

Представене на Лекция 4 / 2013 по файл :

N.N., QFT Lecture 4 (v3)

1. Уравнения за движение в картината на Хайзенберг

1. Уравнения за движение в картината на Хайзенберг

При автономните динамични системи операторите на еволюция приемат вида:

$$U(t) = e^{itH}, \text{ а } H = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} U(t) \Big|_{t=0} \text{ е оператора на Хамилтон.}$$

1. Уравнения за движение в картината на Хайзенберг

При автономните динамични системи операторите на еволюция приемат вида:

$$U(t) = e^{itH}, \text{ а } H = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} U(t) \Big|_{t=0} \text{ е оператора на Хамилтон.}$$

Тук t играе ролята на времето протекло между началния и крайния момент и затова законът за композиция приема вида

$$U(t_1)U(t_2) = U(t_1 + t_2) \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}), \quad U(0) = \hat{1}.$$

1. Уравнения за движение в картината на Хайзенберг

При автономните динамични системи операторите на еволюция приемат вида:

$$U(t) = e^{itH}, \text{ а } H = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} U(t) \Big|_{t=0} \text{ е оператора на Хамилтон.}$$

Тук t играе ролята на времето протекло между началния и крайния момент и затова законът за композиция приема вида

$$U(t_1)U(t_2) = U(t_1 + t_2) \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}), \quad U(0) = \hat{1}.$$

Една наблюдаема A ще еволюира в картината на Хайзенберг по формулата

$$A(t) = e^{itH} A e^{-itH}$$

И така, еволюция на наблюдаема A в картината на Хайзенберг:

$$A(t) = e^{itH} A e^{-itH} \quad (U(t) = e^{itH})$$

И така, еволюция на наблюдаема A в картината на Хайзенберг:

$$A(t) = e^{itH} A e^{-itH} \quad (U(t) = e^{itH})$$

Тогава: $\frac{dA}{dt}(t) = ?$

И така, еволюция на наблюдаема A в картината на Хайзенберг:

$$A(t) = e^{itH} A e^{-itH} \quad (U(t) = e^{itH})$$

Тогава:
$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{dU}{dt}(t) A U(t)^{-1} + U(t) A \frac{dU^{-1}}{dt}$$

И така, еволюция на наблюдаема A в картината на Хайзенберг:

$$A(t) = e^{itH} A e^{-itH} \quad (U(t) = e^{itH})$$

Тогава:
$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{dU}{dt}(t) A U(t)^{-1} + U(t) A \frac{dU^{-1}}{dt}$$

$$= i H U(t) A U(t)^{-1} - U(t) A U(t)^{-1} \frac{dU}{dt} U^{-1}$$

И така, еволюция на наблюдаема A в картината на Хайзенберг:

$$A(t) = e^{itH} A e^{-itH} \quad (U(t) = e^{itH})$$

Тогава: $\frac{dA}{dt}(t) = \underbrace{\frac{dU}{dt}(t)}_{\text{arrow}} A U(t)^{-1} + U(t) A \frac{dU^{-1}}{dt}$

$$= i H U(t) A U(t)^{-1} - U(t) A U(t)^{-1} \frac{dU}{dt} U^{-1}$$

И така, еволюция на наблюдаема A в картината на Хайзенберг:

$$A(t) = e^{itH} A e^{-itH} \quad (U(t) = e^{itH})$$

Тогава: $\frac{dA}{dt}(t) = \underbrace{\frac{dU}{dt}(t) A U(t)^{-1}} + U(t) A \frac{dU^{-1}}{dt}$

$$= i H U(t) A U(t)^{-1} - U(t) A U(t)^{-1} \frac{dU}{dt} U^{-1}$$

И така, еволюция на наблюдаема A в картината на Хайзенберг:

$$A(t) = e^{itH} A e^{-itH} \quad (U(t) = e^{itH})$$

Тогава:

$$\frac{dA}{dt}(t) = \underbrace{\frac{dU}{dt}(t) A U(t)^{-1}}_{\substack{\text{arrow from } iH U(t) A U(t)^{-1}}} + U(t) A \underbrace{\frac{dU^{-1}}{dt}}_{\substack{\text{arrow from } -U(t) A U(t)^{-1} \frac{dU}{dt} U^{-1}}}$$

$$= iH U(t) A U(t)^{-1} - U(t) A U(t)^{-1} \frac{dU}{dt} U^{-1}$$

И така, еволюция на наблюдаема A в картината на Хайзенберг:

$$A(t) = e^{itH} A e^{-itH} \quad (U(t) = e^{itH})$$

Тогава:

$$\frac{dA}{dt}(t) = \underbrace{\frac{dU}{dt}(t) A U(t)^{-1}}_{\substack{\leftarrow \\ \underbrace{U(t) A U(t)^{-1}}_{A(t)}}} + U(t) A \underbrace{\frac{dU^{-1}}{dt}}_{\substack{\leftarrow \\ \underbrace{U(t) A U(t)^{-1} \frac{dU}{dt} U^{-1}}_{A(t)}}}$$

$$= iH \underbrace{U(t) A U(t)^{-1}}_{A(t)} - \underbrace{U(t) A U(t)^{-1}}_{A(t)} \frac{dU}{dt} U^{-1}$$

И така, еволюция на наблюдаема A в картината на Хайзенберг:

$$A(t) = e^{itH} A e^{-itH} \quad (U(t) = e^{itH})$$

Тогава: $\frac{dA}{dt}(t) = \underbrace{\frac{dU}{dt}(t)}_{\text{arrow}} A U(t)^{-1} + U(t) A \underbrace{\frac{dU^{-1}}{dt}}_{\text{arrow}}$

$$= iH \underbrace{U(t) A U(t)^{-1}}_{A(t)} - \underbrace{U(t) A U(t)^{-1}}_{A(t)} \frac{dU}{dt} U^{-1}$$

$$= iH A(t) - A(t) iH U(t) U(t)^{-1}$$

И така, еволюция на наблюдаема A в картината на Хайзенберг:

$$A(t) = e^{itH} A e^{-itH} \quad (U(t) = e^{itH})$$

Тогава: $\frac{dA}{dt}(t) = \underbrace{\frac{dU}{dt}(t)}_{\leftarrow} A U(t)^{-1} + U(t) A \underbrace{\frac{dU^{-1}}{dt}}_{\leftarrow}$

$$= iH \underbrace{U(t) A U(t)^{-1}}_{A(t)} - \underbrace{U(t) A U(t)^{-1}}_{A(t)} \frac{dU}{dt} U^{-1}$$

$$= iH A(t) - A(t) iH \cancel{U(t)} \cancel{U(t)^{-1}}$$

И така, еволюция на наблюдаема A в картината на Хайзенберг:

$$A(t) = e^{itH} A e^{-itH} \quad (U(t) = e^{itH})$$

Тогава: $\frac{dA}{dt}(t) = \underbrace{\frac{dU}{dt}(t)}_{\text{arrow}} A U(t)^{-1} + U(t) A \underbrace{\frac{dU^{-1}}{dt}}_{\text{arrow}}$

$$= iH \underbrace{U(t) A U(t)^{-1}}_{A(t)} - \underbrace{U(t) A U(t)^{-1}}_{A(t)} \frac{dU}{dt} U^{-1}$$

$$= iH A(t) - A(t) iH \cancel{U(t)} \cancel{U(t)^{-1}}$$

$$= i(H \cdot A(t) - A(t) \cdot H) =: i[H, A(t)],$$

$$\text{Тогава : } \frac{dA}{dt}(t) =: i[H, A(t)],$$

Тогава: $\frac{dA}{dt}(t) =: i[H, A(t)],$

където сме положили

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A,$$

което наричаме комутатор на A и B .

Тогава : $\frac{dA}{dt}(t) =: i [H, A(t)] ,$

където сме положили

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A ,$$

което наричаме *комутатор* на A и B . И така ,

$$\frac{dA(t)}{dt} = i [H, A(t)] \quad (H)$$

представлява и търсеното диференциално уравнение за движение , т.е. , за еволюцията на наблюдаема A в картината на Хајзенберг.

Тогава : $\frac{dA}{dt}(t) =: i [H, A(t)] ,$

където сме положили

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A ,$$

което наричаме *комутатор* на A и B . И така ,

$$\frac{dA(t)}{dt} = i [H, A(t)] \quad (H)$$

представлява и търсеното диференциално уравнение за движение , т.е. , за еволюцията на наблюдаема A в картината на Хајзенберг. (То може да се нарече също и "квантово уравнение за движение".)

Тогава : $\frac{dA}{dt}(t) =: i [H, A(t)] ,$

където сме положили

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A ,$$

което наричаме *комутатор* на A и B . И така ,

$$\frac{dA(t)}{dt} = i [H, A(t)] \quad (H)$$

Уравнението (H) ще ни даде възможност да направим съответствие с понятия от класическата механика.

2 Свойства на комутаторите

2 Свойства на комутаторите

Непосредствено от определения $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$
следва :

2 Свойства на комутаторите

Непосредствено от определения $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ следва :

(C1) антисиметрия: $[A, B] = -[B, A]$.

2 Свойства на комутаторите

Непосредствено от определениято $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ следва :

(C1) антисиметрия: $[A, B] = -[B, A]$.

(C2) Правило на Лайбниц (Leibniz rule):

$$[A, B \cdot C] = [A, B] \cdot C + B \cdot [A, C].$$

2 Свойства на комутаторите

(C1) антисиметрия: $[A, B] = -[B, A]$.

(C2) Правило на Лайбниц (Leibniz rule):

$$[A, B \cdot C] = [A, B] \cdot C + B \cdot [A, C].$$

2 Свойства на комутаторите

(C1) антисиметрия: $[A, B] = -[B, A]$.

(C2) Правило на Лайбниц (Leibniz rule):

$$[A, B \cdot C] = [A, B] \cdot C + B \cdot [A, C].$$

По такъв начин, лявата и дясната страни на уравнението (H) се държат еднакво върху произведения.

$$\frac{dA(t)}{dt} = i[H, A(t)]$$


2 Свойства на комутаторите

(C1) антисиметрия: $[A, B] = -[B, A]$.

(C2) Правило на Лайбниц (Leibniz rule):

$$[A, B \cdot C] = [A, B] \cdot C + B \cdot [A, C].$$

(C3) тождество на Якоби (Jacobi's identity)

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]].$$

2 Свойства на комутаторите

(C1) антисиметрия: $[A, B] = -[B, A]$.

(C2) Правило на Лайбниц (Leibniz rule):

$$[A, B \cdot C] = [A, B] \cdot C + B \cdot [A, C].$$

(C3) тождество на Якоби (Jacobi's identity)

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]].$$

И така, едноместната операция "комутатор с A ", $[A, \square]$, е диференциране както на " $\cdot$ " така и на $[\square, \square]$.

2 Свойства на комутаторите

(C1) антисиметрия: $[A, B] = -[B, A]$.

(C2) Правило на Лайбниц (Leibniz rule):

$$[A, B \cdot C] = [A, B] \cdot C + B \cdot [A, C].$$

(C3) тождество на Якоби (Jacobi's identity)

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]].$$

(C4) Реалност: $[A^*, B^*] = -[A, B]^*$.

Забелешка. Ако V е векторно пространство снабдено с дву-местна
билинейна операция $\mu: V \times V \rightarrow V$

Забелешка. Ако V е векторно пространство снабдено с дву-местна билинейна операция $\mu: V \times V \rightarrow V$ и $\varphi: V \rightarrow V$ е линейно изображение такова, че за $\forall u, v \in V$:

$$\varphi(\mu(u, v)) = \mu(\varphi(u), v) + \mu(u, \varphi(v))$$

Забележка. Ако V е векторно пространство снабдено с дву-местна билинейна операция $\mu: V \times V \rightarrow V$ и $\gamma: V \rightarrow V$ е линейно изображение такова, че за $\forall u, v \in V$:

$$\gamma(\mu(u, v)) = \mu(\gamma(u), v) + \mu(u, \gamma(v))$$

то казваме, че γ е **диференциране** на операцията μ .

