$

(aa^*-CCR)

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i \delta_{j,k} \cdot \hat{1}$$

$$[\hat{q}_j, \hat{q}_k] = 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k],$$

$$\hat{q}_j^* = \hat{q}_j, \quad \hat{p}_j^* = \hat{p}_j, \quad j, k = 1, \dots, s,$$

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^*] = \delta_{j,k} \cdot \hat{1},$$

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k] = 0 = [\hat{a}_j^*, \hat{a}_k^*],$$

$$(\hat{a}_j^*)^* = \hat{a}_j, \quad j, k = 1, \dots, s,$$

При переходе:
$$\begin{cases} \hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j + i \hat{p}_j) \\ \hat{a}_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j - i \hat{p}_j) \end{cases}, \quad j=1, \dots, s \quad (qp-aa^*)$$

имее: $(qp-CCR)$

$\Leftrightarrow$

(aa^*-CCR)

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i \delta_{j,k} \cdot \hat{1}$$

$$[\hat{q}_j, \hat{q}_k] = 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k],$$

$$\hat{q}_j^* = \hat{q}_j, \quad \hat{p}_j^* = \hat{p}_j, \quad j, k = 1, \dots, s,$$

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^*] = \delta_{j,k} \cdot \hat{1},$$

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k] = 0 = [\hat{a}_j^*, \hat{a}_k^*],$$

$$(\hat{a}_j^*)^* = \hat{a}_j, \quad j, k = 1, \dots, s,$$

$(H-qp)$

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^s \frac{\omega_j}{2} (\hat{q}_j^2 + \hat{p}_j^2)$$

При переходе:
$$\begin{cases} \hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j + i \hat{p}_j) \\ \hat{a}_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j - i \hat{p}_j) \end{cases}, \quad j=1, \dots, s \quad (qp-aa^*)$$

имее: $(qp-CCR)$

 $\Leftrightarrow$

(aa^*-CCR)

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i \delta_{j,k} \cdot \hat{1}$$

$$[\hat{q}_j, \hat{q}_k] = 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k],$$

$$\hat{q}_j^* = \hat{q}_j, \quad \hat{p}_j^* = \hat{p}_j, \quad j, k = 1, \dots, s,$$

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^*] = \delta_{j,k} \cdot \hat{1},$$

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k] = 0 = [\hat{a}_j^*, \hat{a}_k^*],$$

$$(\hat{a}_j^*)^* = \hat{a}_j, \quad j, k = 1, \dots, s,$$

$(H-qp)$

 $\Leftrightarrow$

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^s \frac{\omega_j}{2} (\hat{q}_j^2 + \hat{p}_j^2)$$

При переходе:
$$\begin{cases} \hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j + i \hat{p}_j) \\ \hat{a}_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j - i \hat{p}_j) \end{cases}, \quad j=1, \dots, s \quad (qp-aa^*)$$

имее: $(qp-CCR)$

$\Leftrightarrow$

(aa^*-CCR)

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i \delta_{j,k} \cdot \hat{1}$$

$$[\hat{q}_j, \hat{q}_k] = 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k],$$

$$\hat{q}_j^* = \hat{q}_j, \quad \hat{p}_j^* = \hat{p}_j, \quad j, k=1, \dots, s,$$

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^*] = \delta_{j,k} \cdot \hat{1},$$

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k] = 0 = [\hat{a}_j^*, \hat{a}_k^*],$$

$$(\hat{a}_j^*)^* = \hat{a}_j, \quad j, k=1, \dots, s,$$

$(H-qp)$

$\Leftrightarrow$

$(H-aa^*)$

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^s \frac{\omega_j}{2} (\hat{q}_j^2 + \hat{p}_j^2)$$

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^s \omega_j \hat{a}_j^* \hat{a}_j + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \sum_{j=1}^s \frac{\omega_j}{2}.$$

При переходе: $\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j + i \hat{p}_j) \\ \hat{a}_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_j - i \hat{p}_j) \end{array} \right. , j=1, \dots, s \quad (qp-aa^*)$

имее: $(qp-CCR)$

$\Leftrightarrow$

(aa^*-CCR)

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i \delta_{j,k} \cdot \hat{1}$$

$$[\hat{q}_j, \hat{q}_k] = 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k],$$

$$\hat{q}_j^* = \hat{q}_j, \hat{p}_j^* = \hat{p}_j, j, k=1, \dots, s,$$

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^*] = \delta_{j,k} \cdot \hat{1},$$

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k] = 0 = [\hat{a}_j^*, \hat{a}_k^*],$$

$$(\hat{a}_j^*)^* = \hat{a}_j, j, k=1, \dots, s,$$

$(H-qp)$

$\Leftrightarrow$

$(H-aa^*)$

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^s \frac{\omega_j}{2} (\hat{q}_j^2 + \hat{p}_j^2)$$

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^s \omega_j \hat{a}_j^* \hat{a}_j + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \sum_{j=1}^s \frac{\omega_j}{2}.$$

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j$ за $j=1, \dots, s$ е система от линейни оператори в прег-Хилбертово пространство $\mathcal{H}$

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j$ за $j=1, \dots, s$ е система от линейни оператори в пред-Хилбертово пространство $\mathcal{H}$, които имат спрегнати оператори $\hat{a}_j^*$, т.е., $\langle \hat{a}_j \phi | \psi \rangle = \langle \phi | \hat{a}_j^* \psi \rangle \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j$ за $j=1, \dots, s$ е система от линейни оператори в прег-Хилбертово пространство $\mathcal{H}$, които имат спрегнати оператори $\hat{a}_j^*$, т.е., $\langle \hat{a}_j \phi | \psi \rangle = \langle \phi | \hat{a}_j^* \psi \rangle \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$, така че се изпълняват соотношенията $(aa^* - CCR)$.

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j$ за $j=1, \dots, s$ е система от линейни оператори в прег-Хилбертово пространство $\mathcal{H}$, които имат спрегнати оператори $\hat{a}_j^*$, т.е., $\langle \hat{a}_j \phi | \psi \rangle = \langle \phi | \hat{a}_j^* \psi \rangle \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$, така че се изпълняват соотношенията (аа* - CCR). Нека да допуснем, че съществува общ собствен вектор $\Omega' \in \mathcal{H}$ за операторите

$$\hat{N}_1 := \hat{a}_1^* \hat{a}_2, \dots, \hat{N}_s = \hat{a}_s^* \hat{a}_s$$

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j$ за $j=1, \dots, s$ е система от линейни оператори в пред-Хилбертово пространство $\mathcal{H}$, които имат спрегнати оператори $\hat{a}_j^*$, т.е., $\langle \hat{a}_j \phi | \psi \rangle = \langle \phi | \hat{a}_j^* \psi \rangle \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$, така че се изпълняват соотношенията (аа* - CCR). Нека да допуснем, че съществува общ собствен вектор $\Omega' \in \mathcal{H}$ за операторите

$$\hat{N}_1 := \hat{a}_1^* \hat{a}_1, \dots, \hat{N}_s = \hat{a}_s^* \hat{a}_s$$

и нека $\mathcal{H}'$ е линейната обвивка на вектори от вида

$$\Omega', \hat{b}_1 \hat{b}_k \Omega', \text{ където } \hat{b}_j \in \{\hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^*\} \text{ и } k=1, 2, \dots$$

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j \in \mathcal{O}p^*(\mathcal{H})$ за $j=1, \dots, s$, $\mathcal{H}$ - пред-Хилбертово извънляват съотношенията $(aa^* - CCR)$. Нека $\exists \Omega' \in \mathcal{H}$ - общ собствен вектор за операторите $\hat{N}_j := \hat{a}_j^* \hat{a}_j$, $j=1, \dots, s$, и нека $\mathcal{H}' = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \Omega', \hat{b}_1 \dots \hat{b}_k \Omega' \mid \hat{b}_j \in \{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}, k=1, 2, \dots \}$.

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j \in \mathcal{O}p^*(\mathcal{H})$ за $j=1, \dots, s$, $\mathcal{H}$ - пред-Хилбертово извънляват съотношенията $(aa^* - CCR)$. Нека $\exists \Omega' \in \mathcal{H}$ - общ собствен вектор за операторите $\hat{N}_j := \hat{a}_j^* \hat{a}_j$, $j=1, \dots, s$, и нека $\mathcal{H}' = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \Omega', \hat{b}_1 \dots \hat{b}_k \Omega' \mid \hat{b}_j \in \{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}, k=1, 2, \dots \}$.
 Тогава $\mathcal{H}'$ е инвариантно подпространство за системата от оператори $\{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}$

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j \in \mathcal{O}p^*(\mathcal{H})$ за $j=1, \dots, s$, $\mathcal{H}$ - пред-Хилбертово извънляват соотношенията $(aa^* - CCR)$. Нека $\exists \Omega' \in \mathcal{H}$ - общ собствен вектор за операторите $\hat{N}_j := \hat{a}_j^* \hat{a}_j$, $j=1, \dots, s$, и нека $\mathcal{H}' = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \Omega', \hat{b}_1 \dots \hat{b}_k \Omega' \mid \hat{b}_j \in \{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}, k=1, 2, \dots \}$.
 Тогава $\mathcal{H}'$ е инвариантно подпространство за системата от оператори $\{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}$

по определение

$$\hat{a}_j(\mathcal{H}') \subseteq \mathcal{H}' \text{ и } \hat{a}_j^*(\mathcal{H}') \subseteq \mathcal{H}' \text{ за } \forall j=1, \dots, s$$

