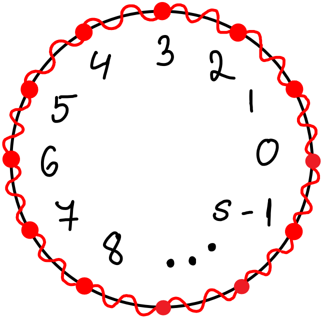
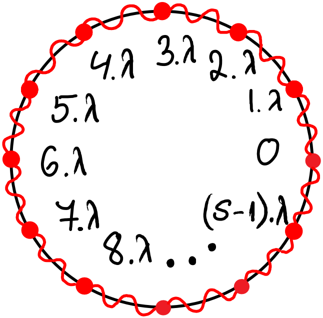
L09.01.001.01 Моделът на трептящ пръстен

1. Моделът на трептящ пръстен, като дискретна квантово-полеви модел на уравнението на Клайн-Гордън

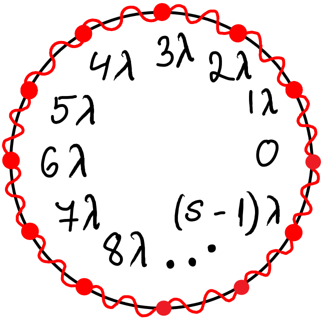


L09.01.001.02 Моделът на трептящ пръстен

1. Моделът на трептящ пръстен, като дискретна квантово-полеви модел на уравнението на Клайн-Гордън



L09.01.002.01 Моделът на трептящ пръстен

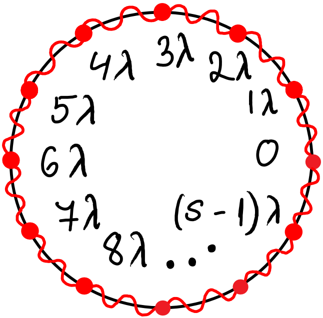


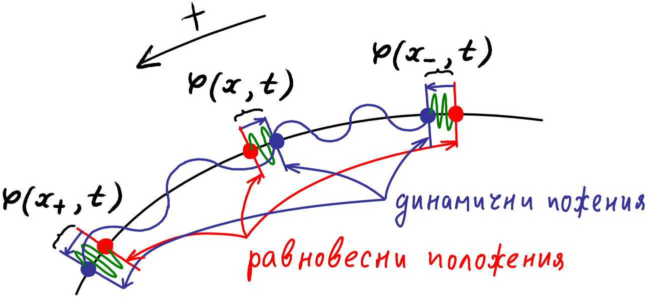
Към възлите на решетка

$$R = \{0, \lambda, 2\lambda, \ldots, (s-1)\lambda\}$$

върху окръжността са еластично свързани еднакви топчета с маса m.

L09.01.002.02 Моделът на трептящ пръстен





където $x = j\lambda$, $x_\pm = (j \pm 1)\lambda$ mod s

L09.01.003.01 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \underbrace{\sum_{x \in R} \lambda}_{\text{риманова сума}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

L09.01.003.03 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \underbrace{\sum_{x \in R}}_{\text{риманова сума}} \lambda \, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

$\Big\downarrow$ при непрекъснатата граница

$\int dx$

L09.01.003.04 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

където $\partial_x^+ \varphi(x,t) = \dfrac{\varphi(x_+,t) - \varphi(x,t)}{\lambda}$ – дясна дискретна производна

L09.01.003.05 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

където $\partial_x^- \varphi(x,t) = \dfrac{\varphi(x,t) - \varphi(x_-,t)}{\lambda}$ - лява дискретна производна

L09.01.003.06 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

където $\partial_x^\pm \varphi(x,t) = \dfrac{\pm(\varphi(x_\pm,t) - \varphi(x,t))}{\lambda}$ - дясна и лява дискретна производна