Забележка. Ако V е векторно пространство снабдено с дву-местна билинейна операция $\mu: V \times V \rightarrow V$ и $\gamma: V \rightarrow V$ е линейно изображение такова, че за $\forall u, v \in V$:

$$\gamma(\mu(u, v)) = \mu(\gamma(u), v) + \mu(u, \gamma(v))$$

то казваме, че γ е **диференциране** на операцията μ . Смыслът на диференциранията е на "инфинитезимальни" морфизми:

Забележка. Ако V е векторно пространство снабдено с дву-местна билинейна операция $\mu: V \times V \rightarrow V$ и $\varphi: V \rightarrow V$ е линейно изображение такова, че за $\forall u, v \in V$:

$$\varphi(\mu(u, v)) = \mu(\varphi(u), v) + \mu(u, \varphi(v))$$

то казваме, че φ е **диференциране** на операцията μ . Смыслът на диференцирането е на "инфинитезимальни" морфизми: ако $\alpha_\varepsilon: V \rightarrow V$ е еднопараметрично семейство от морфизми на операцията μ :

$$\alpha_\varepsilon(\mu(u, v)) = \mu(\alpha_\varepsilon(u), \alpha_\varepsilon(v))$$

Забележка. Ако V е векторно пространство снабдено с дву-местна билинейна операция $\mu: V \times V \rightarrow V$ и $\varphi: V \rightarrow V$ е линейно изображение такава, че за $\forall u, v \in V$:

$$\varphi(\mu(u, v)) = \mu(\varphi(u), v) + \mu(u, \varphi(v))$$

то казваме, че φ е **диференциране** на операцията μ . Смыслът на диференцирането е на "инфинитезимальни" морфизми: ако $\alpha_\varepsilon: V \rightarrow V$ е еднопараметрично семейство от морфизми на операцията μ :

$$\alpha_\varepsilon(\mu(u, v)) = \mu(\alpha_\varepsilon(u), \alpha_\varepsilon(v))$$

зависещо от параметър $\varepsilon \in \mathbb{R}$ така, че:

Забележка. Ако V е векторно пространство снабдено с дву-местна билинейна операция $\mu: V \times V \rightarrow V$ и $\gamma: V \rightarrow V$, т.е.

$$\gamma(\mu(u, v)) = \mu(\gamma(u), v) + \mu(u, \gamma(v)) \quad \forall u, v \in V:$$

то казваме, че γ е **диференциране** на операцията μ . Смисълът на диференцирането е на "инфинитезимальни" морфизми: ако $\alpha_\varepsilon: V \rightarrow V$ е еднопараметрично семейство от морфизми

$$\alpha_\varepsilon(\mu(u, v)) = \mu(\alpha_\varepsilon(u), \alpha_\varepsilon(v)) \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Забележка. Ако V е векторно пространство снабдено с дву-местна билинейна операция $\mu: V \times V \rightarrow V$ и $\mathcal{L}: V \rightarrow V$, т.е.

$$\mathcal{L}(\mu(u, v)) = \mu(\mathcal{L}(u), v) + \mu(u, \mathcal{L}(v)) \quad \forall u, v \in V:$$

то казваме, че $\mathcal{L}$ е **диференциране** на операцията μ . Смыслът на диференцирането е на "инфинитезимальни" морфизми: ако $\alpha_\varepsilon: V \rightarrow V$ е еднопараметрично семейство от морфизми

$$\alpha_\varepsilon(\mu(u, v)) = \mu(\alpha_\varepsilon(u), \alpha_\varepsilon(v)) \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_\varepsilon(u) = u + \varepsilon \cdot \mathcal{L}(u) + O(\varepsilon^2)$$

Забележка. Ако V е векторно пространство снабдено с дву-местна билинейна операция $\mu: V \times V \rightarrow V$ и $\mathcal{L}: V \rightarrow V$, т.е.

$$\mathcal{L}(\mu(u, v)) = \mu(\mathcal{L}(u), v) + \mu(u, \mathcal{L}(v)) \quad \forall u, v \in V:$$

то казваме, че $\mathcal{L}$ е **диференциране** на операцията μ . Смисълът на диференцирането е на "инфинитезимальни" морфизми: ако $\alpha_\varepsilon: V \rightarrow V$ е еднопараметрично семейство от морфизми

$$\alpha_\varepsilon(\mu(u, v)) = \mu(\alpha_\varepsilon(u), \alpha_\varepsilon(v)) \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_\varepsilon(u) = u + \varepsilon \cdot \mathcal{L}(u) + O(\varepsilon^2), \quad \text{тогава}$$

$$\alpha_\varepsilon(\mu(u, v)) = \mu(u, v) + \varepsilon \underline{\mathcal{L}(\mu(u, v))} + O(\varepsilon^2)$$

Забележка.

ако $\alpha_\varepsilon: V \rightarrow V$ е еднопараметрично семейство от морфизми

$$\alpha_\varepsilon(\mu(u, v)) = \mu(\alpha_\varepsilon(u), \alpha_\varepsilon(v)) \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_\varepsilon(u) = u + \varepsilon \cdot f(u) + O(\varepsilon^2), \text{ тогава}$$

$$\alpha_\varepsilon(\mu(u, v)) = \mu(u, v) + \varepsilon \underline{f(\mu(u, v))} + O(\varepsilon^2)$$

Забележка.

ако $\alpha_\varepsilon: V \rightarrow V$ е еднопараметрично семейство от морфизми

$$\alpha_\varepsilon(\mu(u, v)) = \mu(\alpha_\varepsilon(u), \alpha_\varepsilon(v)) \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_\varepsilon(u) = u + \varepsilon \cdot f(u) + O(\varepsilon^2), \text{ тогава}$$

$$\alpha_\varepsilon(\mu(u, v)) = \mu(u, v) + \varepsilon \underline{f(\mu(u, v))} + O(\varepsilon^2)$$

||

$$\mu(\alpha_\varepsilon(u), \alpha_\varepsilon(v)) = \mu(u, v) + \varepsilon \underline{(\mu(f(u), v) + \mu(u, f(v)))} + O(\varepsilon^2)$$

Забележка.

ако $\alpha_\varepsilon: V \rightarrow V$ е еднопараметрично семейство от морфизми

$$\alpha_\varepsilon(\mu(u, v)) = \mu(\alpha_\varepsilon(u), \alpha_\varepsilon(v)) \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_\varepsilon(u) = u + \varepsilon \cdot f(u) + O(\varepsilon^2), \text{ тогава}$$

$$\alpha_\varepsilon(\mu(u, v)) = \mu(u, v) + \varepsilon \underline{f(\mu(u, v))} + O(\varepsilon^2)$$

||

$$\mu(\alpha_\varepsilon(u), \alpha_\varepsilon(v)) = \mu(u, v) + \varepsilon \underline{(\mu(f(u), v) + \mu(u, f(v)))} + O(\varepsilon^2)$$

т.е., f е диференциране на μ .

Трите свойства (C1), (C2) и (C3) определят алгебрична структура наречена (евентуално некомутативна) алгебра на Поасон / (noncommutative) Poisson algebra.

Трите свойства (C1), (C2) и (C3) определят алгебрична структура наречена (евентуално некомутативна) алгебра на Поасон / (noncommutative) Poisson algebra. С други думи, това е асоциативна алгебра $\mathcal{A}$, която е допълнително снабдена със структура на алгебра на Ли, така че скобката на Ли е диференциране на произведението (т.е., изглежда се правилото на Лайбниц (C2)).

Трите свойства (C1), (C2) и (C3) определят алгебрична структура наречена (евентуално некомутативна) алгебра на Поасон / (noncommutative) Poisson algebra. С други думи, това е асоциативна алгебра $\mathcal{A}$, която е допълнително снабдена със структура на алгебра на Ли, така че скобката на Ли е диференциране на произведението (т.е., изглежда се прилага правилото на Лайбниц (C2)). Отбелязваме, че в една абстрактна (некомутативна) Поасонова алгебра скобката на Ли може да не бъде непременно равна на комутатора, макар от друга страна, всяка асоциативна алгебра да се превръща в Поасонова спрямо комутатора.

3. Класическа граница и принципи на съответствието

3.1. Оператор на Хамилтон и енергия

Особен интерес при автономните динамични системи представляват запазващите се величини в хода на еволюцията, които както още казваме, задават закони за запазване.

3. Класическа граница и принципи на съответствието

3.1. Оператор на Хамилтон и енергия

Особен интерес при автономните динамични системи представляват запазващите се величини в хода на еволюцията, които както още казваме, задават закони за запазване. В теорията на обикновените диференциални уравнения запазващите се величини (функции) се наричат първи интеграли.

3. Класическа граница и принципи на съответствието

3.1. Оператор на Хамилтон и енергия

Особен интерес при автономните динамични системи представляват запазващите се величини в хода на еволюцията, които както още казваме, задават закони за запазване. В теорията на обикновените диференциални уравнения запазващите се величини (функции) се наричат първи интеграли. В случая на квантова динамична система, от уравненията (H) за еволюция на наблюдаеми полусгаваме, че

A е запазваща се величина $\iff [H, A] = 0$.

3. Класическа граница и принципи на съответствието

3.1. Оператор на Хамилтон и енергия

A е запазваща се величина $\iff [H, A] = 0$.

В частност, H и A са едновременно измерими. Също така,

$[H, H] = 0 \implies H$ е запазваща се величина.

От друга страна, енергията на системата е един от основните примери на запазваща се величина. Разбира се това само по себе си не е достатъчен мотив да отождествим оператора на Хамилтон H с оператора представящ енергията. В полза на такова отождествяване обаче има друг основен мотив:

От друга страна, енергията на системата е един от основните примери на запазваща се величина. Разбира се това само по себе си не е достатъчен мотив да отождествим оператора на Хамилтон H с операторът представящ енергията. В полза на такова отождествяване обаче има друг основен мотив: както отбелязахме уравненията (H) за еволюцията на наблюдаемите имат естествен аналог в класическата механика и по специално, в Хамилтоновата механика.

От друга страна, енергията на системата е един от основните примери на запазваща се величина. Разбира се това само по себе си не е достатъчен мотив да отождествим оператора на Хамилтон H с операторът представящ енергията. В полза на такова отождествяване обаче има друг основен мотив: както отбелязахме уравненията (H) за еволюцията на наблюдаемите имат естествен аналог в класическата механика и по специално, в Хамилтоновата механика.

Там се имат вида

$$\frac{dA}{dt} = \{H, A\}$$

От друга страна, енергията на системата е един от основните примери на запазваща се величина. Разбира се това само по себе си не е достатъчен мотив да отъждествим оператора на Хамилтон H с операторът представящ енергията. В полза на такова отъждествяване обаче има друг основен мотив: както отбелязахме уравненията (H) за еволюцията на наблюдаемите имат естествен аналог в класическата механика и по специално, в Хамилтоновата механика.

Там се имат вида

$$\frac{dA}{dt} = \{H, A\},$$

където H е функцията на Хамилтон, представяща именно енергията на системата

От друга страна, енергията на системата е един от основните примери на запазваща се величина. Разбира се това само по себе си не е достатъчен мотив да отъждествим оператора на Хамилтон H с операторът представящ енергията. В полза на такова отъждествяване обаче има друг основен мотив: както отбелязахме уравненията (H) за еволюцията на наблюдаемите имат естествен аналог в класическата механика и по специално, в Хамилтоновата механика.

Там се имат вида

$$\frac{dA}{dt} = \{H, A\},$$

където H е функцията на Хамилтон, представяща именно енергията на системата, а $\{ _, _ \}$ е така наречената скобка на Пуасон в класическата механика.

Постулат. Операторът на Хамилтон H представя наблюдаемата величина съответстваща на енергията на системата.

Постулат. Операторът на Хамилтон H представя наблюдаемата величина съответстваща на енергията на системата.

От гледна точка на размерности обаче, връзката

$$\frac{d}{dt} = i [H, \quad]$$

излиза от уравнението (H) означава, че H има за сега размерност на $1/t$, т.е., на $1/\text{време}$.

Постулат. Операторът на Хамилтон H представя наблюдаемата величина съответстваща на енергията на системата.

От гледна точка на размерности обаче, връзката

$$\frac{d}{dt} = i [H, \quad]$$

идваща от уравнението (H) означава, че H има за сега размерност на $1/t$, т.е., на $1/\text{време}$.

Да си припомним

$$\text{Енергия} \cdot \text{време} = [\hbar] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{размерността на} \\ \text{константата на Планк.} \end{array} \right.$$

Да си припомним

$$\text{Енергия} \cdot \text{време} = [\hbar] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{размерността на} \\ \text{константата на Планк.} \end{array} \right.$$

Да си припомним

$$\text{Енергия} \cdot \text{време} = [\hbar] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{размерността на} \\ \text{константата на Планк.} \end{array} \right.$$

Следователно, $1/\text{време} = \text{Енергия} / [\hbar]$ и така, операторът на Хамилтон ще придобие размерност на енергия, ако ние го предефинираме като:

$$H \mapsto \frac{1}{\hbar} H,$$

Да си припомним

$$\text{Енергия} \cdot \text{време} = [\hbar] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{размерността на} \\ \text{константата на Планк.} \end{array} \right.$$

Следователно, $1/\text{време} = \text{Енергия} / [\hbar]$ и така, операторът на Хамилтон ще придобие размерност на енергия, ако ние го предефинираме като:

$$H \mapsto \frac{1}{\hbar} H,$$

което следва се положи във всички досегашни формули, съдържащи хамилтониани, като например:

$$U(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H \cdot t}, \quad \frac{dU}{dt} = \frac{i}{\hbar} H U(t)$$

Да си припомним

$$\text{Енергия} \cdot \text{време} = [\hbar] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{размерността на} \\ \text{константата на Планк.} \end{array} \right.$$

Следователно, $1/\text{време} = \text{Енергия} / [\hbar]$ и така

$$H \mapsto \frac{i}{\hbar} H,$$

което следва се положи във всички досегашни формули,

$$U(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H \cdot t}, \quad \frac{dU}{dt} = \frac{i}{\hbar} H U(t)$$

Да си припомним

$$\text{Енергия} \cdot \text{време} = [\hbar] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{размерността на} \\ \text{константата на Планк.} \end{array} \right.$$

Следователно, $1/\text{време} = \text{Енергия} / [\hbar]$ и така

$$H \mapsto \frac{i}{\hbar} H,$$

което следва се положи във всички досегашни формули,

$$U(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H \cdot t}, \quad \frac{dU}{dt} = \frac{i}{\hbar} H U(t)$$

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{i}{\hbar} [H, A(t)].$$

Следователно, $1/\text{време} = \text{Енергия} / [\hbar]$ и така

$$H \mapsto \frac{1}{\hbar} H,$$

което следва се положи във всички досегашни формули,

$$U(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H \cdot t}, \quad \frac{dU}{dt} = \frac{i}{\hbar} H U(t)$$

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{i}{\hbar} [H, A(t)].$$

Следователно, $1/\text{време} = \text{Енергия} / [\hbar]$ и така

$$H \mapsto \frac{1}{\hbar} H,$$

което следва се положи във всички досегашни формули,

$$U(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H \cdot t}, \quad \frac{dU}{dt} = \frac{i}{\hbar} H U(t)$$

$$\frac{dA}{dt}(t) = \frac{i}{\hbar} [H, A(t)].$$

Разбира се, това предефиниране може да се избегне като положим да работим в система от единици в която $\hbar = 1$

3.2. Класическа граница.