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j \in \mathcal{O}p^*(\mathcal{H})$ за $j=1, \dots, s$, $\mathcal{H}$ - пред-Хилбертово извънляват съотношенията $(aa^* - CCR)$. Нека $\exists \Omega' \in \mathcal{H}$ - общ собствен вектор за операторите $\hat{N}_j := \hat{a}_j^* \hat{a}_j$, $j=1, \dots, s$, и нека $\mathcal{H}' = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \Omega', \hat{b}_1 \dots \hat{b}_k \Omega' \mid \hat{b}_j \in \{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}, k=1, 2, \dots \}$.
 Тогава $\mathcal{H}'$ е инвариантно подпространство за системата от оператори $\{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}$

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j \in \mathcal{O}p^*(\mathcal{H})$ за $j=1, \dots, s$, $\mathcal{H}$ - пред-Хилбертово извънляват соотношенията $(aa^* - CCR)$. Нека $\exists \Omega' \in \mathcal{H}$ - общ собствен вектор за операторите $\hat{N}_j := \hat{a}_j^* \hat{a}_j$, $j=1, \dots, s$, и нека $\mathcal{H}' = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \Omega', \hat{b}_1 \dots \hat{b}_k \Omega' \mid \hat{b}_j \in \{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}, k=1, 2, \dots \}$.
 Тогава $\mathcal{H}'$ е **инвариантно** подпространство за системата от оператори $\{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}$ и в него съществува ортонормиран базис от вектори $\{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1, \dots, n_s = 0, 1, \dots \} \subseteq \mathcal{H}'$

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j \in \mathcal{O}p^*(\mathcal{H})$ за $j=1, \dots, s$, $\mathcal{H}$ - пред-Хилбертово извънляват соотношенията $(aa^* - CCR)$. Нека $\exists \Omega' \in \mathcal{H}$ - общ собствен вектор за операторите $\hat{N}_j := \hat{a}_j^* \hat{a}_j$, $j=1, \dots, s$, и нека $\mathcal{H}' = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \Omega', \hat{b}_1 \dots \hat{b}_k \Omega' \mid \hat{b}_j \in \{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}, k=1, 2, \dots \}$.

Тогав $\mathcal{H}'$ е инвариантно подпространство за системата от оператори $\{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}$ и в него съществува ортонормиран базис от вектори $\{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1, \dots, n_s = 0, 1, \dots \} \subseteq \mathcal{H}'$, т.е.,

$$\text{Span} \{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1, \dots, n_s = 0, 1, \dots \} = \mathcal{H}'$$

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j \in \text{Op}^*(\mathcal{H})$ за $j=1, \dots, s$, $\mathcal{H}$ - пред-Хилбертово извънляват соотношенията $(aa^* - CCR)$. Нека $\exists \Omega' \in \mathcal{H}$ - общ собствен вектор за операторите $\hat{N}_j := \hat{a}_j^* \hat{a}_j$, $j=1, \dots, s$, и нека $\mathcal{H}' = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \Omega', \hat{b}_1 \dots \hat{b}_k \Omega' \mid \hat{b}_j \in \{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}, k=1, 2, \dots \}$.

Тогав $\mathcal{H}'$ е инвариантно подпространство за системата от оператори $\{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}$ и в него съществува ортонормиран базис от вектори $\{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1, \dots, n_s = 0, 1, \dots \} \subseteq \mathcal{H}'$, т.е.,

$$\text{Span} \{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1, \dots, n_s = 0, 1, \dots \} = \mathcal{H}' \text{ и}$$

$$\langle n_1, \dots, n_s \mid n'_1, \dots, n'_s \rangle = \delta_{n_1, n'_1} \cdots \delta_{n_s, n'_s}$$

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j \in \text{Op}^*(\mathcal{H})$ за $j=1, \dots, s$, $\mathcal{H}$ - пред-Хилбертово извънляват соотношенията $(aa^* - CCR)$. Нека $\exists \Omega' \in \mathcal{H}$ - общ собствен вектор за операторите $\hat{N}_j := \hat{a}_j^* \hat{a}_j$, $j=1, \dots, s$, и нека $\mathcal{H}' = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \Omega', \hat{b}_1 \dots \hat{b}_k \Omega' \mid \hat{b}_j \in \{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}, k=1, 2, \dots \}$.

Тогав $\mathcal{H}'$ е инвариантно подпространство за системата от оператори $\{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}$ и в него съществува ортонормиран базис от вектори $\{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1, \dots, n_s = 0, 1, \dots \} \subseteq \mathcal{H}'$, т.е.,

$$\text{Span} \{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1, \dots, n_s = 0, 1, \dots \} = \mathcal{H}' \text{ и}$$

$$\langle n_1, \dots, n_s \mid n'_1, \dots, n'_s \rangle = \delta_{n_1, n'_1} \cdots \delta_{n_s, n'_s}, \text{ така че:}$$

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j \in \mathcal{O}p^*(\mathcal{H})$ за $j=1, \dots, s$, $\mathcal{H}$ - пред-Хилбертово извънляват соотношенията $(aa^* - CCR)$. Нека $\exists \Omega' \in \mathcal{H}$ - общ собствен вектор за операторите $\hat{N}_j := \hat{a}_j^* \hat{a}_j$, $j=1, \dots, s$, и нека $\mathcal{H}' = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \Omega', \hat{b}_1 \dots \hat{b}_k \Omega' \mid \hat{b}_j \in \{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}, k=1, 2, \dots \}$.
 Тогава $\mathcal{H}'$ е инвариантно за $\{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}$ и в него $\exists$ ортонорм. базис $\{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1, \dots, n_s = 0, 1, \dots \} \subseteq \mathcal{H}'$ (т.е., $\langle n_1, \dots, n_s \mid n'_1, \dots, n'_s \rangle = \delta_{n_1, n'_1} \cdots \delta_{n_s, n'_s}$), т.е.

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j \in \mathcal{O}p^*(\mathcal{H})$ за $j=1, \dots, s$, $\mathcal{H}$ - пред-Хилбертово изпълняват
 соотношенията $(aa^* - CCR)$. Нека $\exists \Omega' \in \mathcal{H}$ - общ собствени вектор за
 операторите $\hat{N}_1 := \hat{a}_1^* \hat{a}_1, \dots, \hat{N}_s := \hat{a}_s^* \hat{a}_s$ и нека $\mathcal{H}' = \text{Span} \{ \Omega', \hat{b}_1 \dots \hat{b}_k \Omega' \mid$
 $\hat{b}_j \in \{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}, k=1, 2, \dots \}$. Тогава $\mathcal{H}'$ е **инвариантно** за $\{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots,$
 $\hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}$ и в него $\exists$ ортонорм. б. $\{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1, \dots, n_s = 0, 1, \dots \} \subseteq \mathcal{H}'$
 (т.е., $\langle n_1, \dots, n_s \mid n'_1, \dots, n'_s \rangle = \delta_{n_1, n'_1} \dots \delta_{n_s, n'_s}$), т.е. $\forall j=1, \dots, s$:

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j \in \mathcal{O}p^*(\mathcal{H})$ за $j=1, \dots, s$, $\mathcal{H}$ - пред-Хилбертово изпълняват
 соотношенията ($aa^* - CCR$). Нека $\exists \Omega' \in \mathcal{H}$ - общ собствени вектор за
 операторите $\hat{N}_1 := \hat{a}_1^* \hat{a}_1, \dots, \hat{N}_s = \hat{a}_s^* \hat{a}_s$ и нека $\mathcal{H}' = \text{Span} \{ \Omega', \hat{b}_1 \dots \hat{b}_k \Omega' \mid$
 $\hat{b}_j \in \{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}, k=1, 2, \dots \}$. Тогава $\mathcal{H}'$ е **инвариантно** за $\{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots,$
 $\hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}$ и в него $\exists$ ортонорм. б. $\{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1, \dots, n_s = 0, 1, \dots \} \subseteq \mathcal{H}'$
 (т.е., $\langle n_1, \dots, n_s \mid n'_1, \dots, n'_s \rangle = \delta_{n_1, n'_1} \dots \delta_{n_s, n'_s}$), т.е. $\forall j=1, \dots, s$:

$$\hat{N}_j |n_1, \dots, n_s\rangle = n_j |n_1, \dots, n_s\rangle$$

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j \in \mathcal{O}p^*(\mathcal{H})$ за $j=1, \dots, s$, $\mathcal{H}$ - пред-Хилбертово изпълняват
 соотношенията ($aa^* - CCR$). Нека $\exists \Omega' \in \mathcal{H}$ - общ собствени вектор за
 операторите $\hat{N}_1 := \hat{a}_1^* \hat{a}_1, \dots, \hat{N}_s := \hat{a}_s^* \hat{a}_s$ и нека $\mathcal{H}' = \text{Span} \{ \Omega', \hat{b}_1 \dots \hat{b}_k \Omega' \mid$
 $\hat{b}_j \in \{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}, k=1, 2, \dots \}$. Тогава $\mathcal{H}'$ е **инвариантно** за $\{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots,$
 $\hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}$ и в него $\exists$ ортонорм. б. $\{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1, \dots, n_s = 0, 1, \dots \} \subseteq \mathcal{H}'$
 (т.е., $\langle n_1, \dots, n_s \mid n'_1, \dots, n'_s \rangle = \delta_{n_1, n'_1} \dots \delta_{n_s, n'_s}$), т.е. $\forall j=1, \dots, s$:

$$\hat{N}_j |n_1, \dots, n_s\rangle = n_j |n_1, \dots, n_s\rangle,$$

$$\hat{a}_j |n_1, \dots, n_s\rangle = \begin{cases} 0, & \text{ако } n_j = 0, \text{ в противен случай:} \\ \sqrt{n_j} |n_1, \dots, n_{j-1}, n_j-1, n_{j+1}, \dots, n_s\rangle \end{cases}$$

