КТП и ЕЧ, 7.1.21

До тук – имаме общата схема на пертурбативната КТП, разглеждана като квант. дин. система с голям ($\to \infty$) брой степени на свобода, разглеждана около устойчива равновесна точка

$$H = \underbrace{H_0}_{\substack{\equiv \\ H_{(2)}}} + I \quad , \quad (I \equiv V)$$

$H_{(2)}$ – квадратична част по q и p

За приложение на всичко това към полеви системи, на нас ни трябва

$$\left.\begin{matrix} H \ , \ \{q\} , \{p\} \\ \| \\ H_0 + I \end{matrix}\right\} \text{ началният итут}$$

Новата тема е как да получим от класич. теории на полето.

Вече имаме пример на дискр. модел на полева теория

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \equiv \underset{\nwarrow x \text{ дискр.}}{\frac{\partial}{\partial \varphi(x)}} \underset{\text{непр. случай}}{\rightsquigarrow} \underset{\text{вариационна производна}}{\frac{\delta}{\delta \varphi(x)}}$$

Вариац. смятане = "континуално" диф. смятане

Конт. интеграл е допълнението му до контин. Д.Ч.С.

безнадеждно заради липсата на ∞-мерна мярка на Лебег

Частичен изход да се земеш инвариантна Леб. мярка

$$\text{"}\prod_x d\varphi(x)\text{"} \rightsquigarrow \underbrace{\frac{1}{Z_0} e^{-\frac{S_0\{\varphi\}}{\hbar}} \prod_x d\varphi(x)}_{\text{гаусова}}$$

$S_0\{\varphi\}$ ← квадратично

$\prod_x d\varphi(x)$ – по отделно безсмислени

отриц. дефинитност ← от Евкл. теории

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/NN_QFT2013_Lecture_7_v1.pdf

1. Вариационно смятане

$D = 4$

а) Вариационна производна

$\mathbb{R}^D \quad \mathbb{R}^N$
$\cup\!\! \mid \quad \cup\!\! \mid$

Нека $\mathcal{F}(\varphi)$ е функция, чийто аргумент е функция $\varphi : U \to V$, където U и V са някакви отворени подмножества в $\mathbb{R}^N$ (или дори, на подмногообразия в $\mathbb{R}^N$). Такива функции, имащи аргумент функции, се наричат функционали и се бележат с

$$\mathcal{F}\{\varphi(x)\} \equiv \mathcal{F}(\varphi)$$

за да се подчертае, че аргументът е цялата функия φ, а не стойността $\varphi(x)$.

Функционалът $\mathcal{F}\{\varphi(x)\}$ се нарича диференцируем в φ, ако $\mathcal{F}\{\varphi(x) + \varepsilon f(x)\}$ е диференцируема функция на реалния параметър ε в околност на $\varepsilon = 0$ за всяка гладка функция $f(x)$. Тази дефиниция се нуждае от множество уточнения, които излизат извън рамките на настоящия курс. За нас ще е единствено важно, че по такъв начин ние може да определим един линеен функционал $d\mathcal{F}(\varphi)$

$$d\mathcal{F}(\varphi)[f] := \frac{d}{d\varepsilon}\left(\mathcal{F}\{\varphi(x) + \varepsilon f(x)\}\right)\Big|_{\varepsilon = 0} \equiv \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon = 0} \mathcal{F}\{\varphi(x) + \varepsilon f(x)\},$$

който се нарича диференциал на функционала $\mathcal{F}$ в φ. В определени случаи $d\mathcal{F}(\varphi)$ може да се представи във вида

$$d\mathcal{F}(\varphi)[f] = \int\limits_U d^D x \sum_{A=1}^{N} \frac{\delta \mathcal{F}(\varphi)}{\delta \varphi_A(x)} f_A(x),$$

Доп коментар: това просто е "производна по направление в едно вект. пр-во

$$\mathcal{F} : L \to \mathbb{R}$$

$$v \in L_0 \underset{\text{мн.}}{\subseteq} L$$

$$\big(d\mathcal{F}(v)\big)(w) := \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(v + \varepsilon w)\Big|_{\varepsilon = 0}$$

линейно

Ако $L = \mathbb{R}^N$, $v = (v_1, \dots, v_n)$

$$d\mathcal{F}(v)(w) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_j} w_j$$

Във функц. анализ това понятие се нарича производна на Фреше
Fréchet

`

където $\varphi(x) = (\varphi_A(x))_{A=1}^N$ и $f(x) = (f_A(x))_{A=1}^N$ са гладки функции върху отворено подмножество $U \subseteq \mathbb{R}^D$, а $\frac{\delta \mathcal{F}(\varphi)}{\delta \varphi_A(x)}$ са също гладки функции на $x \in U$, наречени вариационни производни на $\mathcal{F}$. В по-общ случай вариационните производни могат да се въведат като обобщени функции, които ще разгледаме в точка 2.

