КТП и ЕЧ, 16.01.2021

1. Относно обосновката на "формалното вариационно смятане"

а) $\frac{\delta\varphi(y)}{\delta\varphi(x)} \stackrel{?}{=} \delta(x-y)$ (аналог. на $\frac{\partial z_j}{\partial z_k} = \delta_{j,k}$)

Разглеждаме $\varphi(y)$ като функционал, който зависи параметрично от y: $F_y\{\varphi\} := \varphi(y)$.

Тогава: $\int \frac{\delta F_y}{\delta\varphi(x)} f(x)\,dx := \frac{d}{d\varepsilon} F_y\{\varphi+\varepsilon f\}\Big|_{\varepsilon=0}$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\left(\varphi(y)+\varepsilon f(y)\right)\Big|_{\varepsilon=0} = f(y) \equiv \delta_y[f]$$

$\Rightarrow \frac{\delta F_y}{\delta\varphi(x)}[f] = \delta_y[f]$ – обобщена функция е.

$\Rightarrow \frac{\delta\varphi(y)}{\delta\varphi(x)} = \delta(x-y)$ – има два тъждествени смисъла:

- като обобщ. ф. на x зависеща от параметър y
- като обобщ. ф. на x и y (виж. лекциите за обобщ. ф.)

Аналогично се доказват:

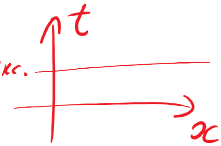
б) $$\frac{\delta\,\partial_y\varphi(y)}{\delta\varphi(x)} = \partial_y\delta(x-y) \equiv -\partial_x\delta(x-y)$$

в) $$\frac{\delta L(\varphi(y),\partial_y\varphi(y),y)}{\delta\varphi(x)} = \frac{\partial L}{\partial\varphi}(\varphi(y),\overbrace{\partial_y\varphi(y)}^{\varphi_y},y)\frac{\delta\varphi(y)}{\delta\varphi(x)} + \frac{\partial L}{\partial\varphi_y}(\varphi(y),\partial_y\varphi(y),y)\frac{\delta\,\partial_y\varphi(y)}{\delta\varphi(x)}$$

2. Приложение: 3 + 1 - формализъм: илюстрация за $D = 1+1$ и $N = 1$ полета

$$S\{\varphi, \varphi_t\} = \int dt\, \mathcal{L}\{\varphi, \varphi_t\}$$

фикс.



където $\mathcal{L}\{\varphi, \varphi_t\} = \int dx\, L(\varphi, \varphi_x, \varphi_t; \overbrace{x, t}^{x})$

$$\varphi_x := \partial_x \varphi, \quad \varphi_t \equiv \dot{\varphi} \equiv \partial_t \varphi$$

(няма да имаме "u, u_x, u_t")

$$\boxed{\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi(x,t)} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_t(x,t)}}$$

← оператор на Лаг.-Ойл. от механиката

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \mathcal{E}(\mathcal{L})$$

(= 0 - ур-е)

$$= \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x} \frac{\partial L}{\partial \varphi_x} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_t} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x} \cancel{\frac{\partial L}{\partial \varphi_{xt}}}\right)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x} \frac{\partial L}{\partial \varphi_x} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \frac{\partial L}{\partial \varphi_t} = \text{израз от теор. на полето}$$

За втори ред: $S = \int dt\, \mathcal{L}\{\varphi, \varphi_t, \varphi_{tt}\}$, $\varphi_{tt} = \partial_t \partial_t \varphi(x,t)$ и т.н., $\varphi_{xt} \equiv \varphi_{tx}$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \frac{\delta \mathcal{L}}{\partial \varphi_t} + \left(-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\right)^2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\partial \varphi_{tt}}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x} \frac{\partial L}{\partial \varphi_x} + \left(-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x}\right)^2 \frac{\partial L}{\partial \varphi_{xx}}$$

$$- \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_t} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{xt}} + \left(-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x}\right)^2 \cancel{\frac{\partial L}{\partial \varphi_{xxt}}}\right)$$

$$+ \left(-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\right)^2 \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{tt}} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x} \cancel{\frac{\partial L}{\partial \varphi_{xtt}}} + \left(-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x}\right)^2 \cancel{\frac{\partial L}{\partial \varphi_{xxtt}}}\right)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x} \frac{\partial L}{\partial \varphi_x} - \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \frac{\partial L}{\partial \varphi_t} + \left(-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x}\right)^2 \frac{\partial L}{\partial \varphi_{xx}} + \left(-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\right)\left(-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x}\right) \frac{\partial L}{\partial \varphi_{tx}}$$

$$+ \left(-\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\right)^2 \frac{\partial L}{\partial \varphi_{tt}}$$

Хамилтонова форма за $S\{\varphi, \varphi_t\} = \int dt\, \mathcal{L}\{\varphi, \varphi_t\}$

$$H\{\varphi, \varphi_t\} := \int dx\, \varphi_t \pi - \mathcal{L}\{\varphi, \varphi_t\}$$

← обобщава $H = \sum_j \dot{q}_j p_j - L$

където $\pi := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_t} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x} \cancel{\frac{\partial L}{\partial \varphi_{tx}}}$

(обобщен полеви импулс $\pi = \pi(x,t)$)

$$\Rightarrow \quad H = \int dx \underbrace{\left(\varphi_t \frac{\partial L}{\partial \varphi_t}(\varphi, \varphi_x, \varphi_t) - L(\varphi, \varphi_x, \varphi_t)\right)}_{T_0^0(\varphi, \varphi_x, \varphi_t)}$$

$0 \leftrightarrow t$
$1 \leftrightarrow x$ ⟶

$$T_\mu^\nu(\varphi, (\varphi_\rho)) := \varphi_\mu \frac{\partial L}{\partial \varphi_\nu} - L\, \delta_\mu^\nu$$

– тензор на ен-та и импулса
stress-energy tensor

Теоремата на Ньотер: $\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_\nu^\mu = 0$

$\Rightarrow \quad H\{\varphi, \varphi_t\}$ е интеграл на движение.
$= const(t)$

В този случай: $\varphi(x;\varepsilon) := \varphi(x + \varepsilon a)$, $a \in$ space-time

$$S_{W_\varepsilon}\{\varphi(x;\varepsilon)\} = const(\varepsilon) =$$

$$= \int_{W+\varepsilon a} L\left(\varphi(x+\varepsilon a), (\varphi_\mu(x+\varepsilon a))\right) d^D x$$