Теорема 2. Нека $\hat{a}_j \in \mathcal{O}p^*(\mathcal{H})$ за $j=1, \dots, s$, $\mathcal{H}$ - пред-Хилбертово изпълняват
 соотношенията ($aa^* - CCR$). Нека $\exists \Omega' \in \mathcal{H}$ - общ собствени вектор за
 операторите $\hat{N}_1 := \hat{a}_1^* \hat{a}_1, \dots, \hat{N}_s := \hat{a}_s^* \hat{a}_s$ и нека $\mathcal{H}' = \text{Span} \{ \Omega', \hat{b}_1 \dots \hat{b}_k \Omega' \mid$
 $\hat{b}_j \in \{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots, \hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}, k=1, 2, \dots \}$. Тогава $\mathcal{H}'$ е **инвариантно** за $\{ \hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \dots,$
 $\hat{a}_s, \hat{a}_s^* \}$ и в него $\exists$ ортонорм. б. $\{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1, \dots, n_s = 0, 1, \dots \} \subseteq \mathcal{H}'$
 (т.е., $\langle n_1, \dots, n_s \mid n'_1, \dots, n'_s \rangle = \delta_{n_1, n'_1} \dots \delta_{n_s, n'_s}$), т.е. $\forall j=1, \dots, s$:

$$\hat{N}_j |n_1, \dots, n_s\rangle = n_j |n_1, \dots, n_s\rangle,$$

$$\hat{a}_j |n_1, \dots, n_s\rangle = \begin{cases} 0, & \text{ако } n_j = 0, \text{ в противен случай:} \\ \sqrt{n_j} |n_1, \dots, n_{j-1}, n_j-1, n_{j+1}, \dots, n_s\rangle, \end{cases}$$

$$\hat{a}_j^* |n_1, \dots, n_s\rangle = \sqrt{n_j+1} |n_1, \dots, n_{j-1}, n_j+1, n_{j+1}, \dots, n_s\rangle.$$

Ще преформулиране теоремата в термини

4. Ролята на $\hbar$

$$\hat{H} \mapsto \hbar \hat{H}_{(\text{стар})}$$

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\hbar \cdot \delta_{j,k} \cdot \hat{1},$$

$$[\hat{q}_j, \hat{q}_k] = 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k],$$

$$\hat{q}_j^* = \hat{q}_j, \quad \hat{p}_j^* = \hat{p}_j, \quad j, k = 1, \dots, s$$

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^s \hbar \omega_j \hat{a}_j^* \hat{a}_j + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \sum_{j=1}^s \frac{1}{2} \hbar \omega_j.$$

4. Ролята на $\hbar$

$$\hat{H} \mapsto \hbar \hat{H}_{\text{(стар)}}$$

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\hbar \cdot \delta_{j,k} \cdot \hat{1},$$

$$[\hat{q}_j, \hat{q}_k] = 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k],$$

$$\hat{q}_j^* = \hat{q}_j, \quad \hat{p}_j^* = \hat{p}_j, \quad j, k = 1, \dots, s$$

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^s \hbar \omega_j \hat{a}_j^* \hat{a}_j + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \sum_{j=1}^s \frac{1}{2} \hbar \omega_j.$$

Терминология :

Терминология : пълният набор от квантови числа $n_1, \dots, n_s$
индексиращ базиса $|n_1, \dots, n_s\rangle$ се наричат **числа на запълване**.

Терминология: пълният набор от квантови числа $n_1, \dots, n_s$ индексиратъ базиса $|n_1, \dots, n_s\rangle$ се наричат **числа на запълване**.

n_j = брой кванти / частици в състояние "j".

Терминология: пълният набор от квантови числа $n_1, \dots, n_s$ индексират базиса $|n_1, \dots, n_s\rangle$ се наричат **числа на запълване**.

n_j = брой кванти / частици в състояние "j".

$\hat{N}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$ = оператор на броя на кванти / частици в състояние "j".

Терминология: пълният набор от квантови числа $n_1, \dots, n_s$ индексират базиса $|n_1, \dots, n_s\rangle$ се наричат **числа на запълване**.

n_j = брой кванти / частици в състояние "j".

$\hat{N}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$ = оператор на броя на кванти / частици в състояние "j".

$\hat{N} = \hat{N}_1 + \dots + \hat{N}_s$ = оператор на **пълния брой** кванти / частици.

Терминология: пълният набор от квантови числа $n_1, \dots, n_s$ индексират базиса $|n_1, \dots, n_s\rangle$ се наричат **числа на запълване**.

n_j = брой кванти / частици в състояние "j".

$\hat{N}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$ = оператор на броя на кванти / частици в състояние "j".

$\hat{N} = \hat{N}_1 + \dots + \hat{N}_s$ = оператор на **пълния брой** кванти / частици.

$\hat{N} |n_1, \dots, n_s\rangle = (n_1 + \dots + n_s) |n_1, \dots, n_s\rangle$.

Терминология: пълният набор от квантови числа $n_1, \dots, n_s$ индексират базиса $|n_1, \dots, n_s\rangle$ се наричат **числа на запълване**.

n_j = брой кванти / частици в състояние "j".

$\hat{N}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$ = оператор на броя на кванти / частици в състояние "j".

$\hat{N} = \hat{N}_1 + \dots + \hat{N}_s$ = оператор на **пълния брой** кванти / частици.

$\hat{N} |n_1, \dots, n_s\rangle = (n_1 + \dots + n_s) |n_1, \dots, n_s\rangle$.

$\Rightarrow n = n_1 + \dots + n_s$ = **пълния брой** кванти / частици.

Терминология: пълният набор от квантови числа $n_1, \dots, n_s$ индексират базиса $|n_1, \dots, n_s\rangle$ се наричат **числа на запълване**.

n_j = брой кванти / частици в състояние "j".

$\hat{N}_j = \hat{a}_j^* \hat{a}_j$ = оператор на броя на кванти / частици в състояние "j".

$\hat{N} = \hat{N}_1 + \dots + \hat{N}_s$ = оператор на **пълния брой** кванти / частици.

$\hat{N} |n_1, \dots, n_s\rangle = (n_1 + \dots + n_s) |n_1, \dots, n_s\rangle$.

$\Rightarrow n = n_1 + \dots + n_s$ = **пълния брой** кванти / частици.

$\hat{a}_j^*$ - оператори на раждане / creation operators

Терминология: пълният набор от квантови числа $n_1, \dots, n_s$ индексират базиса $|n_1, \dots, n_s\rangle$ се наричат **числа на запълване**.

n_j = брой кванти / частици в състояние "j".

$\hat{N}_j = \hat{a}_j^* \hat{a}_j$ = оператор на броя на кванти / частици в състояние "j".

$\hat{N} = \hat{N}_1 + \dots + \hat{N}_s$ = оператор на **пълния брой** кванти / частици.

$\hat{N} |n_1, \dots, n_s\rangle = (n_1 + \dots + n_s) |n_1, \dots, n_s\rangle$.

$\Rightarrow n = n_1 + \dots + n_s$ = **пълния брой** кванти / частици.

$\hat{a}_j^*$ - оператори на раждане / creation operators

$\hat{a}_j$ - оператори на унищожаване / annihilation

$$\mathcal{H}_n := \text{Span} \{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n = n_1 + \dots + n_s \}$$

за $n = 0, 1, \dots$

$$\mathcal{H}_n := \text{Span} \{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n = n_1 + \dots + n_s \}$$

$$\text{за } n = 0, 1, \dots$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_0 = \mathbb{C} \cdot |0, \dots, 0\rangle \text{ - одно-мерно}$$

$$\mathcal{H}_n := \text{Span} \{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n = n_1 + \dots + n_s \}$$

за $n = 0, 1, \dots$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_0 = \mathbb{C} \cdot |0, \dots, 0\rangle \text{ - едно-мерно}$$

$\mathcal{H}_n$ е собствено подпространство на $\hat{N}$ със собствено число n :

$$\mathcal{H}_n = \{ \phi \in \mathcal{H} \mid \hat{N} \phi = n \phi \}.$$

$$\mathcal{H}_n := \text{Span} \{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n = n_1 + \dots + n_s \}$$

за $n = 0, 1, \dots$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_0 = \mathbb{C} \cdot |0, \dots, 0\rangle \text{ - едно-мерно}$$

$\mathcal{H}_n$ е собственото подпространство на $\hat{N}$ със собствено число n :

$$\mathcal{H}_n = \{ \phi \in \mathcal{H} \mid \hat{N} \phi = n \phi \}.$$

$$\hat{N} \text{ - ермитов} \Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \dots$$

$$\text{т.е.}, \mathcal{H}_n \perp \mathcal{H}_m \text{ при } n \neq m.$$

$$\mathcal{H}_n := \text{Span} \{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n = n_1 + \dots + n_s \}$$

за $n = 0, 1, \dots$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_0 = \mathbb{C} \cdot |0, \dots, 0\rangle \text{ - едно-мерно}$$

$\mathcal{H}_n$ се нарича n -частично подпространство.