L09.01.003.07 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

където $\partial_x^{\pm} \varphi(x,t) = \frac{\pm(\varphi(x_\pm,t) - \varphi(x,t))}{\lambda}$ - дясна и лява дискретна производна

$$(\partial_x^2 \varphi)(x,t) = (\partial_x^+ \partial_x^- \varphi)(x,t) = \frac{\varphi(x_+,t) + \varphi(x_-,t) - 2\varphi(x,t)}{\lambda^2}$$

–центрирана дискретна втора производна

L09.01.004.01 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

L09.01.004.02 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

$$L_0 = \sum_{j=0}^{s} \left(\frac{m}{2} \dot{q}_j(t)^2 - \frac{\varkappa}{2} \left(q_{j+1}(t) - q_j(t) \right)^2 - \frac{\mu}{2} q_j(t)^2 \right)$$

– в "механични" означения

L09.01.004.02+ Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

$\lambda +$ ← води до константна добавка

$$L_0 = \sum_{j=0}^{s} \left(\frac{m}{2} \dot{q}_j(t)^2 - \frac{\varkappa}{2} \left(q_{j+1}(t) - q_j(t) \right)^2 - \frac{\mu}{2} q_j(t)^2 \right)$$

– в "механични" означения

L09.01.004.02 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

$$L_0 = \sum_{j=0}^{s} \left(\frac{m}{2} \dot{q}_j(t)^2 - \frac{\varkappa}{2} \left(q_{j+1}(t) - q_j(t) \right)^2 - \frac{\mu}{2} q_j(t)^2 \right)$$

– в "механични" означения

L09.01.004.03 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

$$L_0 = \sum_{j=0}^{s} \left(\frac{m}{2} \dot{q}_j(t)^2 - \frac{\varkappa}{2} \left(q_{j+1}(t) - q_j(t) \right)^2 - \frac{\mu}{2} q_j(t)^2 \right)$$

– в "механични" означения, като прехода става при:

$$\varphi(j\lambda, t) := \sqrt{\varkappa \lambda} \; q_j(t) \; , \quad c = \lambda \sqrt{\frac{\varkappa}{m}} \; , \quad M = \frac{\hbar}{\varkappa} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$$

L09.01.005.01 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

L09.01.005.02 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

$$I = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{4!} g \, \varphi(x,t)^4$$ – добавка на взаимодействието

L09.01.005.03 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

$$I = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{4!} g\, \varphi(x,t)^4$$ – добавка на взаимодействието

$$L = L_0 - I$$ – пълен лагранжиан

L09.01.005.04 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

$$I = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{4!} g\, \varphi(x,t)^4$$ – добавка на взаимодействието

$$L = L_0 - I$$ – пълен лагранжиан

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

L09.01.005.05 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

$$I = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{4!} g\, \varphi(x,t)^4$$ – добавка на взаимодействието

$$L = L_0 - I$$ – пълен лагранжиан

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

$$H = H_0 + I$$ – пълен хамилтониан

L09.01.006.01 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

L09.01.006.02 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

при свободния лагранжиан

Уравнения за движение:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \varphi(x,t) - \partial_x^2 \varphi(x,t) + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t) = 0$$

L09.01.006.03 Моделът на трептящ пръстен

Свободен лагранжиан

$$L_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

при свободния лагранжиан

Уравнения за движение:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \varphi(x,t) - \partial_x^2 \varphi(x,t) + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t) = 0$$

където:

$$(\partial_x^2 \varphi)(x,t) = \frac{\varphi(x_+,t) + \varphi(x_-,t) - 2\varphi(x,t)}{\lambda^2}$$

L09.01.006.04 Моделът на трептящ пръстен

Пълен лагранжиан

$$L_{\cancel{0}} = \sum_{x\in R} \lambda \, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 - (\partial_x^+\varphi)(x,t)^2 - \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

$-I$

при взаимодействие

Уравнения за движение:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2\varphi(x,t) - \partial_x^2\varphi(x,t) + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t) = -\frac{1}{3!}g\,\varphi(x,t)^3$$