← тавтология (смяна на промени. $x \mapsto x + \varepsilon a$)

$$= \int_{W_\varepsilon} L\Big(\varphi(x) + \sum_\mu \varepsilon a_\mu \varphi_\mu(x), \big(\varphi_\mu(x) + \sum_\nu \varepsilon a_\nu \varphi_{\mu\nu}(x)\big)\Big) d^D x + O(\varepsilon^2)$$

тейлорово развитие $\overset{\text{към } \varphi}{\text{до}}$ $O(\varepsilon^2)$

$$= \int_{W_\varepsilon} L\left(\varphi(x), (\varphi_\mu(x))\right) d^D x$$

следвсмяна $x' = x + \varepsilon a$

$W_\varepsilon \mapsto W$

$x = x' - \varepsilon a$

$$+ \int_{W_\varepsilon} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi}\left(\varphi(x), (\varphi_\mu(x))\right) \sum_\mu \varepsilon a_\mu \varphi_\mu(x) \right.$$

$+ O(\varepsilon^2)$

$$\left. + \sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \varphi_\mu}\left(\varphi(x), (\varphi_\mu(x))\right) \sum_\nu \varepsilon a_\mu \varphi_{\mu\nu}(x) \right) d^D x + O(\varepsilon^2)$$

$$= \text{const} + \int_W \sum_\mu \varepsilon a^\mu \left(-\frac{\partial}{\partial x^\mu} L + \frac{\partial L}{\partial \varphi} \varphi_\mu + \sum_\nu \frac{\partial L}{\partial \varphi_\nu} \varphi_{\mu\nu} \right) + O(\varepsilon^2)$$

$\forall W$

$$\Rightarrow \sum_\mu a^\mu \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi} \varphi_\mu + \sum_\nu \frac{\partial L}{\partial \varphi_\nu} \varphi_{\mu\nu}}_{=} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} L \right) = 0$$

забелязваме

основното тъждество не вар. смятане

$$\mathcal{E}\left(\varphi, (\varphi_\mu), (\varphi_{\mu\nu})\right) \sum_\mu a_\mu \varphi_\mu$$

$$+ \sum_\mu a^\mu \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_\nu} \varphi_\mu \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}\left(\varphi, (\varphi_\mu), (\varphi_{\mu\nu})\right) \sum_\mu a_\mu \varphi_\mu$$

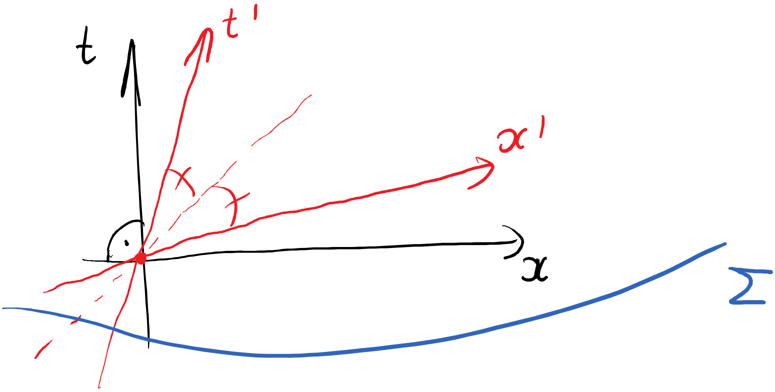
$$+ \sum_\mu a_\mu \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} T_\mu^\nu\left(\varphi, (\varphi_\mu)\right) = 0$$

$$T_\mu^\nu\left(\varphi, (\varphi_\mu)\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi_\nu} \varphi_\mu - L \delta_\mu^\nu$$

$$\forall a = (a_\mu) \quad : \quad J^\nu_{(a)} = \sum_\nu a_\nu T_\mu^\nu \; : \; \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} J_a^\nu = 0$$

За повърхностите на Коши, като обобщени "моменти" в 3+1 формализма и възстановяването на ковариантността в релативистките теории виж. точка 1 на лекцията:

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/NN_QFT2013_Lecture_8_v1.pdf



`

Аксиоматична КТП

Streater R.F., Wightman A.S., PCT, Spin And Statistics, And All That
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/Streater_R.F.,_Wightman_A.S.,_PCT,_Spin_And_Statistics,_And_All_That_[2000].pdf
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/[1964]_Streater_R.F.,_Wightman_A.S.,_PCT,_Spin_And_Statistics,_And_All_That.pdf

Jost R., The general theory of quantized fields
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/Jost_R.,_The_general_theory_of_quantized_fields_[1965]..pdf

Jost R. (edt.), Local quantum theory [proc. school XLV E.Fermi 1968]
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/Jost_R._(edt.),_Local_quantum_theory_[proc._school_XLV_E.Fermi_1968].pdf

Bogolubov N.N., Logunov A.A., Oksak A.I., Todorov I., General Principles of Quantum Field Theory
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/Bogolubov_N.N.,_Logunov_A.A.,_Oksak_A.I.,_Todorov_I.,_General_Principles_of_Quantum_Field_Theory_[1990].pdf
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/[1975]_Bogolubov_N.N.,_Logunov_A.A.,_Todorov_I.T.,_Introduction_to_Axiomatic_Quantum_Field_Theory_[1975].pdf

Haag R., Local Quantum Physics Fields, Particles, Algebras
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/Haag_R.,_Local_Quantum_Physics_Fields,_Particles,_Algebras_[1996].pdf

Аксиоматична "Теория на струните" - "нема такова животно"?