Обръщаме внимание, че $\hat{a}_j^*$ изменя броя на частиците с +1:

Обръщаме внимание, че $\hat{a}_j^*$ изменя броя на частиците с +1:

$$\hat{a}_j^*(\mathcal{H}_n) \subseteq \mathcal{H}_{n+1} ,$$

Обръщаме внимание, че $\hat{a}_j^*$ изменя броя на частиците с $+1$:

$$\hat{a}_j^* (\mathcal{H}_n) \subseteq \mathcal{H}_{n+1} ,$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{H}_0 & \oplus & \mathcal{H}_1 & \oplus & \dots & \oplus & \mathcal{H}_n & \oplus & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \hat{a}_j^* : & & & & & & & & \\ & \mathcal{H}_0 & \oplus & \mathcal{H}_1 & \oplus & \dots & \oplus & \mathcal{H}_n & \oplus & \dots \end{array}$$

докато $\hat{a}_j$ изменя броя на частиците с -1 :

докато $\hat{a}_j$ изменя броя на частиците с -1 :

$$\hat{a}_j(\mathcal{H}_n) \subseteq \mathcal{H}_{n-1} \quad \text{за } n > 1,$$

докаато $\hat{a}_j$ изменя броя на частиците с -1 :

$$\hat{a}_j(\mathcal{H}_n) \subseteq \mathcal{H}_{n-1} \quad \text{за } n > 1,$$

$\hat{a}_j :$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \mathcal{H}_0 & \oplus & \mathcal{H}_1 & \oplus & \dots & \oplus & \mathcal{H}_n & \oplus & \dots \\
 \swarrow & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 0 & & & \mathcal{H}_0 & \oplus & \mathcal{H}_1 & \oplus & \dots & \oplus & \mathcal{H}_n & \oplus & \dots
 \end{array}$$

$\hat{a}_j^*$ изменяет броя на частиците с $+1$:

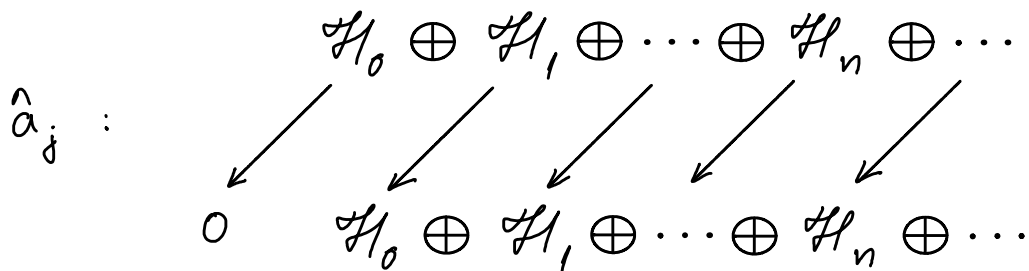
$$\hat{a}_j(\mathcal{H}_n) \subseteq \mathcal{H}_{n+1} \quad \text{за } n > 1,$$

$\hat{a}_j^*$:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \dots \\
 \searrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \\
 0 \quad \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \dots
 \end{array}$$

$\hat{a}_j$ изменяет броя на частиците с -1 :

$$\hat{a}_j(\mathcal{H}_n) \subseteq \mathcal{H}_{n-1} \quad \text{за } n > 1,$$



$\hat{a}_j$ изменя броя на частиците с -1 :

$$\hat{a}_j(\mathcal{H}_n) \subseteq \mathcal{H}_{n-1} \quad \text{за } n > 1,$$

$$\hat{a}_j : \begin{array}{c} \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \dots \\ \swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow \\ 0 \quad \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \dots \end{array}$$

Векторът $\Omega = |0, \dots, 0\rangle$ се нарича вакуум. Това е състоянието с най-ниска енергия ($\Rightarrow$ нула кванти / частици).

5. Реализации

5. Реализации

5.1. В $L^2(\mathbb{R})$ ($s=1$).

5. Реализации

5.1. В $L^2(\mathbb{R})$ ($s=1$).

Нека отново $\hbar = 1$. $\hat{q}$ = умножение по q , $\hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial q}$.

5. Реализации

5.1. В $L^2(\mathbb{R})$ ($s=1$).

Нека отново $\hbar = 1$. $\hat{q}$ = умножение по q , $\hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial q}$.

$$\Rightarrow \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q + \frac{d}{dq} \right), \quad \hat{a}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q - \frac{d}{dq} \right).$$

5. Реализации

5.1. В $L^2(\mathbb{R})$ ($s=1$).

Нека отново $\hbar = 1$. $\hat{q}$ = умножение по q , $\hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial q}$.

$$\Rightarrow \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q + \frac{d}{dq} \right), \quad \hat{a}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q - \frac{d}{dq} \right).$$

Непосредствено се проверява:

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \ni \Omega(q) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{q^2}{2}}$$

Нека отново $\hbar = 1$. $\hat{q}$ = умножение по q , $\hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial q}$.

$$\Rightarrow \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q + \frac{d}{dq} \right), \quad \hat{a}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q - \frac{d}{dq} \right).$$

Непосредствено се проверява:

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \ni \Omega(q) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{q^2}{2}}$$

Нека отново $\hbar = 1$. $\hat{q}$ = умножение по q , $\hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial q}$.

$$\Rightarrow \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q + \frac{d}{dq} \right), \quad \hat{a}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q - \frac{d}{dq} \right).$$

Непосредствено се проверява:

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \ni \Omega(q) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{q^2}{2}}$$

Векторите $\Omega_n(q) = (\hat{a}^*)^n \Omega(q)$ дефинирани в миналата лекция са

$$\Omega_n(q) = (\hat{a}^*)^n \Omega(q) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{1}{4}}} h_n(q) e^{-\frac{q^2}{2}},$$

където: $h_n(q) = (-1)^n e^{q^2} \left(\frac{d}{dq} \right)^n e^{-q^2}$ – полиноми на Ермит (Hermit).

Заключение.

Заклучение. Пред-Хилбертовото пространство $\mathcal{H}^{(0)}$, в което се реализират съотношенията $(aa^* - CCR)$ при $s = 1$

Заключение. Пред-Хилбертовото пространство $\mathcal{H}^{(0)}$, в което се реализират съотношенията $(aa^* - CCR)$ при $s = 1$ е изоморфно на

$$\mathcal{H}^{(0)} = \mathbb{C}[q] \cdot e^{-\frac{q^2}{2}} \equiv \left\{ f(q) e^{-\frac{q^2}{2}} \mid f(q) - \text{полином} \right\} \subset L^2(\mathbb{R})$$

Заключение. Пред-Хилбертовото пространство $\mathcal{H}^{(0)}$, в което се реализират съотношенията $(aa^* - CCR)$ при $s = 1$ е изоморфно на

$$\mathcal{H}^{(0)} = \mathbb{C}[q] \cdot e^{-\frac{q^2}{2}} \equiv \left\{ f(q) e^{-\frac{q^2}{2}} \mid f(q) - \text{полином} \right\} \subset L^2(\mathbb{R})$$

От функционалния анализ: $\overline{\mathcal{H}^{(0)}} = L^2(\mathbb{R})$

Заключение. Пред-Хилбертовото пространство $\mathcal{H}^{(0)}$, в което се реализират съотношенията $(aa^* - CCR)$ при $s = 1$ е изоморфно на

$$\mathcal{H}^{(0)} = \mathbb{C}[q] \cdot e^{-\frac{q^2}{2}} \equiv \left\{ f(q) e^{-\frac{q^2}{2}} \mid f(q) - \text{полином} \right\} \subset L^2(\mathbb{R})$$

От функционалния анализ: $\overline{\mathcal{H}^{(0)}} = L^2(\mathbb{R})$, т.е., $\mathcal{H}^{(0)}$ е гъсто в $L^2(\mathbb{R})$.

Заключение. Пред-Хилбертовото пространство $\mathcal{H}^{(0)}$, в което се реализират съотношенията $(aa^* - CCR)$ при $s = 1$ е изоморфно на

$$\mathcal{H}^{(0)} = \mathbb{C}[q] \cdot e^{-\frac{q^2}{2}} \equiv \left\{ f(q) e^{-\frac{q^2}{2}} \mid f(q) - \text{полином} \right\} \subset L^2(\mathbb{R})$$

От функционалния анализ: $\overline{\mathcal{H}^{(0)}} = L^2(\mathbb{R})$, т.е., $\mathcal{H}^{(0)}$ е гъсто в $L^2(\mathbb{R})$.