където:

$$(\partial_x^2\varphi)(x,t) = \frac{\varphi(x_+,t) + \varphi(x_-,t) - 2\varphi(x,t)}{\lambda^2}$$

L09.01.007.01 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x \in R} \lambda \, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \left(\partial_t \varphi\right)(x,t)^2 + \left(\partial_x^+ \varphi\right)(x,t)^2 + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

– диагонализация

L09.01.007.02 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in R} \lambda \, e^{2\pi i \, xp/h} \, \varphi(x,t)$$

L09.01.007.03 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

- диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \dots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in R} \lambda \, e^{2\pi i \, xp/h} \varphi(x,t)$$

L09.01.007.04 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2 \right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \dots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$,

$= 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda \, e^{2\pi i \, xp/h} \varphi(x,t)$$

L09.01.007.05 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \ldots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$, $h = 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in R} \lambda \, e^{2\pi i \, xp/h} \varphi(x,t)$$

Използвайки, че $\delta_\lambda(x) := \frac{1}{\lambda} \delta_{x,0} = \frac{1}{h} \sum_{p \in \tilde{R}} \tilde{\lambda} \, e^{\pm 2\pi i \, xp/h}$

L09.01.007.06 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t\varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+\varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

– диагонализация посредством дискретна фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \ldots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\frac{1}{s} = \frac{\lambda\tilde{\lambda}}{h}$,

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h}\, \varphi(x,t)$$

Използвайки, че $\delta_\lambda(j\lambda) := \frac{1}{\lambda}\delta_{j,0} = \frac{\tilde{\lambda}}{h}\sum_{k=0}^{s-1} e^{\pm 2\pi i\, jk/s}$

тъждество

L09.01.007.07 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\left(\partial_t \varphi\right)(x,t)^2 + \left(\partial_x^+ \varphi\right)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \dots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\frac{1}{s} = \frac{\lambda\tilde{\lambda}}{h}$,

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h}\, \varphi(x,t)$$

Използвайки, че $\delta_\lambda(j\lambda) := \frac{1}{\lambda}\delta_{j,0} = \frac{1}{\lambda s}\sum_{k=0}^{s-1} e^{\pm 2\pi i\, jk/s}$

тъждество

L09.01.007.08 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \dots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\frac{1}{s} = \frac{\lambda\tilde{\lambda}}{h}$,

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h} \varphi(x,t)$$

Използвайки, че $\delta_\lambda(j\lambda) := \frac{1}{\lambda}\delta_{j,0} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{s}\underbrace{\sum_{k=0}^{s-1} e^{\pm 2\pi i\, jk/s}}_{\text{геометрична прогресия}}$

тъждество

L09.01.007.09 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2 \right)$$

- диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \ldots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\frac{1}{s} = \frac{\lambda\tilde{\lambda}}{h}$,

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda \, e^{2\pi i\, xp/h} \varphi(x,t)$$

Използвайки, че $\delta_\lambda(j\lambda) := \frac{1}{\lambda}\delta_{j,0} = \frac{\tilde{\lambda}}{h} \sum_{k=0}^{s-1} e^{\pm 2\pi i\, jk/s}$

тъждество

L09.01.007.10 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \dots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\frac{1}{s} = \frac{\lambda\tilde{\lambda}}{h}$,

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h}\, \varphi(x,t)$$

Използвайки, че $\delta_{\tilde{\lambda}}(k\tilde{\lambda}) := \frac{1}{\tilde{\lambda}}\delta_{k,0} = \frac{\lambda}{h}\sum_{j=0}^{s-1} e^{\pm 2\pi i\, jk/s}$

тъждество

L09.01.007.11 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \dots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$, $\quad h = 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h}\, \varphi(x,t)$$

Използвайки, че $\delta_{\tilde{\lambda}}(p) := \frac{1}{\tilde{\lambda}}\delta_{p,0} = \frac{1}{h}\sum_{x\in R} \lambda\, e^{\pm 2\pi i\, xp/h}$

L09.01.007.12 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t\varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^{\pm}\varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

- диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p\in\tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \dots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{\underbrace{h}_{=2\pi\hbar}}{s\lambda}$,

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}}\sum_{x\in R}\lambda\, e^{2\pi i\, xp/h}\,\varphi(x,t)$$

Използвайки, че $\delta_\lambda(x) := \frac{1}{\lambda}\delta_{x,0} = \frac{1}{h}\sum_{p\in\tilde{R}}\tilde{\lambda}\, e^{\pm 2\pi i\, xp/h}$

L09.01.007.13 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \ldots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$, $h = 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h}\, \varphi(x,t)$$

Използвайки, че $\quad f(x) = \sum_{x'\in R} \lambda\, \delta_\lambda(x-x')\, f(x')$

L09.01.007.14 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \dots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$, $\quad = 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in R} \lambda \, e^{2\pi i \, xp/h} \varphi(x,t)$$

Използвайки, че $\quad f(p) = \sum_{p' \in \tilde{R}} \tilde{\lambda} \, \delta_{\tilde{\lambda}}(p-p') \, f(p')$

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \dots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$, $= 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda \, e^{2\pi i \, xp/h} \, \varphi(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p\in \tilde{R}} \tilde{\lambda} \, e^{-2\pi i \, xp/h} \, \tilde{\varphi}(p,t)$$

L09.01.007.16 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

- диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \ldots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$,

$= 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h} \varphi(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,t) = \sum_{x'\in R} \lambda\, \delta_\lambda(x-x')\, \varphi(x',t)$$

извод

L09.01.007.17 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2 \right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \dots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$, $\quad = 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda \, e^{2\pi i \, xp/h} \, \varphi(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,t) = \sum_{x'\in R} \lambda \, \delta_\lambda(x-x') \, \varphi(x',t)$$

извод

L09.01.007.18 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \ldots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$,

$h = 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h} \varphi(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,t) = \sum_{x'\in R} \lambda \frac{1}{h} \sum_{p\in\tilde{R}} \tilde{\lambda}\, e^{\pm 2\pi i\,(x-x')p/h} \varphi(x',t)$$

извод

L09.01.007.19 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t\varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+\varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \dots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$,

$= 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h}\, \varphi(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,t) = \sum_{x'\in R} \lambda \frac{1}{h} \sum_{p\in\tilde{R}} \tilde{\lambda}\, e^{-2\pi i\,(x-x')p/h}\, \varphi(x',t)$$

извод

важи и за двата знака но ние избираме –

L09.01.001.20 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \dots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$, $h = 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h}\, \varphi(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,t) = \sum_{x'\in R} \lambda \frac{1}{h} \sum_{p\in\tilde{R}} \tilde{\lambda}\, e^{-2\pi i\,(x-x')p/h}\, \varphi(x',t)$$

↑ извод

L09.01.007.21 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \ldots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$,

$= 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h} \varphi(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,t) = \sum_{x'\in R} \lambda \frac{1}{h} \sum_{p\in\tilde{R}} \tilde{\lambda}\, e^{-2\pi i\, xp/h} e^{2\pi i\, x'p/h} \varphi(x',t)$$

извод

L09.01.007.22 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2 \right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \dots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$, $\quad h = 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h}\, \varphi(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,t) = \sum_{x'\in R} \lambda \frac{1}{h} \sum_{p\in\tilde{R}} \tilde{\lambda}\, e^{-2\pi i\, xp/h}\, e^{2\pi i\, x'p/h}\, \varphi(x',t)$$

извод

L09.01.007.23 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \ldots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$, $= 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in R} \lambda\, e^{2\pi i \, xp/h} \varphi(x,t)$$

$$\Rightarrow \varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p \in \tilde{R}} \tilde{\lambda}\, e^{-2\pi i \, xp/h} \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x' \in R} \lambda\, e^{2\pi i \, x'p/h} \varphi(x',t)$$