? Jost J., Bosonic Strings A Mathematical Treatment
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/Jost_J.,_Bosonic_Strings_A_Mathematical_Treatment_[2001].pdf

Алгебрични файнманови интеграли

Piguet_O., Sorella_S.P., Algebraic renormalization perturbative renormalization, symmetries and anomalies
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/Piguet_O.,_Sorella_S.P.,_Algebraic_renormalization_perturbative_renormalization,_symmetries_and_anomalies_[1995].pdf

? Milton K.A., Schwingers Quantum Action Principle From Dirac's Formulation Through Feynman's Path Integrals, the Schwinger-Keldysh Method, Quantum Field Theory, to Source Theory
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/Milton_K.A.,_Schwingers_Quantum_Action_Principle_From_Dirac's_Formulation_Through_Feynman's_Path_Integrals,_the_Schwinger-Keldysh_Method,_Quantum_Field_Theory,_to_Source_Theory_[2015].pdf

"Фон Нойман срещу Дирак"

Von Neumann J., Mathematical foundations of quantum mechanics
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/von_Neumann_J.,_Mathematical_foundations_of_quantum_mechanics_[2018].pdf
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/[1955]_von_Neumann_J.,_Mathematical_foundations_of_quantum_mechanics_[1955].pdf

Dirac P.A.M., The principles of quantum mechanics
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/[1958]_Dirac_P.A.M.,_The_principles_of_quantum_mechanics_[1958].pdf

Вариационен анализ

Olver P.J., Applications of Lie Groups to Differential Equations
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/QFTandEP2020kwe6fo95/Olver_P.J.,_Applications_of_Lie_Groups_to_Differential_Equations_[1993].pdf

Следва темата за "Аксиоматична квантова теория на полето"

Следвани са записките от лекции включени миналата година в курса по "Теория на пренормировките":

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/renormalization2020/notes/contents.html

Допълнителни сведения са използвани и от:

Николай М. Николов "Глобално конформно инвариантни квантово-полеви модели", дисертация
http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/renormalization2020/notes/Nikolov_N.M.,_Dissertation_2002.pdf

Увод в аксиоматична КТП

1. Физическа мотивация
2. Припомняне от теор. на обобщ. ф.
3. Аксиоми на Уайтман

в Кв. м. наблюдаеми $\longrightarrow$ ерм. оператори A

КТП. полета

функции над простр.-време които имат свойството наблюдаеми $\longrightarrow$ $A(\underbrace{\vec{x},t}_{x})$

$x \mapsto \underbrace{A(x)}_{\text{ермитов оператор}}$

В КТП е удобна картината на Хайз.

$$U(t)\,A(t_0)\,U(t)^{-1} = A(t+t_0) \quad \text{в кв. мех.}$$

$$U(\vec{x},t)\,A(\vec{x}_0,t_0)\,U(\vec{x},t)^{-1} \quad \text{в КТП}$$

$$= A(\vec{x}+\vec{x}_0,\, t+t_0)$$

$$U(x)\, A(x_0)\, U(x)^{-1} = A(x+x_0)$$

$$x = (\vec{x}, t) = (x^\mu)_{\mu=0}^{3}\ , \quad x_0 = t$$

$$x_0 = (x_0^\mu)_{\mu=0}^{3}$$

Ако $\hat{\vec{q}}$ - оп-р на коорд. в кв. м. то $U(\vec{x})\,\hat{\vec{q}}\,U(\vec{x}) = \hat{\vec{q}} + \vec{x}\,\hat{1}$

$$U(t) = e^{itH} \equiv e^{itP_0}$$

$$U(\vec{x}) = \exp\left(i(x^1P_1 + \cdots + x^3P_3)\right)$$

$$= e^{ix^\mu \hat{P}_\mu} = \exp\left(i\left(x^0P_0 + x^1P_1 + \cdots\right)\right)$$

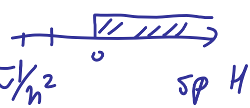
→ и Кв. Мех. и в К.Т.П.

Разлика между Кв. Мех. и Релатив. КТП е че в последната няма оп-ри на координатите $(\hat{x}^i)_{i=1}^{3}$

$\hat{x} = \hat{q}$ по-горе

$$[\hat{x}^j, \hat{P}_k] = \pm i \delta^j_k$$

$$[\hat{t}, H] = i$$



" $\Delta t \, \Delta E \geq \hbar$ " — ?

Аксиоми на релативистката квантова физика

1) Ковариантност / Простр.-Времева симетрия
Групата на Поанкаре действа унитарно
и в частност $U(x)$ - представянето
на пространство времевите транслации

2) Локализация / Локалност на наблюдаемите

За всяка област $\underbrace{\mathcal{O}}_{\text{отворена, свърз., огранич.}} \subseteq \underbrace{\mathbb{R}^{3,1}}_{\text{простр. на Минковски}}$

е зададена квантово-мех. система представена

от $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ – под алгебра на наблюд.

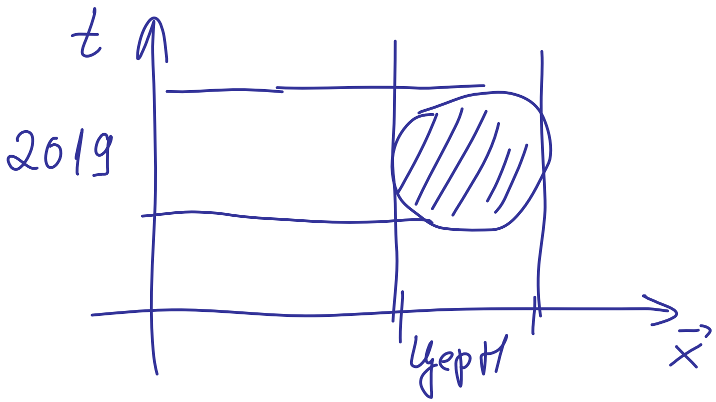
$A, B \in \mathcal{A}(O)$, то $\alpha A + \beta B \in \mathcal{A}(O)$

$A \cdot B \in \mathcal{A}(O)$

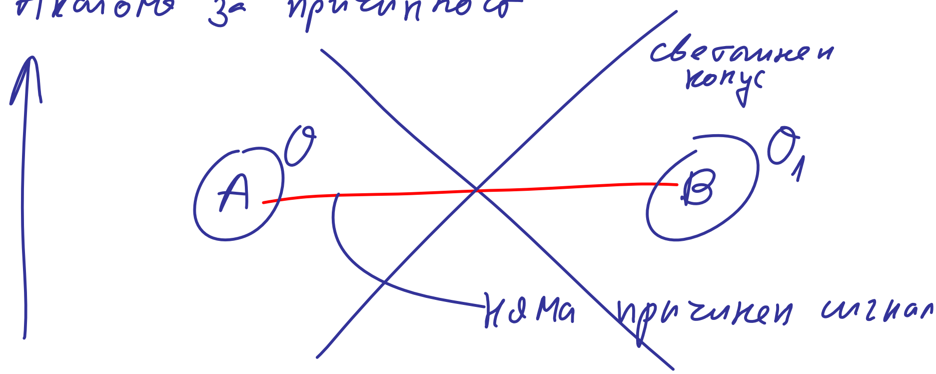
Физически казване

$A \in \mathcal{A}(O)$ и $A = A^*$, то

"A е наблюдаеми отговаряща на измерване локализирано в O"