б) Задача и уравнения на Лагранж-Ойлер

Задачата на Лагранж-Ойлер е задача за вариационен екстремум

$$dS(\varphi) = 0$$

на един функционал $S\{\varphi(x)\}$ наречен действие и имащ специалния вид:

$$S = \int_U d^D x \; L\Big(\underbrace{\varphi(x)}_{u}, \underbrace{(\partial_{x_\mu}\varphi(x))}_{u_\mu}, x\Big),$$

$(u, (u_\mu))$ се нарича 1-струя (jet) на φ в x.

където $\varphi(x) = (\varphi_A(x))_{A=1}^N$,

$$(\partial_{x_\mu}\varphi(x)) \equiv (\partial_{x_\mu}\varphi_A(x))_{\substack{\mu=1,\dots,D \\ A=1,\dots,N}}, \quad \partial_{x_\mu}\varphi(x) := \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_\mu},$$

а $L = L(u, (u_\mu), x)$ е функция на $u = (u_A)_{A=1}^N$, $(u_\mu) = (u_{\mu,A})$ и $x = (x_\mu)_{\mu=1}^D$ – общо $N + ND + D$ на брой реални аргументи, в част от които са заместени стойностите на φ и нейните първи производни в точката x. Функцията L се нарича Лагранжиан.

Вариация на $\varphi(x)$ ще наричаме всяка гладка функция

$$\varphi(x;\varepsilon)\,,\quad \varepsilon\in(-a,a)\,,\quad \varphi(x;0)=\varphi(x).$$

Например, $\varphi(x;\varepsilon)=\varphi(x)+\underbrace{\varepsilon f(x)}_{\delta\varphi(x)}$ от подточка а е пример за вариация. Пресмятаме: $\partial_\mu(\delta\varphi(x))=\delta(\partial_\mu\varphi)$

$$\frac{d}{d\varepsilon}S\{\varphi(x;\varepsilon)\}=\frac{d}{d\varepsilon}\int_U d^Dx\; L\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)$$

$$=\int_U d^Dx\;\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big(L\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)\Big),$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big(L\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)\Big)$$ ← производна на сложна функция

$$=\sum_{A=1}^{N}\partial_{u_A}L\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)\,\partial_\varepsilon\varphi(x;\varepsilon)$$

$$+\sum_{A=1}^{N}\sum_{\rho=1}^{D}\partial_{u_{A,\rho}}L\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)\,\partial_\varepsilon\partial_{x_\rho}\varphi(x;\varepsilon)$$ $=\partial_{x_\rho}\partial_\varepsilon$

$$=\sum_{\rho=1}^{D}\partial_{x_\rho}\Big(\sum_{A=1}^{N}\partial_{u_{A,\rho}}L\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)\,\partial_\varepsilon\varphi(x;\varepsilon)\Big)$$

$$+\sum_{A=1}^{N}\mathcal{E}_A(L)\Big(\varphi(x;\varepsilon),(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),(\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu}\varphi(x;\varepsilon)),x\Big)\,\partial_\varepsilon\varphi(x;\varepsilon),$$

където $\partial_{u_A}=\dfrac{\partial}{\partial u_A}$, $\partial_{u_{A,\mu}}=\dfrac{\partial}{\partial u_{A,\mu}}$, $\partial_\varepsilon=\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}$ и в последното равенство сме използвали тъждеството на Лайбниц и сме въвели система от функции $\mathcal{E}_A(L)$, които ще опишем сега.

$$\boxed{F(x)\,\partial_{x_\mu}G(x)=\partial_{x^\mu}\big(F(x)G(x)\big)-\big(\partial_{x^\mu}F(x)\big)G(x)}$$