извод

L09.01.007.24 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

- диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \ldots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$, $= 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h} \varphi(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p \in \tilde{R}} \tilde{\lambda}\, e^{-2\pi i\, xp/h} \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x' \in R} \lambda\, e^{2\pi i\, x'p/h} \varphi(x',t)$$

извод

L09.01.007.25 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2 \right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \dots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$, $h = 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda \, e^{2\pi i \, xp/h} \varphi(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p\in\tilde{R}} \tilde{\lambda} \, e^{-2\pi i \, xp/h} \tilde{\varphi}(p,t)$$

извод

L09.01.007.26 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

– диагонализация посредством дискретна Фурие трансформация

за $p \in \tilde{R} = \{0, 1\tilde{\lambda}, \ldots, (s-1)\tilde{\lambda}\}$ при $\tilde{\lambda} := \frac{h}{s\lambda}$, $h = 2\pi\hbar$

$$\tilde{\varphi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h}\, \varphi(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p\in \tilde{R}} \tilde{\lambda}\, e^{-2\pi i\, xp/h}\, \tilde{\varphi}(p,t)$$ – обратна Фурие трансф.

L09.01.008.01 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

– диагонализация посредством

$$\tilde{\varphi}(p,t) := \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in R} \lambda \, e^{2\pi i \, xp/h} \, \varphi(x,t)$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p \in \tilde{R}} \tilde{\lambda} \, e^{-2\pi i \, xp/h} \, \tilde{\varphi}(p,t)$$

L09.01.008.02 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

$\Updownarrow$ - диагонализация посредством

$$\tilde{\varphi}(p,t) := \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in R} \lambda \, e^{2\pi i \, xp/h} \, \varphi(x,t)$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p \in \tilde{R}} \tilde{\lambda} \, e^{-2\pi i \, xp/h} \, \tilde{\varphi}(p,t)$$

$$H_0 = \sum_{p \in \tilde{R}} \tilde{\lambda} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\left|(\partial_t \tilde{\varphi})(p,t)\right|^2 + \frac{\omega(p)^2}{c^2}\left|\tilde{\varphi}(p,t)\right|^2\right)$$

L09.01.008.02+ Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

$\Updownarrow$ – диагонализация посредством

$$\tilde{\varphi}(p,t) := \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h}\, \varphi(x,t)$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p\in \tilde{R}} \tilde{\lambda}\, e^{-2\pi i\, xp/h}\, \tilde{\varphi}(p,t)$$

$$H_0 = \sum_{p\in\tilde{R}} \tilde{\lambda} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\left|(\partial_t \tilde{\varphi})(p,t)\right|^2 + \frac{\omega(p)^2}{c^2}\left|\tilde{\varphi}(p,t)\right|^2\right)$$

L09.01.008.02 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

$\Updownarrow$

- диагонализация посредством

$$\tilde{\varphi}(p,t) := \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h}\, \varphi(x,t)$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p \in \tilde{R}} \tilde{\lambda}\, e^{-2\pi i\, xp/h}\, \tilde{\varphi}(p,t)$$

$$H_0 = \sum_{p \in \tilde{R}} \tilde{\lambda} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\left|(\partial_t \tilde{\varphi})(p,t)\right|^2 + \frac{\omega(p)^2}{c^2}\left|\tilde{\varphi}(p,t)\right|^2\right)$$

L09.01.008.03 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x \in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

$$\Updownarrow$$

Използва се и условието за реалност:

$$\varphi(x,t)^* = \varphi(x,t) \iff \tilde{\varphi}(p,t)^* = \tilde{\varphi}(-p,t)$$

$$H_0 = \sum_{p \in \tilde{R}} \tilde{\lambda} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\left|(\partial_t \tilde{\varphi})(p,t)\right|^2 + \frac{\omega(p)^2}{c^2}\left|\tilde{\varphi}(p,t)\right|^2\right)$$