а) Аксиома за причинност



A и B са наблюдаеми, локализирани в причинно несвързани области

Тогава $$[A, B] = 0$$

тоест са съвместно измерими

б) Аксиома за транслац. симетрия ковариантност

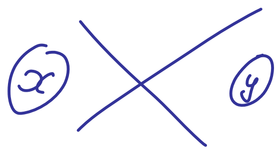
$$A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}), \quad a \in \mathbb{R}^{3,1}$$

$$\underbrace{U(a)\, A\, U(a)^{-1}}_{= A(a)} \in \mathcal{A}(\underbrace{\mathcal{O}+a}_{\text{транслираната област}})$$

Транслац. инвар. поле $A(x) \overset{?}{\in} \mathcal{A}(\underset{\text{окол. на } x}{\mathcal{O}})$

$$U(a)\, A(x)\, U(a)^{-1} = A(x+a)$$

$$[A(x), A(y)] = 0$$



Пълна локалност

$$[A(x), A(y)] = 0 \quad \text{ако} \quad x \sim y$$

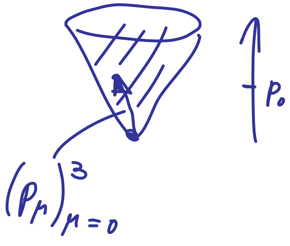
Предполагаща се скрита аксиома е изотонията

$$O_1 \subseteq O_2$$

$$\mathcal{A}(O_1) \subseteq \mathcal{A}(O_2)$$

3. Положителност на Енергията

Съвместният спектър на $\{\hat{P}_0, \hat{P}_1, \dots, \hat{P}_3\}$ се съдържа в $\overline{V^+} \subseteq \mathbb{R}^{3,1}$



Съвместен спектър на взаимно комут. оператори

$A, B, C, D, \ldots$

$(a, b, c, d, \ldots)$ – едновременни собств. числа

$\exists\, \Psi$ – вектор $(\neq 0)$

$$A\Psi = a\Psi$$
$$B\Psi = b\Psi$$
$$\vdots$$

Rigged Hilbert Space

– обобщ. собств. вект

https://en.wikipedia.org/wiki/Rigged_Hilbert_space

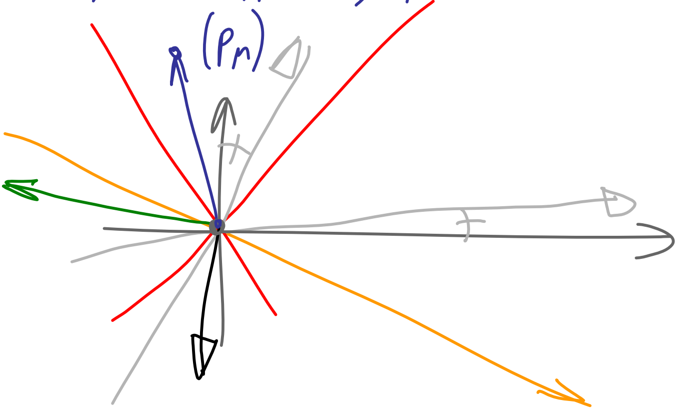
$$\mathrm{Spec}\{\hat{P}_0, \hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_3\} =$$

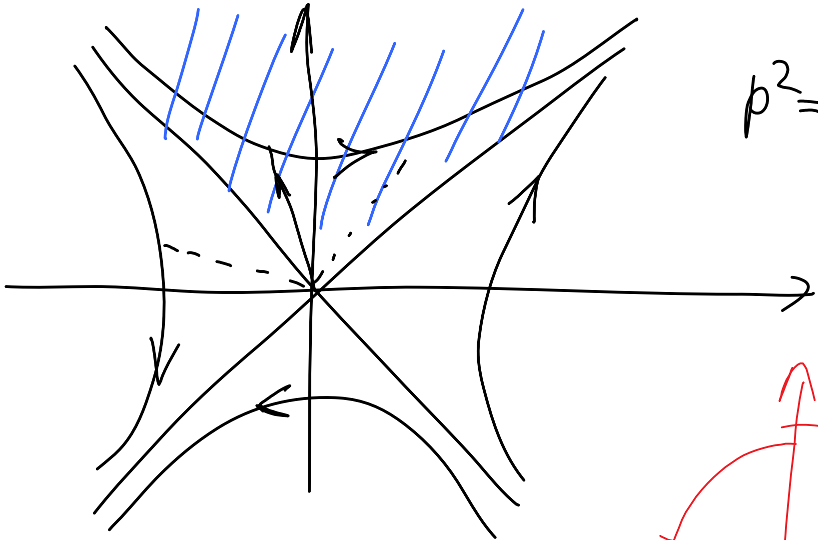
$$= \{(p_0, p_1, \ldots, p_3) \in \mathbb{R}^{3,1} \mid \exists\, \Psi \neq 0 \text{ т.ч.:}$$

обобщ. вр

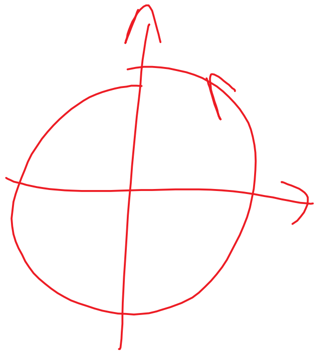
$$\hat{P}_\mu \Psi = p_\mu \Psi, \quad \mu = 0, \ldots, 3\}$$

$$\| \quad (p_\mu)$$





$p^2 = \text{const}$



Аксиоми на КТП

0. Мотивация (припомняне)

а) локалност на наблюденията

$$A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}) \quad , \quad \mathcal{O} \underset{\text{отв}}{\subseteq} \mathbb{R}^{3,1}$$

$\overset{\shortparallel}{A^*}$ наблюдаема локализирана в $\mathcal{O}$

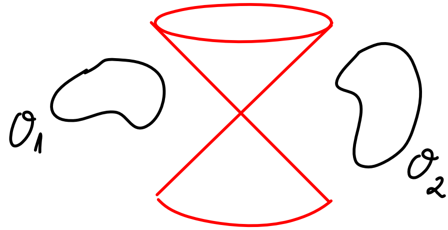
Постулат за локалност:

Ако $\mathcal{O}_1 \sim \mathcal{O}_2$ (т.е., $\forall x_1 \in \mathcal{O}_1$, $\forall x_2 \in \mathcal{O}_2$: $x_1 \sim x_2$ – пространствено подобни) и ако

A_1 е локализирана в $\mathcal{O}_1$ и
A_2 е локализирана в $\mathcal{O}_2$, тогава

$$[A_1, A_2] = 0$$

Тоест, измерването на A_1 не може да смути измерването на A_2, понеже няма причинна връзка между $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$.