При прилагане на тъждеството на Лайбниц в първия член на последното равенство ще възникне:

$$\partial_{x_\alpha}\Big(L\big(\varphi(x),(\partial_{x^\mu}\varphi),x\big)\Big) = \partial_{x_\alpha}L\big(\varphi(x),(\partial_{x^\mu}\varphi),x\big)$$

$$+\sum_{A=1}^{N}\partial_{u_A}L\big(\varphi(x),(\partial_{x^\mu}\varphi),x\big)\,\partial_{x_\alpha}\varphi(x)$$

$$+\sum_{A=1}^{N}\sum_{\rho=1}^{D}\partial_{u_{A,\rho}}L\Big(\varphi(x),\big(\partial_{x_\mu}\varphi(x)\big),x\Big)\,\partial_{x_\alpha}\partial_{x_\rho}\varphi(x)$$

$$=\big(\mathcal{D}_{x_\alpha}L\big)\Big(\varphi(x),\big(\partial_{x_\mu}\varphi(x)\big),\big(\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu}\varphi(x)\big),x\Big),$$

където $\mathcal{D}_{x_\alpha}L\big(u,(u_\mu),(u_{\mu,\nu}),x\big)$

$$:=\partial_{x_\alpha}L\big(u,(u_\mu),x\big)+\sum_{A=1}^{N}\partial_{u_A}L\big(u,(u_\mu),x\big)\,u_{A,\mu}$$

$$+\sum_{A=1}^{N}\sum_{\rho=1}^{D}\partial_{u_{A,\rho}}L\big(u,(u_\mu),x\big)\,u_{A,\rho,\alpha}$$

е функция на допълнително $N\dfrac{D(D+1)}{2}$ на брой променливи $u_{A,\mu,\nu} = u_{A,\nu,\mu}$, $(1 \leq \mu \leq \nu \leq D)$ и се нарича пълна производна. Така,

$$\mathcal{E}_A(L)\big(u,(u_\mu),(u_{\mu,\nu}),x\big) = \underline{\underline{\partial_{u_A}L}} - \sum_{\alpha=1}^{D}\mathcal{D}_{x_\alpha}\partial_{u_{A,\alpha}}L$$

$\mathcal{E}_A$ е линеен диференциален оператор върху L наречен оператор на Лагранж-Ойлер.

По определение $\big(\mathcal{D}_{x_\mu}L\big)\Big(\varphi(x),\big(\partial_{x_\mu}\varphi\big)(x),\big((\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu}\varphi)(x)\big),x\Big)$

$$\equiv\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big(L\big(\varphi(x),(\partial_{x_\mu}\varphi(x)),x\big)\Big)=\frac{\partial L}{\partial x_\mu}(\dots)+\sum_A\frac{\partial L}{\partial u_A}(\dots)\overset{u_{A,\mu}}{\frac{\partial\varphi_A}{\partial x_\mu}}+\sum_{A,\nu}\frac{\partial L}{\partial u_{A,\nu}}(\dots)$$

Резултатът : $\partial_{\varepsilon}\Big(L\big(\varphi(x;\varepsilon),\,(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),\,x\big)\Big)$

$$= \sum_{A=1}^{N} \mathcal{E}_A(L)\Big(\varphi(x;\varepsilon),\,(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),\,(\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu}\varphi(x;\varepsilon)),\,x\Big)\,\partial_\varepsilon\varphi(x;\varepsilon)$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{D}\partial_{x_\rho}\Big(\sum_{A=1}^{N}\partial_{u_A}L\big(\varphi(x;\varepsilon),\,(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),\,x\big)\,\partial_\varepsilon\varphi_A(x;\varepsilon)\Big)$$

и следователно, $\frac{d}{d\varepsilon}S\{\varphi(x;\varepsilon)\}$

$$= \int_U d^Dx \sum_{A=1}^{N}\mathcal{E}_A(L)\Big(\varphi(x;\varepsilon),\,(\partial_{x_\mu}\varphi(x;\varepsilon)),\,(\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu}\varphi(x;\varepsilon)),\,x\Big)\,\partial_\varepsilon\varphi(x;\varepsilon),$$

ако предположим, че $\partial_\varepsilon\varphi(x;\varepsilon) = 0$ за $x \in$ околност на ∂U (границата на U), т.е. вариацията на φ изчезва в околност на границата на U, тъй като съгласно теоремата на Стокс :

$$\int_U d^Dx\;\partial_{x^\mu}F = \int_{\partial U} d\sigma\;\; n^\mu\cdot\partial_{x^\mu}F.$$

В частност,

$$\frac{\delta S(\varphi)}{\delta\varphi_A(x)} = \mathcal{E}_A(L)\Big(\varphi(x),\,(\partial_{x_\mu}\varphi(x)),\,(\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu}\varphi(x)),\,x\Big)$$

и условието $dS(\varphi) = 0$ придобива вида :

$$\Big|\;\mathcal{E}_A(L)\Big(\varphi(x),\,(\partial_{x_\mu}\varphi(x)),\,(\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu}\varphi(x)),\,x\Big) = 0\,,\quad A=1,\ldots,N,$$

което е и системата от равнения на Лагранж–Ойлер.