Нека ни представим абстрактно $\hbar$ като един евентуално свободен параметър в квантовата физика и да разгледаме границата

$$\hbar \rightarrow 0.$$

Това се нарича "класическа граница" (classical limit) тъй като ние очакваме, че при този преход квантовата механика ще премине в класическа механика.

3.2. Класическа граница.

Нека ни представим абстрактно $\hbar$ като един евентуално свободен параметър в квантовата физика и да разгледаме границата

$$\hbar \rightarrow 0.$$

Това се нарича "класическа граница" (classical limit).

3.2. Класическа граница.

Нека ни представим абстрактно $\hbar$ като един евентуално свободен параметър в квантовата физика и да разгледаме границата

$$\hbar \rightarrow 0.$$

Това се нарича "класическа граница" (classical limit).

По точно, квантовите системи при определени условия, като напр.

$$(\text{Енергия на системата}) \cdot (\text{Време за еволюция}) \gg \hbar$$

могат да "емитират" прехода $\hbar \rightarrow 0$ и да се поддават на класическо описание.

И така, при прехода $\hbar \rightarrow 0$ в уравненията (H) за изменение на наблюдаемите ползваваме неопределеност:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, A(t)] \sim \frac{0}{0}.$$

И така, при прехода $\hbar \rightarrow 0$ в уравненията (H) за изменение на наблюдаемите ползваваме неопределеност:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, A(t)] \sim \frac{0}{0}.$$

Наистина, освен че $\hbar \rightarrow 0$ ние отакваме при този преход наблюдаемите да станат конфигурации (и следователно, едновременно измерими), както е в класическата физика

И така, при прехода $\hbar \rightarrow 0$ в уравненията (H) за изменение на наблюдаемите ползваваме неопределеност:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, A(t)] \sim \frac{0}{0}.$$

Наистина, освен че $\hbar \rightarrow 0$ ние отакваме при този преход наблюдаемите да станат конфигурации (и следователно, едновременно измерими), както е в класическата физика; и затова

$$[H, A(t)] = HA - AH \rightarrow 0 \quad (\text{при } \hbar \rightarrow 0).$$

И така, при прехода $\hbar \rightarrow 0$ в уравненията (H) за изменение на наблюдаемите ползваваме неопределеност:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, A(t)] \sim \frac{0}{0}.$$

Наистина, освен че $\hbar \rightarrow 0$ ние отакваме при този преход наблюдаемите да станат конфигурации (и следователно, едновременно измерими), както е в класическата физика; и затова

$$[H, A(t)] = HA - AH \rightarrow 0 \quad (\text{при } \hbar \rightarrow 0).$$

Ние ще постулираме обаче, че горната неопределеност има граница.

Поступат. При границата $\hbar \rightarrow 0$ асоциативната алгебра на наблюдаемите преминава в комутативна алгебра

Поступат. При границата $\hbar \rightarrow 0$ асоциативната алгебра на наблюдаемите преминава в комутативна алгебра, а границата

$$\frac{i}{\hbar} [A, B] \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \{A, B\}$$

Поступат. При границата $\hbar \rightarrow 0$ асоциативната алгебра на наблюдаемите преминава в комутативна алгебра, а границата

$$\frac{i}{\hbar} [A, B] \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \{A, B\}$$

съществува за всеки две наблюдаеми величини A и B

Поступат. При границата $\hbar \rightarrow 0$ асоциативната алгебра на наблюдаемите преминава в комутативна алгебра, а границата

$$\frac{i}{\hbar} [A, B] \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \{A, B\}$$

съществува за всеки две наблюдаеми величини A и B , и задава скобка на Поасон, превръщайки граничната комутативна алгебра на наблюдаемите в алгебра на Поасон.

Поступат. При границата $\hbar \rightarrow 0$ асоциативната алгебра на наблюдаемите преминава в комутативна алгебра, а границата

$$\frac{i}{\hbar} [A, B] \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \{A, B\}$$

съществува за всеки две наблюдаеми величини A и B , и задава скобка на Пуасон, превръщайки граничната комутативна алгебра на наблюдаемите в алгебра на Пуасон. Тази именно Пуасонова алгебра съответства на класическата динамична система, която е класическата граница на изходната квантова динамична система.

4. Преглед на класическата механика.

В лекциите ни до тук ние изложихме основите на квантовата механика по независим път от класическата механика и едва на последния етап ние направихме връзка между двете теории. В тази точка ние ще направим преглед на необходимите за курса понятия от класическата механика с минимални допълнения целящи да направят изложението логически по-последователно. От гледна точка на настоящия курс класическата механика ще има значение единствено като "доставяща" модели, които ние следва да трансформираме в квантови модели, т.е., да ги квантуваме. Самият произход ("генезис") на тези модели обаче остава извън целите на настоящия курс.

4.1. Нютонова механика

В Нютоновата механика ние описваме движението на една система, като крива $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t)) \equiv (q_j(t))_{j=1}^n$.

4.1. Нютонова механика

В Нютоновата механика ние описваме движението на една система, като крива $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t)) \equiv (q_j(t))_{j=1}^n$,

в пространство параметризирано с "вътрешни" координати

$$q = (q_1, \dots, q_n)$$

4.1. Нютонова механика

В Нютоновата механика ние описваме движението на една система, като крива $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t)) \equiv (q_j(t))_{j=1}^n$,

в пространство параметризирано с "вътрешни" координати

$$q = (q_1, \dots, q_n)$$

и наричано *конфигурационно пространство* на системата.

4.1. Нютонова механика

В Нютоновата механика ние описваме движението на една система, като крива $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t)) \equiv (q_j(t))_{j=1}^n$,

в пространство параметризирано с "вътрешни" координати

$$q = (q_1, \dots, q_n)$$

и наричано **конфигурационно пространство** на системата.

Числото n е един от основните параметри на системата и се нарича **брой на степените на свобода**.

Основният въпрос е каква информация трябва да зададем в един определен момент от време t_0 за да определим напълно закона за движение $q(t)$ на системата.

Основният въпрос е каква информация трябва да зададем в един определен момент от време t_0 за да определим напълно закона за движение $q(t)$ на системата. Отговорът се дава от втория принцип на Нютон: освен положението на системата $q(t_0)$ в момента t_0 ние трябва да зададем и нейната скорост:

$$\dot{q}(t_0) = \left(\dot{q}_j(t_0) \right)_{j=1}^n = \left(\frac{d q_j}{dt}(t_0) \right)_{j=1}^n.$$

Основният въпрос е каква информация трябва да зададем в един определен момент от време t_0 за да определим напълно закона за движение $q(t)$ на системата. Отговорът се дава от втория принцип на Нютон: освен положението на системата $q(t_0)$ в момента t_0 ние трябва да зададем и нейната скорост:

$$\dot{q}(t_0) = \left(\dot{q}_j(t_0) \right)_{j=1}^n = \left(\frac{d q_j}{d t}(t_0) \right)_{j=1}^n.$$

С това е определен закона за движение $q(t)$ и в частност

$$\ddot{q}(t_0) := \left(\frac{d^2 q_j}{d t^2}(t_0) \right)_{j=1}^n = \text{функция на } q(t_0) \text{ и } \dot{q}(t_0).$$

Съгласно втория принцип на Нютон: освен положението на системата $q(t_0)$ в момента t_0 ние трябва да зададем и нейната скорост:

$$\dot{q}(t_0) = \left(\dot{q}_j(t_0) \right)_{j=1}^n = \left(\frac{dq_j}{dt}(t_0) \right)_{j=1}^n.$$

Съгласно втория принцип на Нютон: освен положението на системата $q(t_0)$ в момента t_0 ние трябва да зададем и нейната скорост:

$$\dot{q}(t_0) = \left(\dot{q}_j(t_0) \right)_{j=1}^n = \left(\frac{d q_j}{dt}(t_0) \right)_{j=1}^n.$$

С това е определен закона за движение $q(t)$ и в частност

$$\ddot{q}(t_0) := \left(\frac{d^2 q_j}{dt^2}(t_0) \right)_{j=1}^n = \text{функция на } q(t_0) \text{ и } \dot{q}(t_0).$$

Съгласно втория принцип на Нютон: освен положението на системата $q(t_0)$ в момента t_0 ние трябва да зададем и нейната скорост:

$$\dot{q}(t_0) = \left(\dot{q}_j(t_0) \right)_{j=1}^n = \left(\frac{d q_j}{dt}(t_0) \right)_{j=1}^n.$$

С това е определен закона за движение $q(t)$ и в частност

$$\ddot{q}(t_0) := \left(\frac{d^2 q_j}{dt^2}(t_0) \right)_{j=1}^n = \text{функция на } q(t_0) \text{ и } \dot{q}(t_0).$$

С други думи, ускорението на системата може да се представи като функция на положението q и скоростта $\dot{q}$ на системата в даден момент от време:

Съгласно втория принцип на Нютон: освен положението на системата $q(t_0)$ в момента t_0 ние трябва да зададем и нейната скорост:

$$\dot{q}(t_0) = \left(\dot{q}_j(t_0) \right)_{j=1}^n = \left(\frac{d q_j}{dt}(t_0) \right)_{j=1}^n.$$

С това е определен закона за движение $q(t)$ и в частност

$$\ddot{q}(t_0) := \left(\frac{d^2 q_j}{dt^2}(t_0) \right)_{j=1}^n = \text{функция на } q(t_0) \text{ и } \dot{q}(t_0).$$

С други думи,

$$| \ddot{q}_j(t) = A_j(q(t), \dot{q}(t), t), \quad j = 1, \dots, n. \quad (N)$$

4.2. Лагранжева механика.

При Лагранжевата механика уравненията за движение (N) се получават от принципа за най-малкото действие (action principle).

4.2. Лагранжева механика.

При Лагранжевата механика уравненията за движение (N) се получават от **принципа за най-малкото действие (action principle)**. Предполага се, че е зададена функция върху множеството от всевъзможните закони за движение $\{q(t)\}$, която е от вида

$$S(\{q(t)\}_t) = \int_{t_0}^{t_1} dt \, L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

4.2. Лагранжева механика.

При Лагранжевата механика уравненията за движение (N) се получават от **принципа за най-малкото действие (action principle)**. Предполага се, че е зададена функция върху множеството от всевъзможните закони за движение $\{q(t)\}$, която е от вида

$$S(\{q(t)\}_t) = \int_{t_0}^{t_1} dt \, L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

и се нарича **действие** (или още, **функционал на действието**). Функцията $L(q, \dot{q}, t)$ участваща в S се нарича **лагранжиан**.

Така, $S(\{q(t)\}_t)$ е определен за произволна крива $\{q(t)\}_t$, но кривите отговарящи на реално движение съответстват на минимум на S или по-точно, на екстремум на S .

Така, $S(\{q(t)\}_t)$ е определен за произволна крива $\{q(t)\}_t$, но кривите отговарящи на реално движение съответстват на минимум на S или по-точно, на екстремум на S . Със средствата на вариационното смятане това условие се записва, като нулиране на вариационната производна на S върху законите за движение:

$$\left| \frac{\delta S}{\delta q_j(t)} = 0 \right., \quad j = 1, \dots, n. \quad (S')$$

Така, $S(\{q(t)\}_t)$ е определен за произволна крива $\{q(t)\}_t$, но кривите отговарящи на реално движение съответстват на минимум на S или по-точно, на екстремум на S . Със средствата на вариационното смятане това условие се записва, като нулиране на вариационната производна на S върху законите за движение:

$$\left| \frac{\delta S}{\delta q_j(t)} = 0 \right., \quad j = 1, \dots, n. \quad (S')$$

Уравненията (S') се наричат **уравнения на Лагранж**.

Така , действието (и Лагранжиана в него) се явява допълнителна структура към уравненията за движение .

Така, действието (и Лагранжиана в него) се явява допълнителна структура към уравненията за движение. Тази структура е свързана с отделянето на специални запазващи се величини (т.е., закони за запазване) главно място от които заема енергията на системата.

Така, действието (и Лагранжиана в него) се явява допълнителна структура към уравненията за движение. Тази структура е свързана с отделянето на специални запазващи се величини (т.е., закони за запазване) главно място от които заема енергията на системата. Тя се дефинира като :

$$H(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

и се нарича функция на Хамилтон или още **хамилтониан**.

Така, действието (и Лагранжиана в него) се явява допълнителна структура към уравненията за движение. Тази структура е свързана с отделянето на специални запазващи се величини (т.е., закони за запазване) главно място от които заема енергията на системата. Тя се дефинира като :

$$H(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

и се нарича функция на Хамилтон или още **хамилтониан**.