Има и нелокални наблюдаеми — например $\hat{P}_\mu$ — операторите на енергията импулса

— Понеже съгласно следващата аксиома ако A е локална и $[P_\mu, A] = 0 \ \forall \mu$ то $A \sim \hat{1}$.

б) Пространствена симетрия

Групата на Поанкаре, $\mathcal{P}$, е представена унитарно

$$\mathcal{P} \ni g \mapsto U(g) \text{ - унитарен}$$

$$U(g_1 g_2) = U(g_1)\, U(g_2)$$

$$U(g^{-1}) = U(g)^{-1} = U(g)^*$$

Постулат за ковариантност

A е локализирана в $\mathcal{O}$, то $U(g)\, A\, U(g)^{-1}$ е локализирана в $g(\mathcal{O})$

$$\bigcirc_{\mathcal{O}} \xmapsto{\quad g \quad} \bigcirc_{g(\mathcal{O})}$$

Частен случай $g = t_a$ – транслация

$$t_a(x) = x + a$$

$$U(t_a) \equiv U(a) = e^{i a^\mu \hat{P}_\mu}$$

$$U(t_a) A\, U(t_a)^{-1} \equiv U(a) A\, U(a)^{-1}$$

$$\equiv e^{i a^\mu \hat{P}_\mu} A\, e^{-i a^\mu \hat{P}_\mu}$$

$$= \exp\left(i\, ad_{a^\mu \hat{P}_\mu}\right)(A)$$

$$= A + i\left[a^\mu \hat{P}_\mu, A\right]$$

$$+ \frac{i^2}{2!}\left[a^\mu \hat{P}_\mu, \left[a^\mu \hat{P}_\mu, A\right]\right]$$

$$+ \frac{i^3}{3!}\left[a^\mu \hat{P}_\mu, \left[a^\mu \hat{P}_\mu, \left[a^\mu \hat{P}_\mu, A\right]\right]\right]$$

$$+ \dots$$

Ако $[P_\mu, A] = 0 \iff$

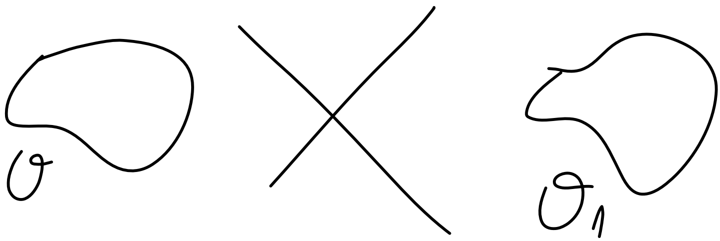
$$U(a) A\, U(a)^{-1} = A \qquad \forall a \in \mathbb{R}^{3,1}$$

$\Longrightarrow$ A е локализирана във
всяка пространствена област

$\rightsquigarrow$ $A \sim \hat{1}$

Тогава ако

$\hat{P}_\mu$ са локализирани в някое <u>огранич.</u> $\mathcal{O}$ и



ако $\mathcal{O}_1 \sim \mathcal{O}$

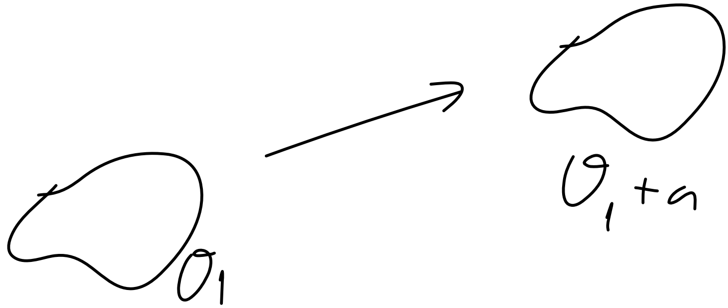
ще следва, че $[P_\mu, A] = 0$

$\forall A$ - локализирано в $\mathcal{O}_1$

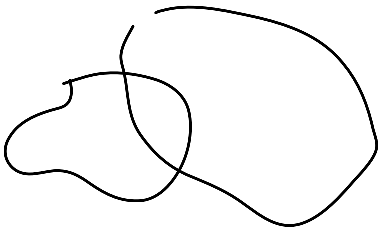
$\Longrightarrow$ $\exists$ ограничена област $\mathcal{O}_1$

т.ч. $\forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$ $U(a) A U(a)^{-1} = A$ $\forall a$

$\Rightarrow \quad A \in \mathcal{A}(O_1 + a) \quad \forall a$



$\Rightarrow \quad \forall A \in \mathcal{A}(O_1)$ е локализирана във всяко $O_1 + a$



Неявен постулат

Не може една наблюдаема A да е локализирана навсякъде освен ако не е константа

$$A = c \cdot \mathbb{1}$$

c) Положителност на енергията и вакуума

$$\mathrm{Spec}\,\{P_\mu\}_{\mu=0}^{4} \subseteq \overline{V^+}$$

Ако $\Psi \in \mathcal{H}$, $\Psi \neq 0$,

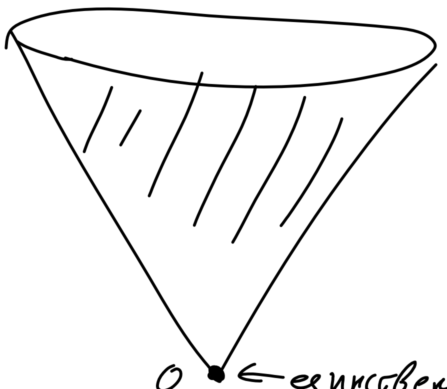
$$U(a)\Psi \sim \Psi \quad \forall a \in \mathbb{R}^{3,1}$$

Тогава Ψ с точност до пропорционалност е единствен

$$\Psi = \mathrm{const}\,.\,\Omega$$

вакуум

$$\Longleftrightarrow \quad \hat{P}_\mu \Psi = 0$$



0 ← единствената

дискретна спектрална точка и
ти е собствено число с 1мерно
собствено простр. = $\mathbb{C} \cdot \Omega$

Аксиоматичните схеми са 2 основни

1) ~~Теоретико~~-полева формулировка
на Wightman / Уайтман

2) Алгебрична КТП на Haag
Haag-Kastler

КТП = Локальная Квантовая Физика

QFT = LQP

2.1.1 Понятия от аксиоматичната квантова теория на полето

В тази точка ще изложим известни постулати и резултати от аксиоматичната квантова теория на полето. Постулатите – аксиомите на Уайтман – са приведени във формулировка адаптирана към по–нататъшните резултати в работата, при обща размерност $D \geq 2$ на пространството на Минковски $M \equiv \mathbb{R}^{D-1,1}$, но съответстват на изложените в [11], [6] и [1].