С групи думи: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n!}} \Omega_n =: |n\rangle \right\}_{n=0}^{\infty}$ - ортонормиран базис в $\mathcal{H}$.
(пълнота)

Типи $s > 1$:

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}[q_1, \dots, q_s] e^{-\frac{q_1^2}{2} - \dots - \frac{q_s^2}{2}} \subset_{\text{збство}} L^2(\mathbb{R}^s)$$

тбй като

$$\hat{a}_j e^{-\frac{q_1^2}{2} - \dots - \frac{q_s^2}{2}} \equiv \left(q_j + \frac{\partial}{\partial q_j} \right) e^{-\frac{q_1^2}{2} - \dots - \frac{q_s^2}{2}} = 0$$

$$\forall j = 1, \dots, s.$$

5.2. Чисто алгебрична реализация

5.2. Чисто алгебрична реализация

$S = 1.$)

5.2. Чисто алгебрична реализация

$$S = 1.) \quad \mathcal{H} = \mathbb{C}[z]$$

5.2. Чисто алгебрична реализация

$$S = 1.) \quad \mathcal{H} = \mathbb{C}[z], \quad \Omega = 1$$

5.2. Чисто алгебрическая реализация

$$S = 1.) \quad \mathcal{H} = \mathbb{C}[z], \quad \Omega = 1, \quad \Omega_n = z^n$$

5.2. Чисто алгебрическая реализация

$$S = 1.) \quad \mathcal{H} = \mathbb{C}[z], \quad \Omega = 1, \quad \Omega_n = z^n$$

$$\hat{a} = \frac{d}{dz}$$

5.2. Чисто алгебрическая реализация

$$S = 1.) \quad \mathcal{H} = \mathbb{C}[z] , \quad \Omega = 1 , \quad \Omega_n = z^n$$

$$\hat{a} = \frac{d}{dz} , \quad \hat{a}^* = z$$

5.2. Чисто алгебрична реализация

$$S = 1.) \quad \mathcal{H} = \mathbb{C}[z], \quad \Omega = 1, \quad \Omega_n = z^n$$

$$\hat{a} = \frac{d}{dz}, \quad \hat{a}^* = z, \quad \hat{a}^* \hat{a} = z \frac{d}{dz} - \text{оператор на Ойлер}$$

5.2. Чисто алгебрична реализация

$$S = 1.) \quad \mathcal{H} = \mathbb{C}[z], \quad \Omega = 1, \quad \Omega_n = z^n$$

$$\hat{a} = \frac{d}{dz}, \quad \hat{a}^* = z, \quad \hat{a}^* \hat{a} = z \frac{d}{dz} - \text{оператор на Ойлер}$$

Скалярно произведение:

$$\langle f(z) | g(z) \rangle = \overline{f} \left(\frac{d}{dz} \right) g(z) \Big|_{z=0}$$

6. Частичкова интерпретация (Particle interpretation)

6. Частичкова интерпретация (Particle interpretation)

Нека разгледаме едночастичното подпространство

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= \text{Span} \{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1 + \dots + n_s = 1 \} \\ &= \text{Span} \{ |\omega_1\rangle, \dots, |\omega_s\rangle \},\end{aligned}$$

6. Частичкова интерпретация (Particle interpretation)

Нека разгледаме едночастичното подпространство

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= \text{Span} \{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1 + \dots + n_s = 1 \} \\ &= \text{Span} \{ |\omega_1\rangle, \dots, |\omega_s\rangle \},\end{aligned}$$

където $|\omega_j\rangle :=$

6. Частичкова интерпретация (Particle interpretation)

Нека разгледаме едночастичното подпространство

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= \text{Span} \{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1 + \dots + n_s = 1 \} \\ &= \text{Span} \{ |\omega_1\rangle, \dots, |\omega_s\rangle \},\end{aligned}$$

където $|\omega_j\rangle := |0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}, 0, \dots, 0\rangle$

6. Частичкова интерпретация (Particle interpretation)

Нека разгледаме едночастичното подпространство

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= \text{Span} \{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1 + \dots + n_s = 1 \} \\ &= \text{Span} \{ |\omega_1\rangle, \dots, |\omega_s\rangle \},\end{aligned}$$

където $|\omega_j\rangle := |0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}, 0, \dots, 0\rangle = \hat{a}_j^* \overbrace{|0, \dots, 0\rangle}^{\Omega}$

6. Частичкова интерпретация (Particle interpretation)

Нека разгледаме едночастичното подпространство

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= \text{Span} \{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1 + \dots + n_s = 1 \} \\ &= \text{Span} \{ |\omega_1\rangle, \dots, |\omega_s\rangle \},\end{aligned}$$

където $|\omega_j\rangle := |0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}, 0, \dots, 0\rangle = \hat{a}_j^* \overbrace{|0, \dots, 0\rangle}^{\Omega}$

- състояние с един квант в състояние " ω_j ".

6. Частичкова интерпретация

Нека разгледаме едночастичното подпространство

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= \text{Span} \{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1 + \dots + n_s = 1 \} \\ &= \text{Span} \{ |\omega_1\rangle, \dots, |\omega_s\rangle \},\end{aligned}$$

където $|\omega_j\rangle := |0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}, 0, \dots, 0\rangle = \hat{a}_j^* \overbrace{|0, \dots, 0\rangle}^{\Omega}$

- състояние с един квант в състояние " ω_j ".

6. Частичкова интерпретация

Нека разгледаме едночастичното подпространство

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= \text{Span} \{ |n_1, \dots, n_s\rangle \mid n_1 + \dots + n_s = 1 \} \\ &= \text{Span} \{ |\omega_1\rangle, \dots, |\omega_s\rangle \},\end{aligned}$$

където $|\omega_j\rangle := |0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}, 0, \dots, 0\rangle = \hat{a}_j^* \overbrace{|0, \dots, 0\rangle}^{\Omega}$

- състояние с един квант в състояние " ω_j ".

В тази точка ще изведем пряка връзка между подпространствата $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_n$ (с $n > 1$ частици).

6.1. Отступление : операции над Хилбертови пространства

6.1. Отступление : операции над Хилбертови пространства

1) (Ортогонална) пряка сума : $\mathcal{H} := \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}''$

6.1. Отступление : операции над Хилбертови пространства

1) (Ортогонална) пряка сума : $\mathcal{H} := \underset{\downarrow}{\mathcal{H}'} \oplus \underset{\downarrow}{\mathcal{H}''}$

по определение $\forall \phi \in \mathcal{H}$ се записва : $\phi = \phi' + \phi''$ *еднозначно*.

6.1. Отступление: операции над Хилбертови пространства

1) (Ортогонална) пряка сума : $\mathcal{H} := \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}''$

по определение $\forall \phi \in \mathcal{H}$ се записва : $\phi = \underset{\downarrow}{\phi'} + \underset{\downarrow}{\phi''}$ *еднозначно*.

Скалярно произведение :

$$\langle \phi'_1 \oplus \phi''_1 | \phi'_2 \oplus \phi''_2 \rangle := \langle \phi'_1 | \phi'_2 \rangle + \langle \phi''_1 | \phi''_2 \rangle$$

6.1. Отступление : операции над Хилбертови пространства

1) (Ортогонална) пряка сума : $\mathcal{H} := \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}''$

по определение $\forall \phi \in \mathcal{H}$ се записва : $\phi = \underset{\downarrow}{\phi'} + \underset{\downarrow}{\phi''}$ *еднозначно*.

Скалярно произведение :

$$\langle \phi'_1 \oplus \phi''_1 | \phi'_2 \oplus \phi''_2 \rangle := \langle \phi'_1 | \phi'_2 \rangle + \langle \phi''_1 | \phi''_2 \rangle$$

Физическа интерпретация : "обединение на състояния"

Операцията пряка сума може да се итерира краен или безкраен брой пъти и да се интерпретира като пространство от радици

Операцията пряка сума може да се итерира краен или безкраен брой пъти и да се интерпретира като пространства от редици

$$\bigoplus_{r=1}^s \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^s \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r \},$$

Операцията пряка сума може да се итерира краен или безкраен брой пъти и да се интерпретира като пространства от редици

$$\bigoplus_{r=1}^s \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^s \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r \},$$

$$\bigoplus_{r=1}^{\infty} \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^{\infty} \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r, \text{ с допълнително условие} \},$$

Операцията пряка сума може да се итерира краен или безкраен брой пъти и да се интерпретира като пространства от редици

$$\bigoplus_{r=1}^s \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^s \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r \},$$

$$\bigoplus_{r=1}^{\infty} \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^{\infty} \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r, \text{ с допълнително условие} \},$$

$$\alpha (\phi_r)_r + \beta (\psi_r) = (\alpha \phi_r)_r + (\beta \psi_r)_r \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}),$$

Операцията пряка сума може да се итерира краен или безкраен брой пъти и да се интерпретира като пространства от редици

$$\bigoplus_{r=1}^s \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^s \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r \},$$

$$\bigoplus_{r=1}^{\infty} \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^{\infty} \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r, \text{ с допълнително условие} \},$$

$$\alpha (\phi_r)_r + \beta (\psi_r) = (\alpha \phi_r)_r + (\beta \psi_r)_r \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}),$$

$$\langle (\phi_r)_r \mid (\psi_r) \rangle = \sum_r \langle \phi_r \mid \psi_r \rangle,$$

Операцията пряка сума може да се итерира краен или безкраен брой пъти и да се интерпретира като пространства от редици

$$\bigoplus_{r=1}^s \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^s \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r \},$$

$$\bigoplus_{r=1}^{\infty} \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^{\infty} \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r, \text{ с допълнително условие} \},$$

$$\alpha (\phi_r)_r + \beta (\psi_r) = (\alpha \phi_r)_r + (\beta \psi_r)_r \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}),$$

$$\langle (\phi_r)_r \mid (\psi_r) \rangle = \sum_r \langle \phi_r \mid \psi_r \rangle,$$

където допълнителното условие по-горе, в зависимост от контекста бива:

Операцията пряка сума може да се итерира краен или безкраен брой пъти и да се интерпретира като пространство от редици

$$\bigoplus_{r=1}^s \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^s \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r \},$$

$$\bigoplus_{r=1}^{\infty} \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^{\infty} \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r, \text{ с допълнително условие} \},$$

където допълнителното условие по-горе, в зависимост от контекста бива:

Операцията пряка сума може да се итерира краен или безкраен брой пъти и да се интерпретира като пространства от редици

$$\bigoplus_{r=1}^s \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^s \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r \},$$

$$\bigoplus_{r=1}^{\infty} \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^{\infty} \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r, \text{ с допълнително условие} \},$$

където допълнителното условие по-горе, в зависимост от контекста бива:

- алгебрична пряка сума : $\phi_r \neq 0$ само за краен брой r .