Динамични системи за които L , а от там и функциите H и A_j ($j=1, \dots, n$) не зависят от времето t се наричат автономни.

4.3. Хамилтонова механика

При ч. нар. неизродеиност на Лагранжиана имаме (локална) обратимост на следната трансформация във фазовото пр.:

$$(q, \dot{q}) \mapsto (q, p) \text{ , където } p = (p_j)_{j=1}^n := \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)_{j=1}^n ,$$

4.3. Хамилтонова механика

При ч.нар. неизродеиност на Лагранжиана имаме (локална) обратимост на следната трансформация във фазовото пр.:

$$(q, \dot{q}) \mapsto (q, p) \text{ , където } p = (p_j)_{j=1}^n := \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)_{j=1}^n ,$$

наричана трансформация на Лъџандър (Legendre), а функциите p се наричат (обобщени) импулси (спрегнати на координатите q).

4.3. Хамилтонова механика

При ч.нар. неизродееност на Лагранжиана имаме (локална) обратимост на следната трансформация във фазовото пр.:

$$(q, \dot{q}) \mapsto (q, p) \text{ , където } p = (p_j)_{j=1}^n := \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)_{j=1}^n ,$$

наричана трансформация на Лъџандер (Legendre), а функциите p се наричат (обобщени) импулси (спрегнати на координатите q).

В координатите (q, p) уравненията за движение $(\mathcal{D})$ приемат по-симетричен вид - това са уравненията на Хамилтон:

4.3. Хамилтонова механика

При ч.нар. неизродеиност на Лагранжиана имаме (локална) обратимост на следната трансформация във фазовото пр.:

$$(q, \dot{q}) \mapsto (q, p) \quad , \quad \text{където} \quad p = (p_j)_{j=1}^n := \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)_{j=1}^n ,$$

В координатите (q, p) уравненията за движение по-симетричен вид - това са уравненията на Хамилтон:

4.3. Хамилтонова механика

При ч.нар. неизроженост на Лагранжиана имаме (локална) обратимост на следната трансформация във фазовото пр.:

$$(q, \dot{q}) \mapsto (q, p) \text{ , където } p = (p_j)_{j=1}^n := \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)_{j=1}^n ,$$

В координатите (q, p) уравненията за движение по-симетричен вид - това са **уравненията на Хамилтон**:

$$\left| \begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} = \{H, q_j\} & \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \{H, p_j\} \\ & & (j &= 1, \dots, n), \quad (H) \end{aligned} \right.$$

В координатите (q, p) уравненията за движение (S) приемат по-симетричен вид - това са **уравненията на Хамилтон**:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \{H, q_j\} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \{H, p_j\} \end{array} \right. \quad (j = 1, \dots, n), \quad (H)$$

В координатите (q, p) уравненията за движение (Γ) приемат по-симетричен вид - това са **уравненията на Хамилтон**:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \{H, q_j\} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \{H, p_j\} \end{array} \right. \quad (j = 1, \dots, n), \quad (H)$$

където за произволни функции $f(q, p)$ и $g(q, p)$, тяхната **скобка на Поасон $\{f, g\}$** е отново функция на q и p

В координатите (q, p) уравненията за движение (σ) приемат по-симетричен вид - това са **уравненията на Хамилтон**:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \{H, q_j\} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \{H, p_j\} \end{array} \right. \quad (j = 1, \dots, n), \quad (H)$$

където за произволни функции $f(q, p)$ и $g(q, p)$, тяхната **скобка на Поасон $\{f, g\}$** е отново функция на q и p , която е определена по формулата:

В координатите (q, p) уравненията за движение (σ) приемат по-симетричен вид - това са уравненията на Хамилтон:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \{H, q_j\} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \{H, p_j\} \end{array} \right. \quad (j = 1, \dots, n), \quad (H)$$

където за произволни функции $f(q, p)$ и $g(q, p)$

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right). \quad (PB)$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \{H, q_j\} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \{H, p_j\} \end{array} \right. \quad (j = 1, \dots, n), \quad (H)$$

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right). \quad (PB)$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \{H, q_j\} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \{H, p_j\} \end{array} \right. \quad (j = 1, \dots, n), \quad (H)$$

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} \right). \quad (PB)$$

Непосредствено се проверява с помощта на правилата на диференциалното смятане, че алгебрата на гладките функции върху фазовото пространство се превръща в Поасонова алгебра спрямо скобката (PB).

В частност, за скобите на Пуасон на основните координатни функции получаваме:

$$\{q_j, q_k\} = 0 = \{p_j, p_k\},$$

(classical CCR)

$$\{p_j, q_k\} = \delta_{j,k} := \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

В частност, за скобките на Пуасон на основните координатни функции получаваме:

$$\{q_j, q_k\} = 0 = \{p_j, p_k\},$$

(classical CCR)

$$\{p_j, q_k\} = \delta_{j,k} := \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

↑ нарича се символ на Кронекер
(Kronecker's symbol).

В частност, за скобите на Пуасон на основните координатни функции получаваме:

$$\{q_j, q_k\} = 0 = \{p_j, p_k\}, \quad (\text{classical CCR})$$

$$\{p_j, q_k\} = \delta_{j,k} := \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}$$

Съотношенията (classical CCR) ще наречем *класически канонични "комутационни" съотношения / canonical "commutation" relations (CCR)*.

Съществуват и други координатни системи

$$(q, p) \mapsto (q', p') \quad , \quad \left| \begin{array}{l} q'_j = q'_j(q, p) \\ p'_j = p'_j(q, p) \end{array} \right. \quad j = 1, \dots, n$$

В частност, за скобките на Пуасон на основните координатни функции получаваме:

$$\begin{aligned} \{q_j, q_k\} &= 0 = \{p_j, p_k\}, \\ \{p_j, q_k\} &= \delta_{j,k} := \begin{cases} 1 & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{classical CCR})$$

Съществуват и други координатни системи

$$(q, p) \mapsto (q', p') \quad , \quad \left| \begin{aligned} q'_j &= q'_j(q, p) \\ p'_j &= p'_j(q, p), \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \right.$$

В частност, за скобите на Пуасон на основните координатни функции получаваме:

$$\begin{aligned} \{q_j, q_k\} &= 0 = \{p_j, p_k\}, \\ \{p_j, q_k\} &= \delta_{j,k} := \begin{cases} 1 & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{classical CCR})$$

Съществуват и други координатни системи

$$(q, p) \mapsto (q', p') \quad , \quad \left| \begin{aligned} q'_j &= q'_j(q, p) \\ p'_j &= p'_j(q, p), \quad j=1, \dots, n \end{aligned} \right.$$

със свойството:

$$\{q'_j, q'_k\} = 0 = \{p'_j, p'_k\}, \quad \{p'_j, q'_k\} = \delta_{j,k}.$$

В частност, за скобките на Пуасон на основните координатни функции получаваме:

$$\begin{aligned} \{q_j, q_k\} &= 0 = \{p_j, p_k\}, \\ \{p_j, q_k\} &= \delta_{j,k} := \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{classical CCR})$$

Съществуват и други координатни системи

$(q, p) \mapsto (q', p')$, със свойството:

$$\{q'_j, q'_k\} = 0 = \{p'_j, p'_k\}, \quad \{p'_j, q'_k\} = \delta_{j,k}.$$

В частност, за скобите на Пуасон на основните координатни функции получаваме:

$$\begin{aligned} \{q_j, q_k\} &= 0 = \{p_j, p_k\}, \\ \{p_j, q_k\} &= \delta_{j,k} := \begin{cases} 1 & \text{при } j=k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{classical CCR})$$

Съществуват и други координатни системи

$(q, p) \mapsto (q', p')$, със свойството:

$$\{q'_j, q'_k\} = 0 = \{p'_j, p'_k\}, \quad \{p'_j, q'_k\} = \delta_{j,k}.$$

Такива координати се наричат **канонични координати**

Съществуват и други координатни системи

$(q, p) \mapsto (q', p')$, със свойството:

$$\{q'_j, q'_k\} = 0 = \{p'_j, p'_k\}, \quad \{p'_j, q'_k\} = \delta_{j,k}.$$

Такива координати се наричат *канонични координати*

Съществуват и други координатни системи

$(q, p) \mapsto (q', p')$, със свойството :

$$\{q'_j, q'_k\} = 0 = \{p'_j, p'_k\} , \quad \{p'_j, q'_k\} = \delta_{j,k} .$$

Такива координати се наричат **канонични координати**, а дифеоморфизми F (т.е., взаимно-однозначни гладки изображения, които имат гладки обратни изображения) на фазовото пространство, които индуцират преход от едни канонични координати към други канонични координати,

$$(q, p) \xrightarrow{F} (q', p') ,$$

се наричат **канонични трансформации** или още **симплектични изображения**.

5. Каноично квантуване

5.1. Канонични комутиционни съотношения

При квантуване на класическите канонични съотношения (classical-CCR) ние заменяме q_j и p_j ($j=1, \dots, n$) със самоспрегнати оператори $\hat{q}_j, \hat{p}_j$ в Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ така, че квантовите скобки на Поасон да отговарят на класическите:

$$\{\hat{q}_j, \hat{q}_k\} = 0 = \{\hat{p}_j, \hat{p}_k\}, \quad \{\hat{p}_j, \hat{q}_k\} = \delta_{j,k} \cdot \hat{1},$$

5. Канонично квантуване

5.1. Канонични комутационни съотношения

При квантуване на класическите канонични съотношения (classical-CCR) ние заменяме q_j и p_j ($j=1, \dots, n$) със самоспрегнати оператори $\hat{q}_j, \hat{p}_j$ в Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ така, че квантовите скобки на Поасон да отговарят на класическите:

$$\{\hat{q}_j, \hat{q}_k\} = 0 = \{\hat{p}_j, \hat{p}_k\}, \quad \{\hat{p}_j, \hat{q}_k\} = \delta_{j,k} \cdot \hat{1},$$

където припомняме: $\{A, B\} := \frac{i}{\hbar} [A, B] \equiv \frac{i}{\hbar} (A \cdot B - B \cdot A).$

5. Каноично квантуване

5.1. Канонични комутационни съотношения

Заменяме q_j и p_j ($j=1, \dots, n$) със самоспрегнати оператори $\hat{q}_j, \hat{p}_j$, т.е.

$$\{\hat{q}_j, \hat{q}_k\} = 0 = \{\hat{p}_j, \hat{p}_k\}, \quad \{\hat{p}_j, \hat{q}_k\} = \delta_{j,k} \cdot \hat{1},$$

където припомняме: $\{A, B\} := \frac{i}{\hbar} [A, B] \equiv \frac{i}{\hbar} (A \cdot B - B \cdot A)$.

5. Каноично квантуване

5.1. Каноични комутиационни съотношения

Заменяме q_j и p_j ($j=1, \dots, n$) със самоспрегнати оператори $\hat{q}_j, \hat{p}_j$, т.е.

$$\{\hat{q}_j, \hat{q}_k\} = 0 = \{\hat{p}_j, \hat{p}_k\}, \quad \{\hat{p}_j, \hat{q}_k\} = \delta_{j,k} \cdot \hat{1},$$

където припомняме: $\{A, B\} := \frac{i}{\hbar} [A, B] \equiv \frac{i}{\hbar} (A \cdot B - B \cdot A)$.

Следователно,

$$[\hat{q}_j, \hat{q}_k] = 0 = [\hat{p}_j, \hat{p}_k],$$

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\hbar \delta_{j,k} \cdot \hat{1} \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

(CCR)

5.2. Операторная реализация.

$$\hat{q}_k \psi(q) := q_k \psi(q) \quad (k = 1, \dots, n)$$

$$\hat{p}_j \psi(q) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j} \psi(q) \quad (j = 1, \dots, n),$$

5.2. Операторна реализация.

$$\hat{q}_k \Psi(q) := q_k \Psi(q) \quad (k = 1, \dots, n)$$

$$\hat{p}_j \Psi(q) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j} \Psi(q) \quad (j = 1, \dots, n),$$

ще получим операторна реализация на (CCR), като начало вземем векторното пространство на диференцируемите функции $\Psi(q) \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

5.2. Операторна реализация.

$$\hat{q}_k \Psi(q) := q_k \Psi(q) \quad (k = 1, \dots, n)$$

$$\hat{p}_j \Psi(q) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j} \Psi(q) \quad (j = 1, \dots, n),$$

ще получим операторна реализация на (CCR), като кажем
във векторното пространство на диференцируемите функции
 $\Psi(q) \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Скалярното
произведение:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} d^n q \, \overline{\Phi(q)} \Psi(q).$$

5.3. Канонично квантуване.

Каноничното квантуване е процедура, при която конструираме квантова динамична система изхождайки от класическа хамилтонова система с хамилтониан $H(q, p)$ и "замествайки" комутиращите променливи $q = (q_j)_{j=1}^n$ и $p = (p_j)_{j=1}^n$ с оператори $\hat{q}_j$ и $\hat{p}_j$, които изпълняват (CCR).

5.3. Канонично квантуване.

Каноничното квантуване е процедура, при която конструираме квантова динамична система изхождайки от класическа хамилтонова система с хамилтониан $H(q, p)$ и "замествайки" комутиращите променливи $q = (q_j)_{j=1}^n$ и $p = (p_j)_{j=1}^n$ с оператори $\hat{q}_j$ и $\hat{p}_j$, които изпълняват (ССР). Тук обаче срещаме две главни трудности.