$(+\cdots+,-)$

Хилбертовото пространство на състоянията в квантовата теория на полето ще означим с $\mathfrak{H}$, а скаларното произведение в него – $\langle \Phi \,|\, \Psi \rangle$, за $\Phi, \Psi \in \mathfrak{H}$, което е линейно по десния аргумент и анти-линейно по левия. Квантовите полета се определят като операторно-значни обобщени функции с *обща дефиниционна област* $\mathfrak{D}_0$ – гъсто линейно подпространство на $\mathfrak{H}$,

инвариантна

$$\overline{\mathfrak{D}_0} = \mathfrak{H} \, . \tag{2.1.1}$$

По–точно, за всяка компонента θ_a на квантовите полета в теорията и всяка тест-функция f, е определен линеен оператор $\theta_a[f]$ от $\mathfrak{D}_0$ в $\mathfrak{D}_0$, линейно–зависещ от f (т.е. $\theta_a[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 \theta_a[f_1] + \alpha_2 \theta_a[f_2]$, за $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$). Операторът $\theta_a[f]$ е прието също да се записва като формален интеграл

преди φ_A сега θ_a

$$\theta_a[f] = \int\limits_M \theta_a(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x \in Op\,\mathfrak{D}_0 \text{ [13]} . \tag{2.1.2}$$

Тест–функциите f се приемат от класа на *бързо намаляващите*, т. е. от пространството $\mathcal{S}(M)$ [14] и по такъв начин, θ_a е линеен функционал над $\mathcal{S}(M)$ със стойности в $Op\,\mathfrak{D}_0$. Всеки линеен функционал θ_a се предполага *слабо непрекъснат*: $\langle \Phi \,|\, \theta_a[f]\, \Psi \rangle$ е обобщена функция от $\mathcal{S}'(M)$ за всеки $\Phi, \Psi \in \mathfrak{D}_0$. За спрегнатият оператор $\theta_a[f]^*$ се предполага, че държи инвариантно подпространството $\mathfrak{D}_0$ и свит върху него, описва спрегнатата компонента на θ_a^* на θ_a – или по–точно, $\theta_a[f]^*\big|_{\mathfrak{D}_0} = \theta_a^*[\overline{f}]$, където $\overline{f}$ е комплексно спрегнатата

за ермитови полета

[13] С означения като $Op\,\mathfrak{D}_0$ по–нататък ще бележим пространството от *всички* линейни оператори над указаното пространство – в случая $\mathfrak{D}_0$.

[14] За понятията от теорията на обобщените функции следваме главно [9], [10], [8], [2]. Част от тези

тест–функция на f (ср. с ф–ла (2.1.2)). Удобно е да се обединят всички квантови полета в теорията с техните компоненти в едно (комплексно) линейно пространство F – *пространството на полевите стойности*: на всяка полева компонента θ_a съпоставяме базисен вектор[15] ϑ^a в F. Тогава на всяка тест–функция f от $\mathcal{S}(M,\, F^*)$ – пространството на бързо намаляващите тест функции със стойности в дуалното пространство F^* – съпоставяме оператора:

$$\theta[f] := \sum_a \theta_a[f^a] \equiv \sum_a \int\limits_M \theta_a(x)\, f^a(x)\, dx \;\in\; Op\,\mathfrak{D}_0\,, \qquad f(x) \equiv \sum_a f^a(x)\, \vartheta_a\,, \tag{2.1.3}$$

където $\{\vartheta_a\}$ е дуалния базис на $\{\vartheta^a\}$. Ермитовото спрежение върху операторите $\theta[f]$ поражда спрежение върху F (и също върху F^* и пространството от тест–функции $\mathcal{S}(M,\, F^*)$) – анти-линейна инволюция върху F, която ще означаваме пак с “$*$” така, че:

$$\theta[f]^*\Big|_{\mathfrak{D}_0} = \theta[f^*]\;. \tag{2.1.4}$$

Условието за слаба непрекъснатост на операторно–значния функционал θ се записва като

$$\big\langle \Phi \,\big|\, \theta[\,\_\,]\, \overset{\Psi}{\Phi} \big\rangle \in \mathcal{S}'(M,\, F)\;{}^{((16}, \qquad \text{за всеки} \quad \Phi,\, \Psi \in \mathfrak{D}_0\,. \tag{2.1.5}$$

Размерността на пространството F, т.е. броя на *изходните* (пораждащите) линейно независими полета в теорията, може да бъде крайна или изброима. В случая когато размерността на F е безкрайна, под дуалното пространство F^* ще разбираме просто линейната обвивка (т.е. крайните линейни комбинации) на дуалния базис $\{\vartheta_a\}$ – имащо по такъв начин същата размерност[17] както и F. Топологичното линейно пространството $\mathcal{S}(M,\, F^*)$ е изоморфно на пряката сума на $dim\, F \equiv dim\, F^*$ екземпляра $\mathcal{S}(M)$, а $\mathcal{S}'(M,\, F)$ е неговото топологически спрегнато пространство. Така, $\mathcal{S}(M,\, F^*)$ е винаги *сепарабелно* – с тази цел ограничаваме размерностите на F и F^* до изброими. Всички суми по полевите индекси по–нататък, по естествени причини, ще имат винаги краен брой ненулеви членове.