L09.01.008.04 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x \in R} \lambda \, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} (\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(x,t)^2 \right)$$

$$\Updownarrow$$

Собствени (нормални) честоти:

$$\omega(p) = c \sqrt{\frac{4}{\lambda^2} \sin^2 \frac{\pi p \lambda}{h} + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2}}$$

$$H_0 = \sum_{p \in \tilde{R}} \tilde{\lambda} \, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \left| (\partial_t \tilde{\varphi})(p,t) \right|^2 + \frac{\omega(p)^2}{c^2} \left| \tilde{\varphi}(p,t) \right|^2 \right)$$

L09.01.008.05 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

$$\Updownarrow$$

Собствени (нормални) честоти:

$$\omega(p) = c\sqrt{\frac{4}{\lambda^2}\sin^2\frac{p\lambda}{2\hbar} + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}}$$

$$H_0 = \sum_{p\in\tilde{R}} \tilde{\lambda} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\left|(\partial_t\tilde{\varphi})(p,t)\right|^2 + \frac{\omega(p)^2}{c^2}\left|\tilde{\varphi}(p,t)\right|^2\right)$$

L09.01.008.06 Моделът на трептящ пръстен

Свободен хамилтониан

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t\varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+\varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

$$\Updownarrow$$

Собствени (нормални) честоти:

$$\omega(p) = c\sqrt{\frac{4}{\lambda^2}\sin^2\frac{p\lambda}{2\hbar} + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}} \underset{\lambda\to 0}{\approx} \frac{1}{\hbar}\sqrt{p^2c^2+M^2c^4}$$

$$H_0 = \sum_{p\in\tilde{R}}\tilde{\lambda}\, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\left|(\partial_t\tilde{\varphi})(p,t)\right|^2 + \frac{\omega(p)^2}{c^2}\left|\tilde{\varphi}(p,t)\right|^2\right)$$

Скобки на Поасон

$$\{\partial_t \varphi(x,t), \varphi(x',t)\} = c^2 \delta_\lambda(x-x') \equiv c^2 \frac{1}{\lambda} \delta_{x,x'}$$

$$\{\partial_t \varphi(x,t), \partial_t \varphi(x',t)\} = 0 = \{\varphi(x,t), \varphi(x',t)\}$$

L09.01.009.02 Моделът на трептящ пръстен

Скобки на Поасон

$$\{\partial_t \varphi(x,t), \varphi(x',t)\} = c^2 \delta_\lambda(x-x') \equiv c^2 \frac{1}{\lambda} \delta_{x,x'}$$

$$\{\partial_t \varphi(x,t), \partial_t \varphi(x',t)\} = 0 = \{\varphi(x,t), \varphi(x',t)\}$$

понеже:

$$\frac{\partial L\left(\left(\varphi(x',t), \partial_t \varphi(x',t)\right)_{x'}\right)}{\partial\left(\partial_t \varphi(x,t)\right)} = \frac{\lambda}{c^2} \partial_t \varphi(x,t)$$

е канонично спрегнатия импулс на $\varphi(x,t)$

Скобки на Поасон

$$\{\partial_t \varphi(x,t), \varphi(x',t)\} = c^2 \delta_\lambda(x-x') \equiv c^2 \frac{1}{\lambda} \delta_{x,x'}$$

$$\{\partial_t \varphi(x,t), \partial_t \varphi(x',t)\} = 0 = \{\varphi(x,t), \varphi(x',t)\}$$

обърнете внимание: каноничните скобки на Поасон са винаги при равни времена

L09.01.009.04 Моделът на трептящ пръстен

Скобки на Поасон

$$\{\partial_t \varphi(x,t), \varphi(x',t)\} = c^2 \delta_\lambda(x - x') \equiv c^2 \frac{1}{\lambda} \delta_{x,x'}$$

- трансфомация при прехода

$$\tilde{\varphi}(p,t) := \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h} \varphi(x,t)$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p \in \tilde{R}} \tilde{\lambda}\, e^{-2\pi i\, xp/h} \tilde{\varphi}(p,t)$$