Трудност I. В общия случай не съществува понятие за функция от некомутиращи оператори.

5.3. Канонично квантуване.

Каноничното квантуване е процедура, при която конструираме квантова динамична система изхождайки от класическа хамилтонова система с хамилтониан $H(q, p)$ и "замествайки" комутиращите променливи $q = (q_j)_{j=1}^n$ и $p = (p_j)_{j=1}^n$ с оператори $\hat{q}_j$ и $\hat{p}_j$, които изпълняват (CCR). Тук обаче срещаме две главни трудности.

Трудност I. В общия случай не съществува понятие за функция от некомутиращи оператори.

Частично решение 1.) Възможно е $H(q, p)$ да е полиномиална функция на q и p и по такъв начин да се конструира от краен брой приложения на основните аритметични операции:

Трудност I. В общия случай не съществува понятие за функция от некомутиращи оператори.

Частично решение 1.) Възможно е $H(q, p)$ да е полиномиална функция на q и p и по такъв начин да се конструира от краен брой приложения на основните аритметични операции:

Трудност I. В общия случай не съществува понятие за функция от некомутиращи оператори.

Частично решение 1.) Възможно е $H(q, p)$ да е полиномиална функция на q и p и по такъв начин да се конструира от краен брой прилагания на основните аритметични операции:

- сума на две (или повече) наблюдаеми;

Трудност I. В общия случай не съществува понятие за функция от некомутиращи оператори.

Частично решение 1.) Възможно е $H(q, p)$ да е полиномиална функция на q и p и по такъв начин да се конструира от краен брой приложения на основните аритметични операции:

- сума на две (или повече) наблюдаеми;
- произведение на наблюдаеми;

Трудност I. В общия случай не съществува понятие за функция от некомутиращи оператори.

Частично решение 1.) Възможно е $H(q, p)$ да е полиномиална функция на q и p и по такъв начин да се конструира от краен брой приложения на основните аритметични операции:

- сума на две (или повече) наблюдаеми;
- произведение на наблюдаеми;
- умножение на наблюдаема по число.

Трудност I. В общия случай не съществува понятие за функция от некомутиращи оператори.

Частично решение 1.) Възможно е $H(q, p)$ да е полиномиална функция на q и p и по такъв начин да се конструира от краен брой приложения на основните аритметични операции:

- сума на две (или повече) наблюдаеми;
- произведение на наблюдаеми;
- умножение на наблюдаема по число.

За произведението на наблюдаеми можем да вземем например Жордановото произведение (от първата лекция):

$$A \bullet B := \frac{1}{2} (A \cdot B + B \cdot A)$$

За произведението на наблюдаеми можем да вземем например Жордановото произведение (от първата лекция) :

$$A \bullet B := \frac{1}{2} (A \cdot B + B \cdot A).$$

За произведението на наблюдаеми можем да вземем например Жордановото произведение (от първата лекция) :

$$A \bullet B := \frac{1}{2} (A \cdot B + B \cdot A).$$

То обаче не е асоциативно :

$$A (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C + \frac{1}{4} [[A, C], B].$$

За произведението на наблюдаеми можем да вземем например Жордановото произведение (от първата лекция) :

$$A \bullet B := \frac{1}{2} (A \cdot B + B \cdot A).$$

То обаче не е асоциативно :

$$A (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C + \frac{1}{4} [[A, C], B].$$

Проверка :

$$A \cdot (BC + CB) + (BC + CB) \cdot A = \begin{cases} (AB + \cancel{BA}) \cdot C + C \cdot (\cancel{AB} + BA) \\ + (AC - \cancel{CA}) \cdot B - B \cdot (\cancel{AC} - CA). \end{cases}$$

За произведението на наблюдаеми можем да вземем например Жордановото произведение (от първата лекция) :

$$A \bullet B := \frac{1}{2} (A \cdot B + B \cdot A).$$

Този втори проблем нон понякога името "нееднозначност в операторната подредба".

За произведението на наблюдаеми можем да вземем например Жордановото произведение (от първата лекция) :

$$A \bullet B := \frac{1}{2} (A \cdot B + B \cdot A).$$

Този вторичен проблем нон понекога името "нееднозначност в операторната подредба".

Пример : $q^2 \bullet \underbrace{(p^2 \bullet p)}_{p^3} = (q^2 \bullet p^2) \bullet p - \hbar^2 p ,$

понеже : $\frac{1}{4} \underbrace{[[q^2, p], p^2]}_{2i\hbar q} = \frac{i\hbar}{2} [q, p^2] = (i\hbar)^2 p .$

Възникналият вториѝен проблем на нееднозначност в операторната подредба се заобикаля по следния начин.

Възникналият втори ген проблем на нееднозначността в операторната подредба се заобикаля по следния начин. Виждаме, че промяната в реда на произведението в даден моном на хамилтониана рефлектира върху мономите от по-ниска степен.

Възникналият втори ген проблем на нееднозначността в операторната подредба се заобикаля по следния начин. Виждаме, че промяната в реда на произведението в даден моном на хамилтониана рефлектира върху мономите от по-ниска степен. Ние обявяваме коефициентите пред тези мономи за произволни параметри, подлежащи на определяне след сравняване с експеримента.

Възникналият втори ген проблем на нееднозначността в операторната подредба се заобикаля по следния начин. Виждаме, че промяната в реда на произведението в даден моном на хамилтониана рефлектира върху мономите от по-ниска степен. Ние обявяваме коефициентите пред тези мономи за произволни параметри, подлежащи на определяне след сравняване с експеримента. Тази процедура се нарича "ренормализация", а произволят свързан с нея – ренормализационен произвол.

Възникналият втори ген проблем на нееднозначността в операторната подредба се заобикаля по следния начин. Виждаме, че промяната в реда на произведението в даден моном на хамилтониана рефлектира върху мономите от по-ниска степен. Ние обявяваме коефициентите пред тези мономи за произволни параметри, подлежащи на определяне след сравняване с експеримента. Тази процедура се нарича "ренормализация", а произволят свързан с нея – ренормализационен произвол. В К.Т.П ренормализацията се съставя по красив и нетривиален начин с процеса на отстраняване на разходимости.

Забележка Изразът $A \cdot B + B \cdot A =: [A, B]_+$ носи името
антикомутатор.

Частично решение 2.) В класическата механика често се спущва ситуация на следното разбиване на хамилтониана:

Частично решение 2.) В класическата механика често се спущва ситуация на следното разбиване на хамилтониана:

$H(q, p) \equiv$ пълната енергия на системата

Частично решение 2.) В класическата механика често се спущва ситуация на следното разбиване на хамилтониана:

$H(q, p) \equiv$ пълната енергия на системата

$=$ кинетична енергия $\leftarrow$ функция на импулсите $E_{kin}(p)$

+

Частично решение 2.) В класическата механика често се спущва ситуация на следното разбиване на хамилтониана:

$H(q, p) \equiv$ пълната енергия на системата

= кинетична енергия $\leftarrow$ функция на импулсите $E_{kin}(p)$

+ потенциална енергия $\leftarrow$ функция на координатите $E_{pot}(q)$,

Частично решение 2.) В класическата механика често се спазва ситуация на следното разбиване на хамилтониана:

$H(q, p) \equiv$ пълната енергия на системата

= кинетична енергия $\leftarrow$ функция на импулсите $E_{kin}(p)$

+ потенциална енергия $\leftarrow$ функция на координатите $E_{pot}(q)$,

което ние можем да квантуваме като :

$$H(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n) = E_{kin}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n) + E_{pot}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n)$$

Частично решение 2.) В класическата механика често се спазва ситуация на следното разбиване на хамилтониана:

$H(q, p) \equiv$ пълната енергия на системата

= кинетична енергия $\leftarrow$ функция на импулсите $E_{kin}(p)$
 + потенциална енергия $\leftarrow$ функция на координатите $E_{pot}(q)$,

което ние можем да квантуваме като :

$$H(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n) = E_{kin}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n) + E_{pot}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n)$$

сума на (некомутиращи) оператори, всеки от които обаче е построен като функция от комутиращи оператори.

Козаго

$$E_{kin} = \sum_{j=1}^n \frac{\hat{p}_j^2}{2m_j} = \sum_{j=1}^n \frac{-\hbar^2}{2m_j} \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \right)^2$$

Когато

$$E_{kin} = \sum_{j=1}^n \frac{\hat{p}_j^2}{2m_j} = \sum_{j=1}^n \frac{-\hbar^2}{2m_j} \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \right)^2$$

(кинетична енергия на система от нерелативистични частици, където m_j - маси, които може да са частично или напълно равни),

Когато

$$E_{kin} = \sum_{j=1}^n \frac{\hat{p}_j^2}{2m_j} = \sum_{j=1}^n \frac{-\hbar^2}{2m_j} \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \right)^2$$

(кинетична енергия на система от нерелативистични частици, където m_j - маси, които може да са частично или напълно равни), то получените оператори H носят общото име оператори на Шрьодингер.

Когато

$$E_{kin} = \sum_{j=1}^n \frac{\hat{p}_j^2}{2m_j} = \sum_{j=1}^n \frac{-\hbar^2}{2m_j} \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \right)^2$$

(кинетична енергия на система от нерелативистични частици, където m_j - маси, които може да са частично или напълно равни), то получените оператори H носят общото име **оператори на Шрьодингер**. Спектралният анализ на подобни оператори е едно широко направление в съвременната математическа физика, което има приложение в атомната физика, квантовата химия и други.

В началото на настоящата точка 5.3. споменахме, че има и втора главна трудност при реализирането на програмата по канонично квантуване. Тази трудност е до известна степен свързана с предходната.

Трудност II. Процедурата по канонично квантуване дори и да се определи по някакъв начин, тя би зависела от избора на каноничните координати, в които се провежда.

Трудност II. Процедурата по канонично хвантуване дори и да се определи по някакъв начин, тя би зависела от избора на каноничните координати, в които се провежда.

Трудност II. Процедурата по канонично хвантуване дори и да се определи по някакъв начин, тя би зависела от избора на каноничните координати, в които се провежда.

По-конкретно, ако

$$| q'_j = q'_j(q, p), p'_j = p'_j(q, p) \quad (j=1, \dots, n),$$

е смяна към нови канонични координати (т.е. канонична трансформация),

Трудност II. Процедурата по канонично хвантуване дори и да се определи по някакъв начин, тя би зависела от избора на каноничните координати, в които се провежда.

По-конкретно, ако

$$| q'_j = q'_j(q, p), p'_j = p'_j(q, p) \quad (j=1, \dots, n),$$

е смяна към нови канонични координати (т.е. канонична трансформация), а изразите на хамилтониана в двете канонични координатни системи са:

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = H'(q'_1, \dots, q'_n, p'_1, \dots, p'_n),$$

Трудност II. Процедурата по канонично квантуване дори и да се определи по някакъв начин, тя би зависела от избора на каноничните координати, в които се провежда.

По-конкретно, ако

$$| q'_j = q'_j(q, p), p'_j = p'_j(q, p) \quad (j=1, \dots, n),$$

е смяна към нови канонични координати (т.е. канонична трансформация), а изразите на хамилтониана в двете канонични координатни системи са:

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = H'(q'_1, \dots, q'_n, p'_1, \dots, p'_n),$$

то след квантуване

$$H(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n) \neq H'(\hat{q}'_1, \dots, \hat{q}'_n, \hat{p}'_1, \dots, \hat{p}'_n).$$

Трудност II. Процедурата по канонично хвантуване дори и да се определи по някакъв начин, тя би зависела от избора на каноничните координати, в които се провежда.

Трудност II. Процедурата по канонично квантуване дори и да се определи по някакъв начин, тя би зависела от избора на каноничните координати, в които се провежда.

Разбира се, този проблем е точно толкова зле дефиниран, колкото и самото канонично квантуване, тъй като се базира на няколкократно вземане на функции от некомутиращи оператори.

Трудност II. Процедурата по канонично квантуване дори и да се определи по някакъв начин, тя би зависела от избора на каноничните координати, в които се провежда.

Разбира се, този проблем е точно толкова зле дефиниран, колкото и самото канонично квантуване, тъй като се базира на няколкократно вземане на функции от некомутиращи оператори.

Частично решение 1.) В повечето физически примери ние имаме отделени канонични координати.

Трудност II. Процедурата по канонично квантуване дори и да се определи по някакъв начин, тя би зависела от избора на каноничните координати, в които се провежда.

Разбира се, този проблем е точно толкова зле дефиниран, колкото и самото канонично квантуване, тъй като се базира на няколкократно вземане на функции от некомутиращи оператори.

Частично решение 1.) В повечето физически примери ние имаме отделни канонични координати. Например, разбиването по-горе

$$H(q, p) = E_{\text{kin}}(p) + E_{\text{pot}}(q)$$

не става в произволни, но в отделни канонични координати.

Трудност II. Процедурата по канонично квантуване дори и да се определи по някакъв начин, тя би зависела от избора на каноничните координати, в които се провежда.

Разбира се, този проблем е точно толкова зле дефиниран, колкото и самото канонично квантуване, тъй като се базира на няколкократно вземане на функции от некомутиращи оператори.

Частично решение 2.) Малко по-общ аргумент, който отделя специален клас от канонични координатни системи е свързан с линеаризация около стабилна точка. Ние ще разгледаме това в следващата точка.