Nikolov_N.M.,_Dissertation_2002.pdf,
страница 70-71

$M \equiv \mathbb{R}^{D-1,1}$

Дотук въведените условия имат "*технически*" *характер*, т.е. въвеждат една минимална, в известен смисъл, математическа рамка в която да се третират квантовите полета. Друг важен обект в квантовата теория на полето е пространствената симетрия, която се описва от унитарно представяне на групата на Поанкаре. Всъщност в хилбертовото пространство $\mathfrak{H}$ е унитарно представена *спинорната* група на Поанкаре $\mathfrak{P}$, състояща се от двойки (c, Λ), $c \in M$ и $\Lambda \in Spin_0(M)$, с умножение $(c_1, \Lambda_1)(c_2, \Lambda_2) = (\Lambda_1 c_2 + c_1, \Lambda_1 \Lambda_2)$. Унитарното представяне на $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{H}$ ще означим с $U(c, \Lambda)$, за $(c, \Lambda) \in \mathfrak{P}$. Заедно с него е определено и представяне $\pi(\Lambda)$ на спинорната група $Spin_0(M)$ върху пространството от полевите стойности F, от което се поражда действие на $\mathfrak{P}$ върху пространството от тест–функции,

$$((c, \Lambda)_* f)(x) := \pi(\Lambda)^{-1*} f\left(\Lambda^{-1}(x - c)\right) , \tag{2.1.6}$$

където $\pi(\Lambda)^{-1*}$ е спрегнатото представяне върху F^*. Следващо изискване на аксиоматичния подход е унитарното представяне $U(c, \Lambda)$ на $\mathfrak{P}$ да държи *инвариантно* гъстото

---

[15] спрямо който θ_a е един вид "координата"

[16] $\mathcal{S}'(M, F)$ е пространството на бавно растящите обобщени функции над M със стойности в F и е спрегнатото пространство към $\mathcal{S}(M, F^*)$.

[17] Под размерности на пространствата F^* и F се има предвид размерности в смисъл на *Хамел*.

подпространство $\mathfrak{D}_0$ в $\mathfrak{H}$ и заедно с това да е в сила следния трансформационен закон на полевите оператори,

$$U(c, \Lambda)\, \theta[f]\, U(c, \Lambda)^{-1} = \theta[(c, \Lambda)_* f] \quad (U(c, \Lambda)\, \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}_0) \quad , \tag{2.1.7}$$

за всяка тест–функция $f(x)$ и трансформация (c, Λ) от $\mathfrak{P}$. Използвайки формалния запис (2.1.2) и ф–ла (2.1.6), можем отново формално да запишем трансформационния закон (2.1.7) като

$$U(c, \Lambda)\, \theta_a(x)\, U(c, \Lambda)^{-1} = \sum_b \pi(\Lambda)_a^b\, \theta_b(\Lambda x + c) \tag{2.1.8}$$

(формално интегрирайки по части във ф–ла (2.1.2)).

За скаларно поле:

$$U(c, \Lambda)\, \theta(x)\, U(c, \Lambda)^{-1} = \theta(\Lambda x + c)$$

Връзка $(2.1.7) \longleftrightarrow (2.1.8)$

"$U(c,\Lambda)\,\theta(x)\,U(c,\Lambda)^{-1} = \theta(\Lambda x + c)$"

символична ф-ла

r. h. s. – спада към операцията субституция

$$x' = \Lambda x + a$$
$$\Lambda x = x' - a$$
$$x = \Lambda^{-1}(x' - a)$$

$$\int_M \theta(\underbrace{\Lambda x + a}_{x'})\, f(x)\, d^4x$$

$$\text{"="} \int_M \theta(x')\, f(\Lambda^{-1}(x'-a)) \underbrace{\left|\frac{d^4x}{d^4x'}\right|}_{1}\, d^4x' \quad \text{– за Лоренц.}$$

$$= \theta[f'],$$

$$f'(x) := f(\Lambda^{-1}(x-a))$$

$$(c,\Lambda)(x) := \Lambda x + c$$

$$(c_1,\Lambda_1)(c_2,\Lambda_2)(x)$$

$$= (c_1,\Lambda_1)(\Lambda_2 x + c_2)$$

$$= \Lambda_1(\Lambda_2 x + c_2) + c_1$$

$$= \Lambda_1\Lambda_2 x + \Lambda_1 c_2 + c_1$$

$$= (c_1 + \Lambda_1 c_2, \Lambda_1\Lambda_2)(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &U(\Lambda)\, F_{\mu\nu}(x)\, U(\Lambda)^{-1} \\ &= \Lambda^{\mu_1}_{\mu}\, \Lambda^{\nu_1}_{\nu}\, F_{\mu_1\nu_1}(\Lambda x) \end{aligned}}$$

— пример за Е.М. Поле (2.1.8)

Други основни условия върху унитарното представяне на спинорната група на Поанкаре са *спектралното условие* и *съществуването и единствеността на вакуума*. Първото гласи, че ермитовият генератор $-c \cdot \widehat{P} \equiv c^0\, \widehat{P}^0 - \sum_{k=1}^{D-1} c^k\, \widehat{P}^k$ на всяка време-подобна транслация, $c \cdot c \equiv c^2 < 0\,,\ c^0 > 0\,,$

$$U\,(\tau\, c,\, \mathbb{I}) \,=\, e^{-i\tau\, c \cdot \widehat{P}} \tag{2.1.9}$$

е неотрицателно дефинитен оператор, което е еквивалентно също на условието съвместният спектър на комутиращите ермитови генератори $\widehat{P}^0$, ..., $\widehat{P}^{D-1}$ да бъде съсредоточен в затворения конус на "бъдещето" $\overline{V}^{\,+}$,

$$\overline{V}^{\,+} \,=\, \left\{\, p \,\in\, M \,:\, p^2 \,\equiv\, p{\cdot}p \,\leq\, 0\,,\, p^0 \,\geq\, 0 \,\right\}\ . \tag{2.1.10}$$

Спектралното свойство (2.1.10) е релативистичният вариант на условието за *положителност на енергията*. Изискването за съществуване и единственост на вакуума гласи, че единствената собствена стойност от съвместния спектър на операторите $\widehat{P}_0$, ..., $\widehat{P}_{D-1}$ е нулата и тя има едномерно собствено подпространство. Фиксираме един нормиран образуващ на това собствено подпространство, $|0\rangle$, който се нарича *вакуум*. Така,

$$U\,(c,\, \mathbb{I})\;\Phi \,=\, \Phi\ , \quad \text{за всяко} \quad c \,\in\, M \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Phi \,\sim\, |0\rangle \,\in\, \mathfrak{D}_0\ . \tag{2.1.11}$$

С вакуума е свързано и едно специално условие за "*пълнота*": изисква се $|0\rangle$ да лежи в $\mathfrak{D}_0$ и да е *цикличен вектор*, което означава, че

$$\mathbb{C}\,|0\rangle \,+\, \overline{Span}\,\Big\{\theta\,[f_1]\,\ldots\,\theta\,[f_n]\,|0\rangle \,:\, n \,\in\, \mathbb{N},\ f_1,\, ...,\, f_n \,\in\, \mathcal{S}\,(M,\, F^*)\Big\} \,=\, \mathfrak{H}\ , \tag{2.1.12}$$

където $\overline{Span}$ бележи затворената линейна обвивка на множество.