Операцията пряка сума може да се итерира краен или безкраен брой пъти и да се интерпретира като пространство от редици

$$\bigoplus_{r=1}^s \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^s \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r \},$$

$$\bigoplus_{r=1}^{\infty} \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^{\infty} \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r, \text{ с допълнително условие} \},$$

където допълнителното условие по-горе, в зависимост от контекста бива:

- алгебрична пряка сума: $\phi_r \neq 0$ само за краен брой r . Това води до пред-Хилбертови пространства.

Операцията пряка сума може да се итерира краен или безкраен брой пъти и да се интерпретира като пространство от редици

$$\bigoplus_{r=1}^s \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^s \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r \},$$

$$\bigoplus_{r=1}^{\infty} \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^{\infty} \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r, \text{ с допълнително условие} \},$$

където допълнителното условие по-горе, в зависимост от контекста бива:

- алгебрична пряка сума: $\phi_r \neq 0$ само за краен брой r . Това води до пред-Хилбертови пространства.
- Хилбертова пряка сума: $\|(\phi_r)_{r=1}^{\infty}\|^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \|\phi_r\|^2 < \infty$.

Операцията пряка сума може да се итерира краен или безкраен брой пъти и да се интерпретира като пространство от редици

$$\bigoplus_{r=1}^s \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^s \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r \},$$

$$\bigoplus_{r=1}^{\infty} \mathcal{H}_r = \{ (\phi_r)_{r=1}^{\infty} \mid \phi_r \in \mathcal{H}_r, \text{ с допълнително условие} \},$$

където допълнителното условие по-горе, в зависимост от контекста бива:

- алгебрична пряка сума: $\phi_r \neq 0$ само за краен брой r . Това води до пред-Хилбертови пространства.
- Хилбертова пряка сума: $\|(\phi_r)_{r=1}^{\infty}\|^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \|\phi_r\|^2 < \infty$.

Това води до Хилбертово пространство, ако $\forall \mathcal{H}_r$ са Хилбертови.

Ако $A_r : \mathcal{H}_r \rightarrow \mathcal{H}_r$ са линейни оператори

Ако $A_r: \mathcal{H}_r \rightarrow \mathcal{H}_r$ са линейни оператори, то

$$\bigoplus_r A_r: \bigoplus_r \mathcal{H}_r \rightarrow \bigoplus_r \mathcal{H}_r : (\phi_r)_r \mapsto (A\phi_r)_r$$

Ако $A_r: \mathcal{H}_r \rightarrow \mathcal{H}_r$ са линейни оператори, то

$$\bigoplus_r A_r: \bigoplus_r \mathcal{H}_r \rightarrow \bigoplus_r \mathcal{H}_r: (\phi_r)_r \mapsto (A\phi_r)_r$$

което в случай на безкрайни преки суми е винаги безпроблемно единствено при алгебрични преки суми.

Ако $A_r: \mathcal{H}_r \rightarrow \mathcal{H}_r$ са линейни оператори, то

$$\bigoplus_r A_r: \bigoplus_r \mathcal{H}_r \rightarrow \bigoplus_r \mathcal{H}_r: (\phi_r)_r \mapsto (A\phi_r)_r$$

което в случай на безкрайни преки суми е винаги безпроблемно единствено при алгебрични преки суми.

По-общо, система $A_{r_1, r_2}: \mathcal{H}_{r_1} \rightarrow \mathcal{H}_{r_2}$ дефинира блок оператор

Ако $A_r: \mathcal{H}_r \rightarrow \mathcal{H}_r$ са линейни оператори, то

$$\bigoplus_r A_r: \bigoplus_r \mathcal{H}_r \rightarrow \bigoplus_r \mathcal{H}_r: (\phi_r)_r \mapsto (A\phi_r)_r$$

което в случай на безкрайни преки суми е винаги безпроблемно единствено при алгебрични преки суми.

По-общо, система $A_{r_1, r_2}: \mathcal{H}_{r_1} \rightarrow \mathcal{H}_{r_2}$ дефинира блок оператор

$$(A_{r_1, r_2}) \cdot \bigoplus_r \mathcal{H}_r \rightarrow \bigoplus_r \mathcal{H}_r: (\phi_r)_r \mapsto (\psi_r)_r$$

Ако $A_r: \mathcal{H}_r \rightarrow \mathcal{H}_r$ са линейни оператори, то

$$\bigoplus_r A_r: \bigoplus_r \mathcal{H}_r \rightarrow \bigoplus_r \mathcal{H}_r: (\phi_r)_r \mapsto (A\phi_r)_r$$

което в случай на безкрайни преки суми е винаги безпроблемно единствено при алгебрични преки суми.

По-общо, система $A_{r_1, r_2}: \mathcal{H}_{r_1} \rightarrow \mathcal{H}_{r_2}$ дефинира блок оператор

$$(A_{r_1, r_2}) \cdot \bigoplus_r \mathcal{H}_r \rightarrow \bigoplus_r \mathcal{H}_r: (\phi_r)_r \mapsto (\psi_r)_r,$$

$$\psi_r = \sum_{r'} A_{r, r'}(\phi_{r'})$$

Ако $A_r: \mathcal{H}_r \rightarrow \mathcal{H}_r$ са линейни оператори, то

$$\bigoplus_r A_r: \bigoplus_r \mathcal{H}_r \rightarrow \bigoplus_r \mathcal{H}_r: (\phi_r)_r \mapsto (A\phi_r)_r$$

което в случай на безкрайни преки суми е винаги безпроблемно единствено при алгебрични преки суми.

По-общо, система $A_{r_1, r_2}: \mathcal{H}_{r_1} \rightarrow \mathcal{H}_{r_2}$ дефинира блок оператор

$$(A_{r_1, r_2}) \cdot \bigoplus_r \mathcal{H}_r \rightarrow \bigoplus_r \mathcal{H}_r: (\phi_r)_r \mapsto (\psi_r)_r,$$

$$\psi_r = \sum_{r'} A_{r, r'}(\phi_{r'}),$$

където в случай на безкрайни редици е нужно отново да се добави условие за финитност или сходимост.

2) Объединение на две физические системы (независимы измерения)

2) Обединение на две физически системи (независими измервания)

Нека имаме две независими физически системи, в които независимо се измерват някакви наблюдаеми:

2) Объединение на две физически системы (независими измервания)

Нека имаме две независими физически системи, в които независимо се измерват някакви наблюдаеми:

$$\hat{H}' \in \mathcal{H}', \quad \hat{H}' |E'_j\rangle = E'_j |E'_j\rangle, \quad j = 1, 2, \dots$$

2) Объединение на две физически системы (независимы измерения)

Нека имаме две независими физически системи, в които независимо се измерват някакви наблюдаеми:

$$\hat{H}' \in \mathcal{H}', \quad \hat{H}' |E'_j\rangle = E'_j |E'_j\rangle, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\hat{H}'' \in \mathcal{H}'', \quad \hat{H}'' |E''_k\rangle = E''_k |E''_k\rangle, \quad k = 1, 2, \dots$$

2) Обединение на две физически системи (независими измервания)

Нека имаме две независими физически системи, в които независимо се измерват някакви наблюдаеми:

$$\hat{H}' \in \mathcal{H}', \quad \hat{H}' |E'_j\rangle = E'_j |E'_j\rangle, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\hat{H}'' \in \mathcal{H}'', \quad \hat{H}'' |E''_k\rangle = E''_k |E''_k\rangle, \quad k = 1, 2, \dots$$

Обединяването на информацията от двете измервания води до
комбинирано състояние

2) Обединение на две физически системи (независими измервания)

Нека имаме две независими физически системи, в които независимо се измерват някакви наблюдаеми:

$$\hat{H}' \in \mathcal{H}', \quad \hat{H}' |E'_j\rangle = E'_j |E'_j\rangle, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\hat{H}'' \in \mathcal{H}'', \quad \hat{H}'' |E''_k\rangle = E''_k |E''_k\rangle, \quad k = 1, 2, \dots$$

Обединяването на информацията от двете измервания води до
комбинирано състояние

$$|E'_j, E''_k\rangle$$

2) Обединение на две физически системи (независими измервания)

Нека имаме две независими физически системи, в които независимо се измерват някакви наблюдаеми:

$$\hat{H}' \in \mathcal{H}', \quad \hat{H}' |E'_j\rangle = E'_j |E'_j\rangle, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\hat{H}'' \in \mathcal{H}'', \quad \hat{H}'' |E''_k\rangle = E''_k |E''_k\rangle, \quad k = 1, 2, \dots$$

Обединяването на информацията от двете измервания води до
комбинирано състояние

$$|E'_j, E''_k\rangle \equiv |E'_j\rangle |E''_k\rangle$$

2) Обединение на две физически системи (независими измервания)

Нека имаме две независими физически системи, в които независимо се измерват някакви наблюдаеми:

$$\hat{H}' \in \mathcal{H}', \quad \hat{H}' |E'_j\rangle = E'_j |E'_j\rangle, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\hat{H}'' \in \mathcal{H}'', \quad \hat{H}'' |E''_k\rangle = E''_k |E''_k\rangle, \quad k = 1, 2, \dots$$

Обединяването на информацията от двете измервания води до
комбинирано състояние

$$|E'_j, E''_k\rangle \equiv |E'_j\rangle |E''_k\rangle \equiv |E'_j\rangle \otimes |E''_k\rangle$$

2) Обединение на две физически системи (независими измервания)

Нека имаме две независими физически системи, в които независимо се измерват някакви наблюдаеми:

$$\hat{H}' \in \mathcal{H}', \quad \hat{H}' |E'_j\rangle = E'_j |E'_j\rangle, \quad j=1,2,\dots$$

$$\hat{H}'' \in \mathcal{H}'', \quad \hat{H}'' |E''_k\rangle = E''_k |E''_k\rangle, \quad k=1,2,\dots$$

Обединяването на информацията от двете измервания води до *комбинирано състояние*

$$|E'_j, E''_k\rangle \equiv |E'_j\rangle |E''_k\rangle \equiv |E'_j\rangle \otimes |E''_k\rangle$$

(алтернативни означения).