устойчива

6. Осцилаторни системи и **линеаризация**

6.1. Концептуално значение на осцилаторните системи

6. Осцилаторни системи и **линеаризация**

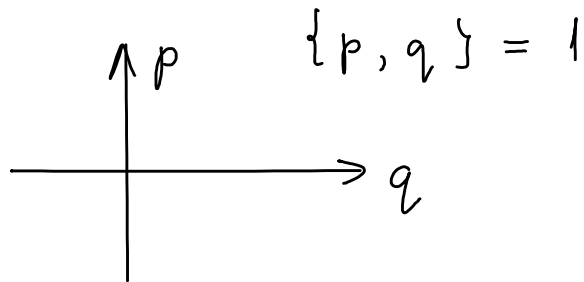
6.1. Концептуално знание на осцилаторните системи

Нека за простота първоначално да разгледаме класическа динамична система с една степен на свобода.

6. Осцилаторни системи и **линеаризация**

6.1. Концептуално значение на осцилаторните системи

Нека за простота първоначално да разгледаме класическа динамична система с една степен на свобода. Фазовото пространство на такава система се описва с една двойка канонични координати, q и p :



Нека да развием хамилтониана на системата $H(q, p)$ в околност на една точка, която след евентуална трансляция на координатите можем да считаме, че е точката $(q, p) = (0, 0)$ (началото на координатната система):

Нека да развием хамилтониана на системата $H(q, p)$ в околност на една точка, която след евентуална трансляция на координатите можем да считаме, че е точката $(q, p) = (0, 0)$ (началото на координатната система):

$$H(q, p) =$$

Нека да развием хамилтониана на системата $H(q, p)$ в околност на една точка, която след евентуална трансляция на координатите можем да считаме, че е точката $(q, p) = (0, 0)$ (началото на координатната система):

$$H(q, p) = h +$$

Нека да развием хамилтониана на системата $H(q, p)$ в околност на една точка, която след евентуална трансляция на координатите можем да считаме, че е точката $(q, p) = (0, 0)$ (началото на координатната система):

$$H(q, p) = h + \lambda q +$$

Нека да развием хамилтониана на системата $H(q, p)$ в околност на една точка, която след евентуална трансляция на координатите можем да считаме, че е точката $(q, p) = (0, 0)$ (началото на координатната система):

$$H(q, p) = h + \lambda q + \mu p +$$

Нека да развием хамилтониана на системата $H(q, p)$ в околност на една точка, която след евентуална трансляция на координатите можем да считаме, че е точката $(q, p) = (0, 0)$ (началото на координатната система):

$$H(q, p) = h + \lambda q + \mu p + a q^2 + b p^2 + 2c q p + \dots$$

Нека да развием хамилтониана на системата $H(q, p)$ в околност на една точка, която след евентуална трансляция на координатите можем да считаме, че е точката $(q, p) = (0, 0)$ (началото на координатната система):

$$H(q, p) = h + \lambda q + \mu p + a q^2 + b p^2 + 2c q p + \dots$$

За уравненията на Хамилтон (уравненията за движение) имаме:

Нека да развием хамилтониана на системата $H(q, p)$ в околност на една точка, която след евентуална трансляция на координатите можем да считаме, че е точката $(q, p) = (0, 0)$ (началото на координатната система):

$$H(q, p) = h + \lambda q + \mu p + a q^2 + b p^2 + 2c q p + \dots$$

За уравненията на Хамилтон (уравненията за движение) имаме:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \mu + 2c q + 2b p + \dots \\ \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} = -\lambda - 2a q - 2c p + \dots \end{array} \right.$$

$$H(q, p) = h + \lambda q + \mu p + a q^2 + b p^2 + 2c q p + \dots$$

За уравненията на Хамилтон (уравненията за движение) имаме:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \mu + 2c q + 2b p + \dots \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\lambda - 2a q - 2c p + \dots \end{array} \right.$$

$$H(q, p) = h + \lambda q + \mu p + a q^2 + b p^2 + 2c q p + \dots$$

За уравненията на Хамилтон (уравненията за движение) имаме:

$$\left| \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \mu + 2c q + 2b p + \dots \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\lambda - 2a q - 2c p + \dots \end{aligned} \right.$$

В частност, избраната точка $(0, 0)$ около която развиваме, ще бъде **равновесна** точка (т.е., при еволюция няма да се движи) тогава и само тогава когато

$$\frac{\partial H}{\partial p}(0, 0) = \mu = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial H}{\partial q}(0, 0) = \lambda = 0.$$

$$H(q, p) = h + \lambda q + \mu p + a q^2 + b p^2 + 2c q p + \dots$$

За уравненията на Хамилтон (уравненията за движение) имаме:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \mu + 2c q + 2b p + \dots \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\lambda - 2a q - 2c p + \dots \end{array} \right.$$

В частност, избраната точка $(0, 0)$ около която развиваме, ще бъде **равновесна** точка (т.е., при еволюция няма да се движи) тогава и само тогава когато

$$\frac{\partial H}{\partial p}(0, 0) = \mu = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial H}{\partial q}(0, 0) = \lambda = 0.$$

Нека отговорим също и факта, че водещата константа $\hbar$ в хамилтониана не дава никакъв принос в уравненията за движение

Нека отговорим също и факта, че водещата константа $\hbar$ в хамилтониана не дава никакъв принос в уравненията за движение: физиците казват "енергията е определена с точност до адитивна константа".

Нека отзетем също и факта, че водещата константа $\hbar$ в хамилтониана не дава никакъв принос в уравненията за движение: физиците казват "енергията е определена с точност до адитивна константа".

И така, около равновесна точка $(0,0)$ хамилтонианът започва по същество с квадратична част:

$$H(q, p) = H_{(2)}(q, p) + \dots,$$

Нека отхвърим също и факта, че водещата константа $\hbar$ в хамилтониана не дава никакъв принос в уравненията за движение: физиците казват "енергията е определена с точност до адитивна константа".

И така, около равновесна точка $(0,0)$ хамилтонианът започва по същество с квадратична част:

$$H(q, p) = H_{(2)}(q, p) + \dots,$$

където
$$H_{(2)}(q, p) = (q, p) \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

– записан като квадратична форма.

Частта от уравненията за движение (т.е. уравненията на Хамилтон) отговаряща на $H_{(2)}$ е линейна :

Частта от уравненията за движение (т.е. уравненията на Хамилтон) отговаряща на $H_{(2)}$ е линейна:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} c & b \\ -a & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} .$$

Частта от уравненията за движение (т.е. уравненията на Хамилтон) отговаряща на $H_{(2)}$ е линейна:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} c & b \\ -a & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} .$$

Оттук, и еволюцията, която тази система от линейни обикновени диференциални уравнения индуцира, се задава с линейни трансформации.

Частта от уравненията за движение (т.е. уравненията на Хамилтон) отговаряща на $H_{(2)}$ е линейна:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} c & b \\ -a & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} .$$

Оттук, и еволюцията, която тази система от линейни обикновени диференциални уравнения индуцира, се задава с линейни трансформации.

Забележка. Нека отбележим следните общи принципни положения:

Линеен хамилтониан е еквивалентен на еволюция задавана с афинни трансляции на каноничните координати (в които хамилтониана е линеен).

Забележка. Нека отбележим следните общи принципиални положения:

Линеен хамилтониан е еквивалентен на еволюция, задавана с афинни транслации на каноничните координати (в които хамилтониана е линеен).

Забележка. Нека отбележим следните общи принципиални положения:

Линеен хамилтониан е еквивалентен на еволюция, задавана с афинни транслации на каноничните координати (в които хамилтониана е линеен).

- Квадратен (хомогенен) хамилтониан е еквивалентен на еволюция, която се задава с линейни трансформации на каноничните координати (в които хамилтониана е квадратен).

Нека сега се опитаме да приведем уравненията за движение, които пораждат $H_{(2)}$ в "по-канонична" форма, като за целта диагонализираме $H_{(2)}$ като квадратична форма.

Нека сега се опитаме да приведем уравненията за движение, които пораждат $H_{(2)}$ в "по-канонична" форма, като за целта диагонализираме $H_{(2)}$ като квадратична форма. Нека трансформацията

$$\begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

Нека сега се опитаме да приведем уравненията за движение, които пораждат $H_{(2)}$ в "по-канонична" форма, като за целта диагонализираме $H_{(2)}$ като квадратична форма. Нека трансформацията

$$\begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

диагонализира симетричната матрица $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

Нека сега се опитаме да приведем уравненията за движение, които пораждат $H_{(2)}$ в "по-канонична" форма, като за целта диагонализираме $H_{(2)}$ като квадратична форма. Нека трансформацията

$$\begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

диагонализира симетричната матрица $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ посредством ортогонална матрица $\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix}$.

Нека сега се опитаме да приведем уравненията за движение, които пораждат $H_{(2)}$ в "по-канонична" форма, като за целта диагонализираме $H_{(2)}$ като квадратична форма. Нека трансформацията

$$\begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

диагонализира симетричната матрица $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ посредством ортогонална матрица $\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix}$. Тогава

$$H_{(2)} = (q' \ p') \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} = \alpha q'^2 + \beta p'^2.$$

Да отбележим, че q' и p' са отново канонични координати:

Да отбележим, че q' и p' са отново канонични координати:

$$\{q', p'\} =$$

Да отбележим, че q' и p' са отново канонични координати:

$$\{q', p'\} = \{\tau_{11}q + \tau_{12}p, \tau_{21}q + \tau_{22}p\}$$

Да отбележим, че q' и p' са отново канонични координати:

$$\begin{aligned}\{q', p'\} &= \{\tau_{11}q + \tau_{12}p, \tau_{21}q + \tau_{22}p\} \\ &= (\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21})\{q, p\}\end{aligned}$$

Да отбележим, че q' и p' са отново канонични координати:

$$\begin{aligned}\{q', p'\} &= \{\tau_{11}q + \tau_{12}p, \tau_{21}q + \tau_{22}p\} \\ &= (\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21})\{q, p\} = \{q, p\}\end{aligned}$$

Да отбележим, че q' и p' са отново канонични координати:

$$\begin{aligned}\{q', p'\} &= \{\tau_{11}q + \tau_{12}p, \tau_{21}q + \tau_{22}p\} \\ &= (\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21})\{q, p\} = \{q, p\}\end{aligned}$$

по което

$$\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21} = \det \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} = 1,$$

Да отбележим, че q' и p' са отново канонични координати:

$$\begin{aligned}\{q', p'\} &= \{\tau_{11}q + \tau_{12}p, \tau_{21}q + \tau_{22}p\} \\ &= (\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21})\{q, p\} = \{q, p\}\end{aligned}$$

по което

$$\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21} = \det \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} = 1,$$

което от своя страна следва от това, че $\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix}$ е ортогонална матрица.

В случаите, когато α или $\beta = 0$ казваме, че имаме изроден хамилтониан.

В случаите, когато α или $\beta = 0$ казваме, че имаме изроден хамилтониан. Когато $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ имаме два случая:

В случаите, когато α или $\beta = 0$ казваме, че имаме изроден хамилтониан. Когато $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ имаме два случая:

- елиптически: $\alpha\beta > 0$;

В случаите, когато α или $\beta = 0$ казваме, че имаме изроден хамилтониан. Когато $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ имаме два случая:

- елиптически: $\alpha\beta > 0$;
- хиперболически: $\alpha\beta < 0$.

В случаите, когато α или $\beta = 0$ казваме, че имаме изроден хамилтониан. Когато $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ имаме два случая:

- елиптически: $\alpha\beta > 0$;
- хиперболически: $\alpha\beta < 0$.

В допълнение, изродения случай може да се нарече "параболически".

В случаите, когато α или $\beta = 0$ казваме, че имаме изроден хамилтониан. Когато $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ имаме два случая:

- елиптически: $\alpha\beta > 0$;
- хиперболически: $\alpha\beta < 0$.

В допълнение, изродения случай може да се нарече "параболически".

В последните два случая може да се направи допълнителна канонична трансформация на координатите

$$(q', p') \mapsto (q'', p'')$$

В случаите, когато α или $\beta = 0$ казваме, че имаме изроден хамилтониан. Когато $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ имаме два случая:

- елиптически: $\alpha\beta > 0$;
- хиперболически: $\alpha\beta < 0$.

В допълнение, изродения случай може да се нарече "параболически".

В последните два случая може да се направи допълнителна канонична трансформация на координатите

$$(q', p') \mapsto (q'', p'')$$

така, че хамилтонианът да приеме вида

$$H_{(2)} = \frac{\omega}{2} (q''^2 \pm p''^2), \quad \omega > 0,$$

В случаите, когато α или $\beta = 0$ казваме, че имаме изроден хамилтониан. Когато $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ имаме два случая:

- елиптически: $\alpha\beta > 0$;
- хиперболически: $\alpha\beta < 0$.

В допълнение, изродения случай може да се нарече "параболически".

В последните два случая може да се направи допълнителна канонична трансформация на координатите

$$(q', p') \mapsto (q'', p'')$$

така, че хамилтонианът да приеме вида

$$H_{(2)} = \frac{\omega}{2} (q''^2 \pm p''^2), \quad \omega > 0,$$

където (+) съответства на елиптическия случай

В случаите, когато α или $\beta = 0$ казваме, че имаме изроден хамилтониан. Когато $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ имаме два случая:

- елиптически: $\alpha\beta > 0$;
- хиперболически: $\alpha\beta < 0$.