Nikolov_N.M.,_Dissertation_2002.pdf,   страница 71-72

И последното условие на аксиоматичния подход е *локалността*. Тя предполага разбиването на полевите оператори на два класа, едните наречени *бозонни*, а другите *фермионни*. Такова разбиване означава $\mathbb{Z}_2$–градуировка в пространството на полевите стойности, $F = F_0 \oplus F_1$, като F_0 отговаря за бозонните полета, а F_1 – за фермионните. Локалността изисква два полеви оператора имащи взаимно пространствено-подобни аргументи – да комутират, ако поне единият е бозонен – и да антикомутират в противен случай. По–точно, ако означим p_a стойността на $\mathbb{Z}_2$–градуировката за компонентата θ_a, то свойството се записва като

$$\theta_a[f]\,\theta_b[h] - (-1)^{p_a p_b}\,\theta_b[h]\,\theta_a[f] = 0\,, \tag{2.1.13}$$

ако $(x-y)^2 > 0$ за всеки $x \in supp\, f$ и $y \in supp\, h$ [18] $(f,\, h \in \mathcal{S}(M))$ или формално,

$$\theta_a(x)\,\theta_b(y) - \underbrace{(-1)^{p_a p_b}}_{\text{нормална статистика}}\theta_a(y)\,\theta_b(x) = 0\,, \quad \text{ако} \quad (x-y)^2 > 0\,. \tag{2.1.14}$$

$\mathbb{Z}_2$–градуировката в F се предполага $*$–инвариантна и също инвариантна по отношение на представянето $\pi(\Lambda)$ на спинорната група в F. С други думи, при ермитово спрягане, типа на полето, бозонен или фермионен, не се променя, както не се променя и при Поанкаре трансформациите от ф–ла (2.1.8).

За *наблюдаемите* полета (които по правило са бозонни) локалността или още *локалната комутативност* има смисъл на *едновременна измеримост* между наблюдаемите величини отнасящи се към взаимно пространствено–подобни области, т. е. изразява факта, че всички причинни корелации се разпространяват със скорост не по-голяма от светлинната.

С това се изчерпват основните постулати в аксиоматичната квантова теория на полето. Условията (2.1.1)–(2.1.14) заедно с изискванията свързани с тях, са известни като аксиоми на Уайтман ([11], [6] и [1], с точност до подредба и смяна на означенията, както и преминаване към обща размерност D).

Остава за следващия път

В Nikolov_N.M.,_Dissertation_2002.pdf продължават

следствията от акс. на Уайтман

1) Теорема за реконструкция на Уайтм.

2) Теорема за аналитич. на корелац. ф-ции

Bargman - Hall - W.

3) Теорема на Рее - Шлидер

A е локална и

$$A \Omega = 0 \implies A = 0$$

Ако пък $A \Omega = \alpha \Omega$

собствен ?

$$\underbrace{(A - \alpha \hat{1})}_{= 0} \Omega = 0$$

$$A = \alpha \hat{1}$$

Остава за следващите избори

Физ. следствие:

след локално наблюдение

никога няма вакуум

Или: вакуума не може да се
остановии локално

Или: вакуума не е "локално" състояние

Остава за следващия път

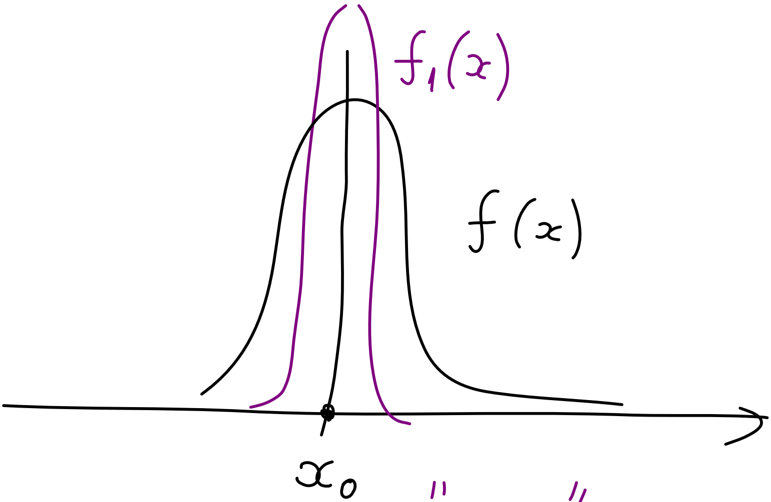
4) Теоремата на Паули за връзка Спин – Статистика

5) Теорема на Borchers
Борхерс

"Транзитивност на Локалността"

$\Theta(x)$ е локално спрямо $\phi(x)$
$\phi(x)$ е локално спрямо $\psi(x)$
$\Theta(x)$ е локално спрямо $\psi(x)$

повтаря – пропуснато е



$f, f_1, f_2, \dots$ "$\longrightarrow$" $\delta(x)$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^D} f_n(x)\, F(x)}_{F[f_n]} \xrightarrow[n]{} F(x_0)$$

$F[f_n]$ – размита (обобщ. ф.) около x_0

повтаря – пропуснато е

Проблем за умножаване на разпределения

$$\text{“}F_1(x)\text{”}, \quad \text{“}F_2(x)\text{”}$$

$$f \mapsto F_1[f] =: \int F_1(x) f(x)\, dx$$

$$f \mapsto F_2[f] =: \int F_2(x) f(x)\, dx$$

$$f \mapsto G[f] =: \int \text{“}F_1(x) F_2(x)\text{”} f(x)\, dx$$

$$\underbrace{F_1[f]\, F_2[f]}_{\int F_1(x_1) F_2(x_2) f(x_1) f(x_2)\, dx_1\, dx_2} \neq G[f] \qquad \#$$

повтаря – пропуснато е

$$(F_1 \otimes F_2)[f_1 \otimes f_2]$$

$$= F_1[f_1] \cdot F_2[f_2]$$

$$(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) := f_1(x_1) f_2(x_2)$$

$$f(x_1, x_2) = \sum_k f_{k,1}(x_1) f_{k,2}(x_2)$$

безкрайни суми

до стр. 15 от лекц. 7