2) Обединение на две физически системи (независими измервания)

Нека имаме две независими физически системи, в които независимо се измерват някакви наблюдаеми:

$$\hat{H}' \in \mathcal{H}', \quad \hat{H}' |E'_j\rangle = E'_j |E'_j\rangle, \quad j=1,2,\dots$$

$$\hat{H}'' \in \mathcal{H}'', \quad \hat{H}'' |E''_k\rangle = E''_k |E''_k\rangle, \quad k=1,2,\dots$$

Обединяването на информацията от двете измервания води до *комбинирано състояние*

$$|E'_j, E''_k\rangle \equiv |E'_j\rangle |E''_k\rangle \equiv |E'_j\rangle \otimes |E''_k\rangle$$

(алтернативни означения).

Това задава ортонормиран базис на така нареченото *тензорно произведение* $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$.

Иие ще определим абстрактно тензорното произведение $V \otimes W$ на две векторни пространства V и W , като векторно пространство

Иие ще определим абстрактно тензорното произведение $V \otimes W$ на две векторни пространства V и W , като векторно пространство снабдено с изображение:

$$\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W$$

$$v, w \mapsto v \otimes w,$$

Иие ще определим абстрактно тензорното произведение $V \otimes W$ на две векторни пространства V и W , като векторно пространство

снабдено с изображение: $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W$

$$v, w \mapsto v \otimes w,$$

което изпънява следните три свойства:

Иие ще определим абстрактно тензорното произведение $V \otimes W$ на две векторни пространства V и W , като векторно пространство

снабдено с изображение: $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W$

$$v, w \mapsto v \otimes w,$$

което изпънява следните три свойства:

($\otimes 1$) Билинейност $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \otimes w = \alpha_1 v_1 \otimes w + \alpha_2 v_2 \otimes w$,

$$v \otimes (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 v \otimes w_1 + \alpha_2 v \otimes w_2.$$

Иие ще определим абстрактно тензорното произведение $V \otimes W$ на две векторни пространства V и W , като векторно пространство

снабдено с изображение: $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W$

$$v, w \mapsto v \otimes w,$$

което изпълнява следните три свойства:

($\otimes 1$) Билинейност $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \otimes w = \alpha_1 v_1 \otimes w + \alpha_2 v_2 \otimes w$,

$$v \otimes (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 v \otimes w_1 + \alpha_2 v \otimes w_2.$$

($\otimes 2$) Ако $v_1, \dots, v_k \in V$ и $w_1, \dots, w_\ell \in W$ са линейно независими системи, то $\{v_i \otimes w_j \mid i=1, \dots, k, j=1, \dots, \ell\}$ е линейно независима.

Иие ще определим абстрактно тензорното произведение $V \otimes W$ на две векторни пространства V и W , като векторно пространство

снабдено с изображение: $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W$

$$v, w \mapsto v \otimes w,$$

което изпъкнава следните три свойства:

($\otimes 1$) Билинейност $(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \otimes w = \alpha_1 v_1 \otimes w + \alpha_2 v_2 \otimes w$,
 $v \otimes (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 v \otimes w_1 + \alpha_2 v \otimes w_2$.

($\otimes 2$) Ако $v_1, \dots, v_k \in V$ и $w_1, \dots, w_\ell \in W$ са линейно независими системи, то $\{v_i \otimes w_j \mid i=1, \dots, k, j=1, \dots, \ell\}$ е линейно независима.

($\otimes 3$) $\text{Span} \{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\} = V \otimes W$.

Тензорното произведение на две пред-Хилбертови пространства, $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$ се определя допълнително със следното скалярно произведение

Тензорното произведение на две пред-Хилбертови пространства, $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$ се определя допълнително със следното скалярно произведение

$$\langle \phi'_1 \otimes \phi''_1 | \phi'_2 \otimes \phi''_2 \rangle = \langle \phi'_1 | \phi'_2 \rangle' \langle \phi''_1 | \phi''_2 \rangle''$$

Тензорното произведение на две пред-Хилбертови пространства, $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$ се определя допълнително със следното скалярно произведение

$$\langle \phi'_1 \otimes \phi''_1 | \phi'_2 \otimes \phi''_2 \rangle = \langle \phi'_1 | \phi'_2 \rangle' \langle \phi''_1 | \phi''_2 \rangle''$$

(Физически, това отговаря на умножение на вероятности за преход в съответствие със закона за вероятност на независими събития.)

В заключение обръщаме внимание, че крайни тензорни произведения $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n$ могат да се определят или с пряко обобщение на горните определения, или с краен брой итерации на бинарното тензорно произведение: $(\cdots (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \otimes \cdots) \otimes \mathcal{H}_n$.

В заключение обръщаме внимание, че крайни тензорни произведения $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ могат да се определят или с пряко обобщение на горните определения, или с краен брой итерации на бинарното тензорно произведение: $(\dots (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \otimes \dots) \otimes \mathcal{H}_n$.

Безкрайните тензорни произведения, макар че са възможни за определяне са много по-деликатни за конструиране, в сравнение да речем, с преките суми.

В заключение обръщаме внимание, че крайни тензорни произведения $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ могат да се определят или с пряко обобщение на горните определения, или с краен брой итерации на бинарното тензорно произведение: $(\dots (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \otimes \dots) \otimes \mathcal{H}_n$.

Безкрайните тензорни произведения, макар че са възможни за определяне са много по-деликатни за конструиране, в сравнение да речем, с преките суми.

Допълнителни сведения и конструкции свързани с тензорни произведения са приведени в лекция 6.

6.3. Теорема 3. Нека $\mathcal{H}_1$ е пред-Хилбертово пространство

6.3. Теорема 3. Нека $\mathcal{H}_1$ е пред-Хилбертово пространство
$$\mathcal{H}_1^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_n .$$

6.3. Теорема 3. Нека $\mathcal{H}_1$ е пред-Хилбертово пространство

$$\mathcal{H}_1^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_n .$$

Нека $S_n : \mathcal{H}_1^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes n} :$

6.3. Теорема 3. Нека $\mathcal{H}_1$ е пред-Хилбертово пространство

$$\mathcal{H}_1^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_n .$$

Нека $S_n : \mathcal{H}_1^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes n} :$

$$S_n(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)} ,$$

6.3. Теорема 3. Нека $\mathcal{H}_1$ е пред-Хилбертово пространство

$$\mathcal{H}_1^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_n .$$

Нека $S_n : \mathcal{H}_1^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes n} :$

$$S_n(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)} ,$$

където S_n е множеството на всички пермутации $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.

6.3. Теорема 3. Нека $\mathcal{H}_1$ е пред-Хилбертово пространство

$$\mathcal{H}_1^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_n.$$

Нека $S_n : \mathcal{H}_1^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes n}$:

$$S_n(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)},$$

където S_n е множеството на всички пермутации $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.

Тогава S_n е ортогонален проектор: $S_n^* = S_n$, $S_n^2 = S_n$

6.3. Теорема 3. Нека $\mathcal{H}_1$ е пред-Хилбертово пространство

$$\mathcal{H}_1^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_n .$$

Нека $S_n : \mathcal{H}_1^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes n} :$

$$S_n(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)} ,$$

Тогава S_n е ортогонален проектор: $S_n^* = S_n$, $S_n^2 = S_n$.

6.3. Теорема 3. Нека $\mathcal{H}_1$ е пред-Хилбертово пространство

$$\mathcal{H}_1^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_n .$$

Нека $S_n : \mathcal{H}_1^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes n} :$

$$S_n(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)} ,$$

Тогава S_n е ортогонален проектор: $S_n^* = S_n$, $S_n^2 = S_n$.

Нека $\mathcal{H}_n := S_n(\mathcal{H}_1^{\otimes n})$

6.3. Теорема 3. Нека $\mathcal{H}_1$ е пред-Хилбертово пространство

$$\mathcal{H}_1^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_n .$$

Нека $S_n : \mathcal{H}_1^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes n} :$

$$S_n(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)} ,$$

Тогава S_n е ортогонален проектор: $S_n^* = S_n$, $S_n^2 = S_n$.

Нека $\mathcal{H}_n := S_n(\mathcal{H}_1^{\otimes n})$ и ако $\{|\omega_j\rangle\}_j \subseteq \mathcal{H}_1$

$$\text{базис}$$

6.3. Теорема 3. Нека $\mathcal{H}_1$ е пред-Хилбертово пространство

$$\mathcal{H}_1^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_n .$$

Нека $S_n : \mathcal{H}_1^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes n} :$

$$S_n(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)} ,$$

Тогавта S_n е ортогонален проектор: $S_n^* = S_n$, $S_n^2 = S_n$.