В допълнение, изродения случай може да се нарече "параболически".

В последните два случая може да се направи допълнителна канонична трансформация на координатите

$$(q', p') \mapsto (q'', p'')$$

така, че хамилтонианът да приеме вида

$$H_{(2)} = \frac{\omega}{2} (q''^2 \pm p''^2), \quad \omega > 0,$$

където (+) съответства на елиптическия случай, а (-) на хиперболическия.

В последните два случая може да се направи допълнителна канонична трансформация на координатите

$$(q', p') \mapsto (q'', p'')$$

така, че хамилтонианът да приеме вида

$$H_{(2)} = \frac{\omega}{2} (q''^2 \pm p''^2), \quad \omega > 0,$$

където (+) съответства на елиптическия случай, а (-) на хиперболическия.

В последните два случая може да се направи допълнителна канонична трансформация на координатите

$$(q', p') \mapsto (q'', p'')$$

така, че хамилтонианът да приеме вида

$$H_{(2)} = \frac{\omega}{2} (q''^2 \pm p''^2), \quad \omega > 0,$$

където (+) съответства на елиптическия случай, а (-) на хиперболическия.

Наистина, q'' и p'' можем да потърсим във вида $q'' = \alpha q'$, $p'' = \frac{1}{\alpha} p'$, така че да осигурим

$$\{q'', p''\} = \{q', p'\}.$$

В последните два случая може да се направи допълнителна канонична трансформация на координатите

$$(q', p') \mapsto (q'', p'')$$

така, че хамилтонианът да приеме вида

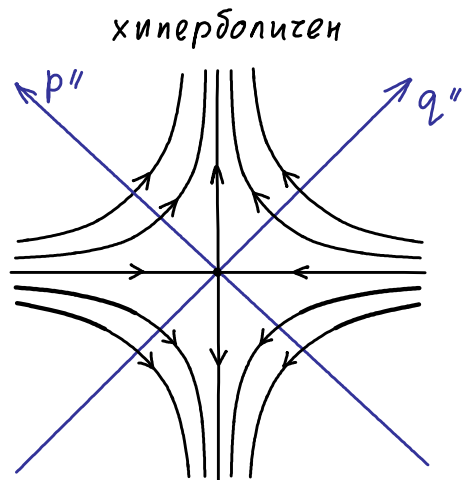
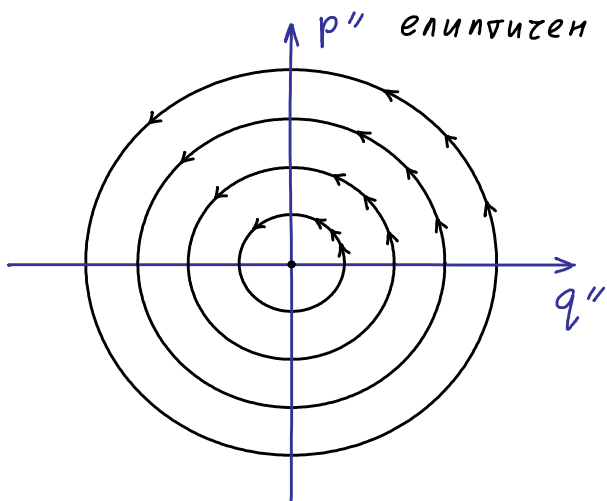
$$H_{(2)} = \frac{\omega}{2} (q''^2 \pm p''^2), \quad \omega > 0,$$

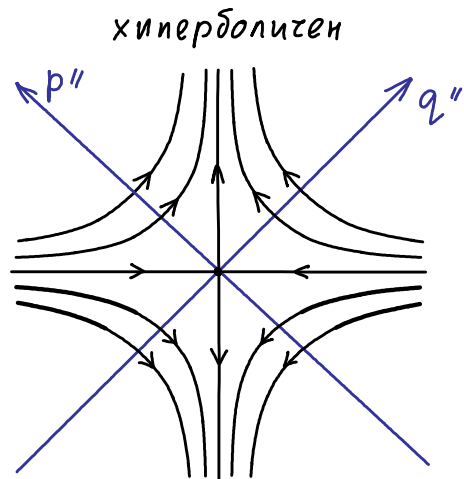
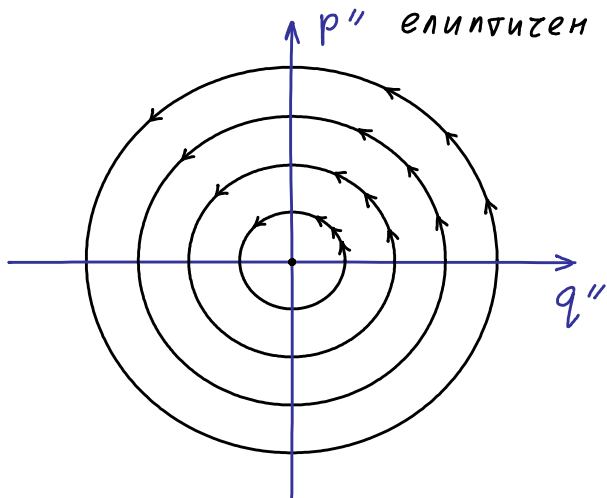
където (+) съответства на елиптическия случай, а (-) на хиперболическия.

$$\Rightarrow \alpha \mathcal{K} = \frac{\omega}{2}, \quad \frac{\beta}{\mathcal{K}} = \pm \frac{\omega}{2}, \quad \text{и в частност, получаваме}$$

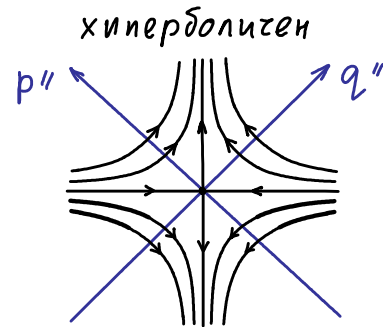
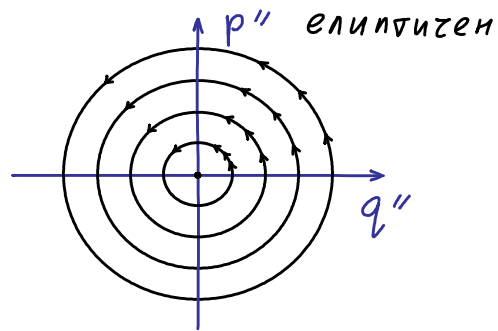
$$\omega^2 = 2 \sqrt{|\alpha \beta|}.$$

Нека начертаям така начертаните *фазови портрети* съответстващи на хамилтониана $H_{(2)}$:





На горната фигура с черен цвят са нарисувани траекториите на движение във фазовото пространство и със стрелки върху тях е указана посоката на движение; разположението на координатните оси е нарисувано в син цвят.



В частност, в елиптичния случай траекториите са концентрични окръжности и движението върху тях е равномерно, с постоянна кръгова честота ω . Малко по-късно ние явно ще напишем този закон за движение. Така забелязваме едно много важно и характерно свойство на елиптичния случай. В този случай централната равновесна точка е **стабилна**.

По определение, една равновесна точка се нарича стабилна, ако съществува нейна околност такава, че всяка траектория, която започва от тази околност е ограничено множество.

По определение, една равновесна точка се нарича стабилна, ако съществува нейна околност такава, че всяка траектория, която започва от тази околност е ограничено множество.

И така, линейните хамилтонови динамики в двумерно фазово пространство, които имат стабилна равновесна точка се пораждат от квадратични хамилтониани, които могат да се приведат в каноничния вид $\frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$.

По определение, една равновесна точка се нарича стабилна, ако съществува нейна околност такава, че всяка траектория, която започва от тази околност е ограничено множество.

И така, линейните хамилтонови динамики в двумерно фазово пространство, които имат стабилна равновесна точка се пораждат от квадратични хамилтониани, които могат да се приведат в каноничния вид $\frac{\omega}{2} (q^2 + p^2)$.

В случая на по-голямата от една на брой степени на свобода общата класификация на линейните хамилтонови динамични системи е по-сложна. Случая обаче на стабилна равновесна точка остава аналогичен:

Теорема. (без доказателство)

Нека $H_{(2)}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ е квадратичен (хомогенен) хамилтониан такъв, че $(q, p) = 0$ е стабилна равновесна точка

Теорема. (без доказателство)

Нека $H_{(2)}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ е квадратичен (хомогенен) хамилтониан такъв, че $(q, p) = 0$ е стабилна равновесна точка. Тогава съществува линейна канонична трансформация на координатите

$$\left| \begin{array}{l} q'_j = \sum_{k=1}^n (\alpha_{j,k} q_k + \beta_{j,k} p_k) \\ p'_j = \sum_{k=1}^n (\gamma_{j,k} q_k + \mu_{j,k} p_k) \end{array} \right.$$

Теорема. (без доказателство)

Нека $H_{(2)}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ е квадратичен (хомогенен) хамилтониан такъв, че $(q, p) = 0$ е стабилна равновесна точка. Тогаво съществува линейна канонична трансформация на координатите

$$\begin{cases} q'_j = \sum_{k=1}^n (\alpha_{j,k} q_k + \beta_{j,k} p_k) \\ p'_j = \sum_{k=1}^n (\gamma_{j,k} q_k + \mu_{j,k} p_k) \end{cases}$$

таква, че в новите канонични координати хамилтонианът приема

вида

$$\sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{2} (q_j'^2 + p_j'^2).$$

Теорема. (без доказателство)

Нека $H_{(2)}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ е квадратичен (хомогенен) хамилтониан такъв, че $(q, p) = 0$ е стабилна равновесна точка

Тогаво съществува линейна канонична трансформация на координатите таква, че в новите канонични координати хамилтонианът приема вида

$$\sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{2} (q_j'^2 + p_j'^2).$$

Теорема. (без доказателство)

Нека $H_{(2)}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ е квадратичен (хомогенен) хамилтониан такъв, че $(q, p) = 0$ е стабилна равновесна точка. Тогава съществува линейна канонична трансформация на координатите такава, че в новите канонични координати хамилтонианът приема вида

$$\sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{2} (q_j'^2 + p_j'^2).$$

Обратно, хамилтониани от горния вид определят линейна динамика за която нулата е стабилна равновесна точка. $\square$

Класическа динамична система задавана от хамилтониан

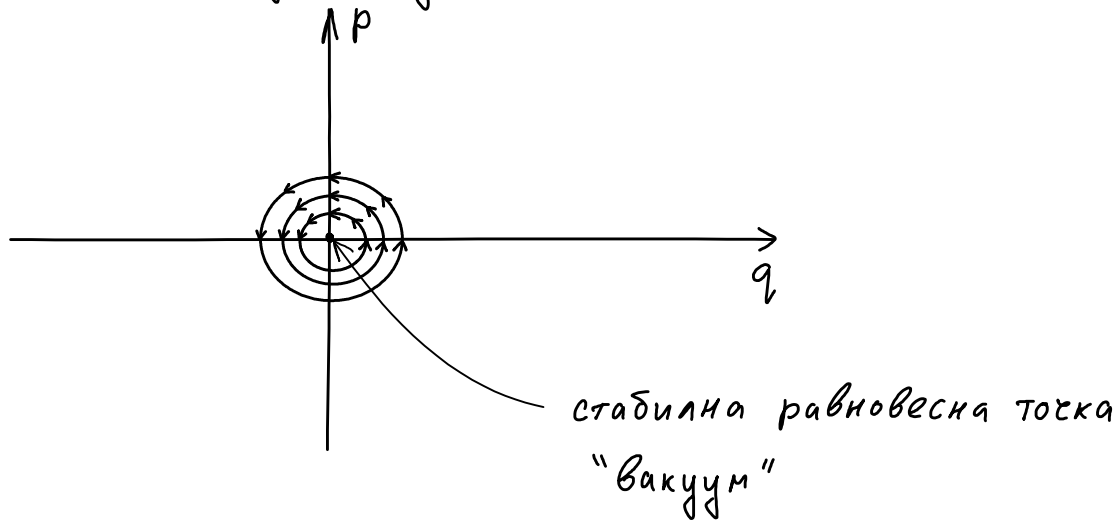
от вида $\sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{2} (q_j^2 + p_j^2)$ ще наричаме **система от**
(хармонични) осцилатори.