Пояс. $\Big|\; dS(\varphi)[\underset{\partial_\varepsilon\varphi(x;\varepsilon)}{f}] = \int_U d^Dx \sum_{A=1}^{N}\frac{\delta S(\varphi)}{\delta\varphi_A(x)}\overset{?}{=} f_A(x),$ $\partial_{x_\mu}f_A(x)$

Ур-ята на Л.О. за лагр. от ред n са от ред $2n$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(\varphi_\varepsilon, \dots, \partial^n \varphi_\varepsilon, x)$$

$$= \dots + \sum \frac{\partial L}{\partial u_{(n)}} \partial_\varepsilon \partial_x^{(n)} \varphi$$

$\mathcal{D}_x^n L \to$ възникват производни до ред $2n$.

Демонстр. пример $N=1$, $D=1$

$$S\{\varphi(x)\} = \int_U dx \, L(\varphi(x), \partial_x \varphi(x), \partial_x^2 \varphi(x), x)$$

$$L(u, u_1, u_2, x)$$

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} S\{\varphi(x) + \varepsilon f(x)\} \overset{?}{=} \int_U dx \, \underbrace{\mathcal{E}(L)(\varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi, \partial^3\varphi, \overset{?}{\partial^4\varphi}, x)}_{=?} \cdot f(x)$$

$$\|$$

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \int_U dx \, L(\varphi(x) + \varepsilon f, \partial_x \varphi + \varepsilon \partial_x f, \partial_x^2 \varphi + \varepsilon \partial_x^2 f, x)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\varphi + \varepsilon f)$$

$$= \int_U dx \, \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(L(\dots)) = \int_U dx \left(\frac{\partial L}{\partial u}(\varphi + \cancel{\varepsilon f}, \dots) f(x) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial L}{\partial u_1}(\varphi + \cancel{\varepsilon f}, \dots) \partial_x f + \frac{\partial L}{\partial u_2}(\varphi + \cancel{\varepsilon f}, \dots) \partial_x^2 f \right) \cancel{\Big|_{\varepsilon=0}}$$

$$= \int_U dx \left[\frac{\partial L}{\partial u}(\varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi, x) \cdot f(x) \right.$$

$$+ \cancel{\partial_x \left(\frac{\partial L}{\partial u_1}(\varphi, \dots) f \right)} - \partial_x \left(\frac{\partial L}{\partial u_1}(\varphi, \dots) \right) f + \longrightarrow$$

$$+ \cancel{\partial_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_2} f\right)} - 2\,\cancel{\partial_x\left(\partial_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_2}\right) f\right)}$$

$$+ \partial_x^2\left(\frac{\partial L}{\partial u_2}\right) f \Bigg]$$

прилагаме

$$\partial^n(FG) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\partial^{(k)} F\right)\left(\partial^{(n-k)} G\right)$$

?

$$F\partial^n G = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}\, \partial^{(k)}\left(\left(\partial^{(n-k)} F\right) G\right)$$

по индукция

$$\boxed{F\partial^2 G = \partial^2(FG) - 2\,\partial\left((\partial F) G\right) + \left(\partial^2 F\right) G}$$

$$\int_U dx\, \partial_x F = \int_{\partial U} F = F\Big|_{x_0}^{x_1} = 0$$

Тук използваме предположение

$$f\big|_{\partial U} = 0$$

и околност

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} S[\varphi+\varepsilon f]$$

$$= \int_U dx \, \Bigg[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial u}(\varphi, \dots) + (-\partial_x)\left(\frac{\partial L}{\partial u_1}(\varphi, \dots)\right) + (-\partial_x)^2 \left(\frac{\partial L}{\partial u_2}(\varphi, \dots)\right)}_{\mathcal{E}(L)(\varphi, \partial\varphi, \partial^2\varphi, \partial^4\varphi, x)} \Bigg] f(x)$$

$$\partial_x \Big(F(\varphi, \partial\varphi, \dots) \Big) =: \left(\mathcal{D}_x F \right)(\varphi, \partial\varphi, \dots)$$

За самост. проучване

7–19 стр. – обобщ. ф-ции