Нека $\mathcal{H}_n := S_n(\mathcal{H}_1^{\otimes n})$ и ако $\{|\omega_j\rangle\}_j \subseteq \mathcal{H}_1$, то

$$\hat{a}_j^* \overbrace{\Psi_n}^{\psi} := \sqrt{n+1} S_{n+1}(|\omega_j\rangle \otimes \Psi_n) \in \mathcal{H}_{n+1} \quad (\forall j)$$

6.3. Теорема 3. Нека $\mathcal{H}_1$ е пред-Хилбертово пространство

$$\mathcal{H}_1^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_1}_n.$$

Нека $S_n : \mathcal{H}_1^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}_1^{\otimes n} :$

$$S_n(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(n)},$$

Тогавта S_n е ортогонален проектор: $S_n^* = S_n$, $S_n^2 = S_n$.

Нека $\mathcal{H}_n := S_n(\mathcal{H}_1^{\otimes n})$ и ако $\{|\omega_j\rangle\}_j \subseteq \mathcal{H}_1$ базис, то

$$\hat{a}_j^* \overbrace{\Psi_n}^{\psi} := \sqrt{n+1} S_{n+1}(|\omega_j\rangle \otimes \Psi_n) \in \mathcal{H}_{n+1} \quad (\forall j) \text{ и нека}$$

$$\mathcal{H}_0 = \mathbb{C} \cdot \Omega, \quad \hat{a}_j^* \Omega := |\omega_j\rangle \quad (\forall j).$$

6.3. Теорема 3.

Тогавта, ако $\hat{a}_j := (\hat{a}_j^*)^*$ ($\forall j$) и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \dots$

6.3. Теорема 3.

Тогава, ако $\hat{a}_j := (\hat{a}_j^*)^*$ ($\forall j$) и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \dots$,
 то $\{\hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \hat{a}_2, \hat{a}_2^*, \dots\}$ изпълнява (aa^*-CCR)

6.3. Теорема 3.

Тогава, ако $\hat{a}_j := (\hat{a}_j^*)^* \ (\forall j)$ и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \dots$,
 то $\{\hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \hat{a}_2, \hat{a}_2^*, \dots\}$ изпълнява (aa^*-CCR) и тази реализация е
 изоморфна на неприводимата реализация описана в Следствие 2 а)

6.3. Теорема 3.

Тогава, ако $\hat{a}_j := (\hat{a}_j^*)^*$ ($\forall j$) и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \dots$, то $\{\hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \hat{a}_2, \hat{a}_2^*, \dots\}$ изпълнява (аа*-CCR) и тази реализация е изоморфна на неприводимата реализация описана в Следствие 2 а) като:

$$(\hat{a}_1^*)^{n_1} \dots (\hat{a}_s^*)^{n_s} \Omega = \sqrt{n!} S_n \left(|\omega_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes |\omega_s\rangle^{\otimes n_s} \right)$$

6.3. Теорема 3.

Тогава, ако $\hat{a}_j := (\hat{a}_j^*)^*$ ($\forall j$) и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \dots$, то $\{\hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \hat{a}_2, \hat{a}_2^*, \dots\}$ изпълнява (аа*-CCR) и тази реализация е изоморфна на неприводимата реализация описана в Следствие 2 а) като:

$$(\hat{a}_1^*)^{n_1} \dots (\hat{a}_s^*)^{n_s} \Omega = \sqrt{n!} S_n \left(|\omega_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes |\omega_s\rangle^{\otimes n_s} \right),$$

$$|n_1, \dots, n_s\rangle = \binom{n}{n_1, \dots, n_s}^{1/2} S_n \left(|\omega_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes |\omega_s\rangle^{\otimes n_s} \right)$$

6.3. Теорема 3.

Тогава, ако $\hat{a}_j := (\hat{a}_j^*)^*$ ($\forall j$) и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \dots$, то $\{\hat{a}_1, \hat{a}_1^*, \hat{a}_2, \hat{a}_2^*, \dots\}$ изпълнява (аа*-ССР) и тази реализация е изоморфна на неприводимата реализация описана в Следствие 2 а) като:

$$(\hat{a}_1^*)^{n_1} \dots (\hat{a}_s^*)^{n_s} \Omega = \sqrt{n!} S_n \left(|\omega_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes |\omega_s\rangle^{\otimes n_s} \right),$$

$$|n_1, \dots, n_s\rangle = \binom{n}{n_1, \dots, n_s}^{1/2} S_n \left(|\omega_1\rangle^{\otimes n_1} \otimes \dots \otimes |\omega_s\rangle^{\otimes n_s} \right),$$

$$n = n_1 + \dots + n_s, \quad \binom{n}{n_1, \dots, n_s} = \frac{n!}{n_1! \dots n_s!}.$$

Доказательство

Доказательство

1) Защо $\mathcal{S}_n^* = \mathcal{S}_n$?

Доказательство 1) Защо $S_n^* = S_n$?

$$\langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n | S_n (\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) \rangle$$

Доказательство 1) Почему $S_n^* = S_n$?

$$\langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n | S_n(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) \rangle$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n | \psi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\sigma(n)} \rangle$$

Доказательство 1) Почему $S_n^* = S_n$?

$$\langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n | S_n(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) \rangle$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n | \psi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\sigma(n)} \rangle$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n \langle \phi_j | \psi_{\sigma(j)} \rangle$$

Доказательство 1) Зачем $S_n^* = S_n$?

$$\langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n | S_n(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) \rangle$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n | \psi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\sigma(n)} \rangle$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n \langle \phi_j | \psi_{\sigma(j)} \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n \langle \phi_{\sigma(j)} | \psi_j \rangle$$

Доказательство 1) Почему $S_n^* = S_n$?

$$\langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n | S_n(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) \rangle$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n | \psi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\sigma(n)} \rangle$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n \langle \phi_j | \psi_{\sigma(j)} \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n \langle \phi_{\sigma(j)} | \psi_j \rangle$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \langle \phi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(n)} | \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n \rangle$$

Доказательство 1) Защо $S_n^* = S_n$?

$$\langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n | S_n(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) \rangle$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n | \psi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\sigma(n)} \rangle$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n \langle \phi_j | \psi_{\sigma(j)} \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n \langle \phi_{\sigma(j)} | \psi_j \rangle$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \langle \phi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(n)} | \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n \rangle$$

$$= \langle S_n(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n) | \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n \rangle.$$

Доказательство 1) Почему $S_n^* = S_n$?

$$\langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n | S_n(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) \rangle$$

$$= \langle S_n(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n) | \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n \rangle.$$

Доказателство 1) Защо $S_n^* = S_n$?

$$\langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n \mid S_n(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) \rangle$$

$$= \langle S_n(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n) \mid \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n \rangle.$$

(Разпространява се по линейност - виж в лекция 6 допълнително за този аргумент.)

2.) Защо $\sigma_n^2 = \sigma_n$

2.) Защо $S_n^2 = S_n$? $S_n^2(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n) =$

2.) Защо $S_n^2 = S_n$? $S_n^2(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n) =$

$$= \frac{1}{n!^2} \sum_{\sigma, \eta \in S_n} \phi_{\sigma(\eta(1))} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(\eta(n))}$$

$$2.) \text{ Защо } S_n^2 = S_n ? \quad S_n^2(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n) =$$

$$= \frac{1}{n!^2} \sum_{\sigma, \eta \in S_n} \phi_{\sigma(\eta(1))} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(\eta(n))}$$

$$= \frac{1}{n!^2} \sum_{\eta \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(n)}$$

$$2.) \text{ Защо } S_n^2 = S_n ? \quad S_n^2(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n) =$$

$$= \frac{1}{n!^2} \sum_{\sigma, \eta \in S_n} \phi_{\sigma(\eta(1))} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(\eta(n))}$$

$$= \frac{1}{n!^2} \underbrace{\sum_{\eta \in S_n}}_{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(n)}$$

$$2.) \text{ Защо } S_n^2 = S_n ? \quad S_n^2(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n) =$$

$$= \frac{1}{n!^2} \sum_{\sigma, \eta \in S_n} \phi_{\sigma(\eta(1))} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(\eta(n))}$$

$$= \frac{1}{n!^2} \underbrace{\sum_{\eta \in S_n}}_{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(n)} = S_n(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n),$$

$$\begin{aligned}
2.) \text{ Защо } S_n^2 &= S_n ? \quad S_n^2(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n) = \\
&= \frac{1}{n!^2} \sum_{\sigma, \eta \in S_n} \phi_{\sigma(\eta(1))} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(\eta(n))} \\
&= \frac{1}{n!^2} \underbrace{\sum_{\eta \in S_n}}_{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(n)} = S_n(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n),
\end{aligned}$$

където преходът към последния ред става със смяна на сумационните индекси $(\sigma, \eta) \mapsto (\sigma\eta, \eta)$.

$$\begin{aligned}
 2.) \text{ Защо } S_n^2 &= S_n ? \quad S_n^2(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n) = \\
 &= \frac{1}{n!^2} \sum_{\sigma, \eta \in S_n} \phi_{\sigma(\eta(1))} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(\eta(n))} \\
 &= \frac{1}{n!^2} \underbrace{\sum_{\eta \in S_n}}_{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \phi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \phi_{\sigma(n)} = S_n(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n),
 \end{aligned}$$

където преходът към последния ред става със смяна на сумационните индекси $(\sigma, \eta) \mapsto (\sigma\eta, \eta)$.

(Разпространява α по линейност.)

Останалата част от доказателството на Теорема 3 - в записките.

Реализацията на $(aa^* - CCR)$, която намерихме се нарича бозонно пространство на Фок (Fock space)

$$\mathcal{H} := \text{Fock}(\mathcal{H}_1) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n(\mathcal{H}_1^{\otimes n})$$

В следващата лекция ще въведем и фермионното фоково пространство.

https://en.wikipedia.org/wiki/Fock_space