Класическа динамична система задавана от хамилтониан

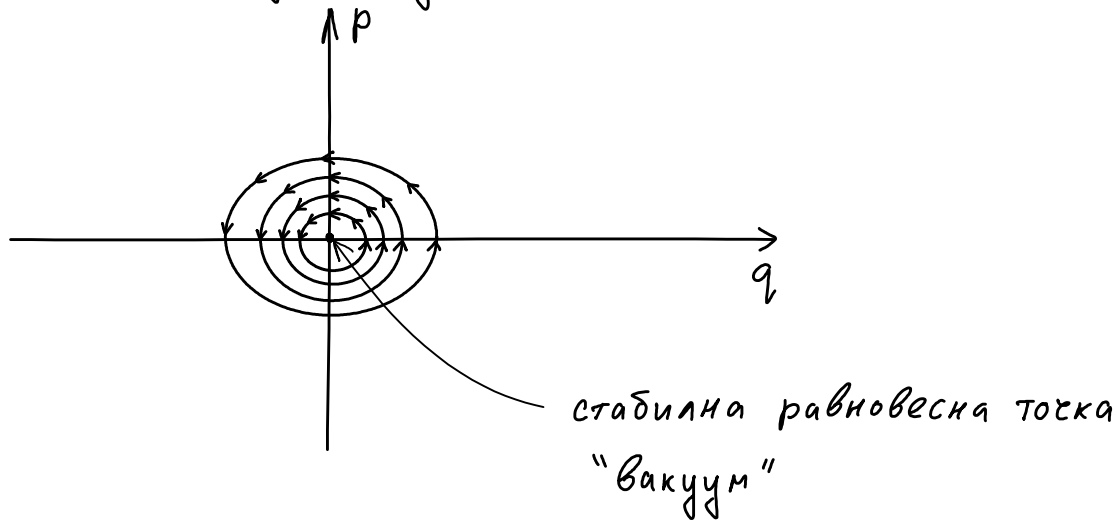
от вида $\sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{2} (q_j^2 + p_j^2)$ ще наричаме **система от**

(хармонични) осцилатори. Параметрите $\omega_1, \dots, \omega_n$ се наричат **собствени честоти на системата**.

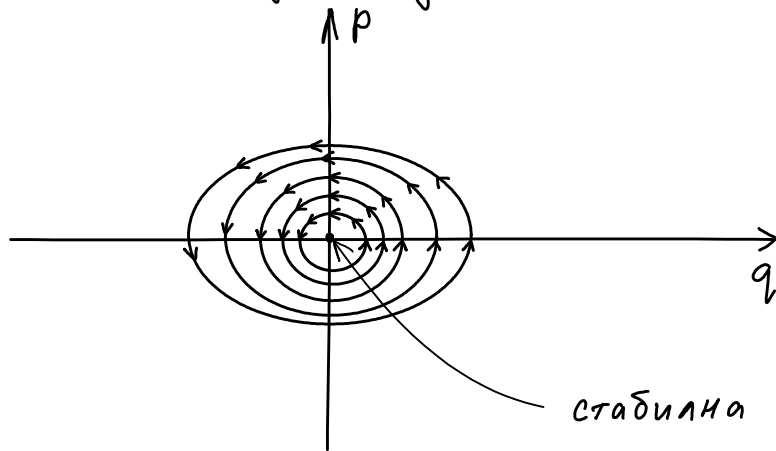
Нека се върнем на общия случай на хамилтониан в околност на равновесна точка и да предположим, че тази точка е стабилна:



Нека се върнем на общия случай на хамилтониан в околност на равновесна точка и да предположим, че тази точка е стабилна:

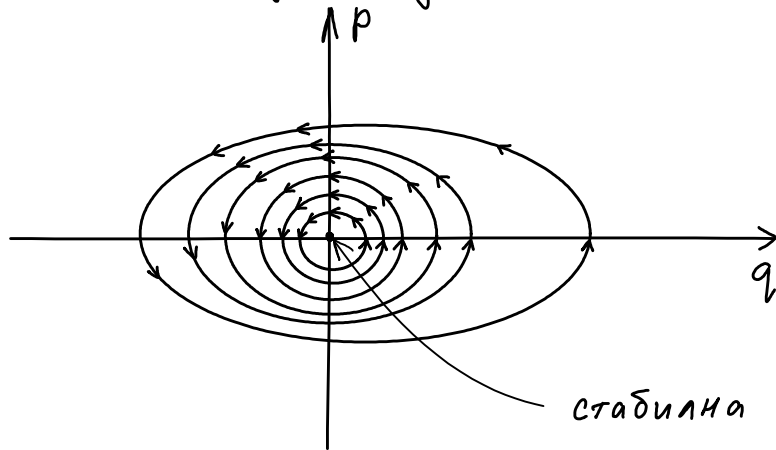


Нека се върнем на общия случай на хамилтониан в околност на равновесна точка и да предположим, че тази точка е стабилна:



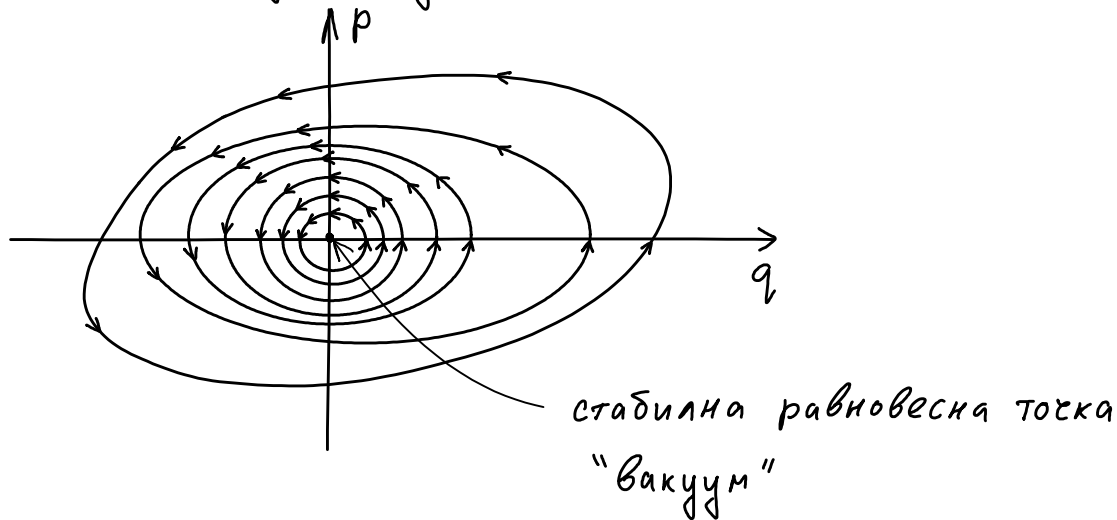
стабилна равновесна точка
"вакуум"

Нека се върнем на общия случай на хамилтониан в околност на равновесна точка и да предположим, че тази точка е стабилна:



стабилна равновесна точка
"вакуум"

Нека се върнем на общия случай на хамилтониан в околност на равновесна точка и да предположим, че тази точка е стабилна:



Тогава стигаме до следната качествена картина: близо до стабилната равновесна точка еволюцията на системата се **линеаризира** (т.е., представя се от линейни трансформации).

Тогава стигаме до следната качествена картина: близо до стабилната равновесна точка еволюцията на системата се **линеаризира** (т.е., представя се от линейни трансформации). В тази област доминира квадратичната част на хамилтониана

$$H(q, p) = H_{(2)}(q, p) + \dots$$

Тогавта стигаме до следната качествена картина: близо до стабилната равновесна точка еволюцията на системата се **линеаризира** (т.е., представя се от линейни трансформации). В тази област доминира квадратичната част на хамилтониана

$$H(q, p) = H_{(2)}(q, p) + \dots$$

Тази квадратична част, поради стабилността на равновесната точка ще бъде изоморфна на система от хармонични осцилатори.

Тогавта стигаме до следната качествена картина: близо до стабилната равновесна точка еволюцията на системата се **линеаризира** (т.е., представя се от линейни трансформации). В тази област доминира квадратичната част на хамилтониана

$$H(q, p) = H_{(2)}(q, p) + \dots$$

Тази квадратична част, поради стабилността на равновесната точка ще бъде изоморфна на система от хармонични осцилатори. Така ние получаваме и една естествена канонична координатна система:

Тогавта стигаме до следната качествена картина: Близко до стабилната равновесна точка еволюцията на системата се **линеаризира** (т.е., представя се от линейни трансформации). В тази област доминира квадратичната част на хамилтониана

$$H(q, p) = H_{(2)}(q, p) + \dots$$

Тази квадратична част, поради стабилността на равновесната точка ще бъде изоморфна на система от хармонични осцилатори. Така ние получаваме и една естествена канонична координатна система: това са каноничните координати в които $H_{(2)}$ приема

вида на система от осцилатори,
$$\sum_{j=1}^n \frac{\omega_j^2}{2} (q_j^2 + p_j^2).$$

Тогавта стигаме до следната качествена картина: Близко до стабилната равновесна точка еволюцията на системата се **линеаризира** (т.е., представя се от линейни трансформации). В тази област доминира квадратичната част на хамилтониана

$$H(q, p) = H_{(2)}(q, p) + \dots$$

Така ние получаваме и една естествена канонична координатна система: това са каноничните координати в които $H_{(2)}$ приема вида на система от осцилатори, $\sum_{j=1}^n \frac{\omega_j^2}{2} (q_j^2 + p_j^2)$. В тази именно координатна система и извършваме каноничното квантуване.

Тогава стигаме до следната качествена картина: близо до стабилната равновесна точка еволюцията на системата се **линеаризира** (т.е., представя се от линейни трансформации). В тази област доминира квадратичната част на хамилтониана

$$H(q, p) = H_{(2)}(q, p) + \dots$$

Остава да се "преборим" с допълнителната част в хамилтониана. Тя е виновна за нелинейните отклонения от динамиката далеч от стабилната равновесна точка.

В общия случай, задачата за квантуване и в последствие изчисляване на спектъра на пълния хамилтониян, е математически много сложна задача и затова тя се атакува обикновено в така наречената теория на пертурбациите.

В общия случай, задачата за квантуване и в последствие изчисляване на спектъра на пълния хамилтониян, е математически много сложна задача и затова тя се атакува обикновено в така наречената теория на пертурбациите. Това се основава на разбирането

$$H = H_0 + I$$

В общия случай, задачата за квантуване и в последствие изчисляване на спектъра на пълния хамилтониян, е математически много сложна задача и затова тя се атакува обикновено в така наречената теория на пертурбациите. Това се основава на разбирането

$$H = H_0 + I,$$

където $H_0 := H_{(2)}$ е именно квадратичната част на хамилтоняна.

В общия случай, задачата за квантуване и в последствие изучаване на спектъра на пълния хамилтониян, е математически много сложна задача и затова тя се атакува обикновено в така наречената теория на пертурбациите. Това се основава на разбиването

$$H = H_0 + I,$$

където $H_0 := H_{(2)}$ е именно квадратичната част на хамилтонияна. Добавката I се счита за "малка", или еквивалентно, ние искаме да изучаваме "квантови трептения" на системата във близост до стабилната равновесна точка, която отговаря на "вакуумното състояние".

По-нататък, това разбиване на H също съответства на нашата представа за "свободна" или още "кинетична" част на хамилтониана

По-нататък, това разбиване на H също съответства на нашата представа за "свободна" или още "кинетична" част на хамилтониана - това е квадратичната част $H_0 = H_{(2)}$ - и от друга страна, добавката I , отговорна за взаимодействието.

По-нататък, това разбиване на H също съответства на нашата представа за "свободна" или още "кинетична" част на хамилтониана - това е квадратичната част $H_0 = H_{(2)}$ - и от друга страна, добавката I , отговорна за взаимодействието. Наистина, ключово характерно свойство на свободните динамики е тяхната линейност, а за това, както вече отбелязахме необходимо и достатъчно условие е квадратичност на съответстващите хамилтониани.

По-нататък, това разбиване на H също съответства на нашата представа за "свободна" или още "кинетична" част на хамилтониана - това е квадратичната част $H_0 = H_{(2)}$ - и от друга страна, добавката I , отговорна за взаимодействието. Наистина, ключово характерно свойство на свободните динамики е тяхната линейност, а за това, както вече отбелязахме необходимо и достатъчно условие е квадратичност на съответстващите хамилтониани. Така, взаимодействието пак е свързано с нелинейност и съответно добавки в хамилтониана от по-висока от втора степен по координатите.

По-нататък, това разбиване на H също съответства на нашата представа за "свободна" или още "кинетична" част на хамилтониана - това е квадратичната част $H_0 = H_{(2)}$ - и от друга страна, добавката I , отговорна за взаимодействието. Наистина, ключово характерно свойство на свободните динамики е тяхната линейност, а за това, както вече отбелязахме необходимо и достатъчно условие е квадратичност на съответстващите хамилтониани. Така, взаимодействието пак е свързано с нелинейност и съответно добавки в хамилтониана от по-висока от втора степен по координатите. С това ние правим също връзка с постановката от теория на разсейването от миналата лекция.

В конкретните модели обикновено се въвежда един или повече параметри в частта I на хамилтониана, например,

$$I = \alpha \cdot I_0 ,$$

В конкретните модели обикновено се въвежда един или повече параметри в частта I на хамилтониана, например,

$$I = \alpha \cdot I_0 ,$$

както именно този параметър α се счита за "малък", т.е., по него се развиват във формален степенен ред всички величини на теорията.

В конкретните модели обикновено се въвежда един или повече параметри в частта I на хамилтониана, например,

$$I = \alpha \cdot I_0 ,$$

както именно този параметър α се счита за "малък", т.е., по него се развиват във формален степенен ред всички величини на теорията. Такива параметри се наричат *константи на връзката* (coupling constant).

В конкретните модели обикновено се въвежда един или повече параметри в частта I на хамилтониана, например,

$$I = \alpha \cdot I_0 ,$$

както именно този параметър α се счита за "малък", т.е., по него се развиват във формален степенен ред всички величини на теорията. Такива параметри се наричат *константи на връзката (coupling constant)*. В квантовата електродинамика α е число (т.е. безразмерен) параметър имащ стойността:

$$\alpha \approx \frac{1}{137}$$

(константата на фината структура, която споменахме в първата лекция).