L09.01.009.05 Моделът на трептящ пръстен

Скобки на Поасон

$$\{\partial_t \varphi(x,t), \varphi(x',t)\} = c^2 \delta_\lambda(x-x') \equiv c^2 \frac{1}{\lambda}\delta_{x,x'}$$

$\Updownarrow$ – трансфомация при прехода

$$\tilde\varphi(p,t) := \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h}\, \varphi(x,t)$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p\in\tilde R} \tilde\lambda\, e^{-2\pi i\, xp/h}\, \tilde\varphi(p,t)$$

$$\{\partial_t \tilde\varphi(p,t), \tilde\varphi(p',t)\} = c^2 \delta_{\tilde\lambda}(p+p') \equiv c^2 \frac{1}{\tilde\lambda}\delta_{p,-p'}$$

L09.01.009.05+ Моделът на трептящ пръстен

Скобки на Поасон

$$\{\partial_t \varphi(x,t), \varphi(x',t)\} = c^2 \delta_\lambda(x-x') \equiv c^2 \frac{1}{\lambda}\delta_{x,x'}$$

$\Updownarrow$ – трансфомация при прехода

$$\tilde{\varphi}(p,t) := \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h}\, \varphi(x,t)$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p\in \tilde{R}} \tilde{\lambda}\, e^{-2\pi i\, xp/h}\, \tilde{\varphi}(p,t)$$

$$\{\partial_t \tilde{\varphi}(p,t), \tilde{\varphi}(p',t)\} = c^2 \delta_{\tilde{\lambda}}(p+p') \equiv c^2 \frac{1}{\tilde{\lambda}}\delta_{p,-p'}$$

L09.01.009.05 Моделът на трептящ пръстен

Скобки на Поасон

$$\{\partial_t \varphi(x,t), \varphi(x',t)\} = c^2 \delta_\lambda(x - x') \equiv c^2 \frac{1}{\lambda} \delta_{x,x'}$$

– трансфомация при прехода

$$\tilde{\varphi}(p,t) := \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in R} \lambda \, e^{2\pi i \, xp/h} \, \varphi(x,t)$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p \in \tilde{R}} \tilde{\lambda} \, e^{-2\pi i \, xp/h} \, \tilde{\varphi}(p,t)$$

$$\{\partial_t \tilde{\varphi}(p,t), \tilde{\varphi}(p',t)\} = c^2 \delta_{\tilde{\lambda}}(p + p') \equiv c^2 \frac{1}{\tilde{\lambda}} \delta_{p,-p'}$$

L09.01.009.06 Моделът на трептящ пръстен

Скобки на Поасон

$$\{\partial_t \varphi(x,t), \partial_t \varphi(x',t)\} = 0 = \{\varphi(x,t), \varphi(x',t)\}$$

$\Updownarrow$

- трансфомация при прехода

$$\tilde{\varphi}(p,t) := \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x \in R} \lambda \, e^{2\pi i \, xp/h} \, \varphi(x,t)$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p \in \tilde{R}} \tilde{\lambda} \, e^{-2\pi i \, xp/h} \, \tilde{\varphi}(p,t)$$

$$\{\partial_t \tilde{\varphi}(p,t), \partial_t \tilde{\varphi}(p',t)\} = 0 = \{\tilde{\varphi}(p,t), \tilde{\varphi}(p',t)\}$$

L09.01.010.01 Моделът на трептящ пръстен

$$H_0 = \sum_{x\in R} \lambda \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}(\partial_t \varphi)(x,t)^2 + (\partial_x^+ \varphi)(x,t)^2 + \frac{M^2c^2}{\hbar^2}\varphi(x,t)^2\right)$$

$$\{\partial_t \varphi(x,t), \varphi(x',t)\} = c^2 \delta_\lambda(x-x') \equiv c^2 \frac{1}{\lambda}\delta_{x,x'}$$

$$\{\partial_t \varphi(x,t), \partial_t \varphi(x',t)\} = 0 = \{\varphi(x,t), \varphi(x',t)\}$$

$$\Updownarrow \qquad \tilde{\varphi}(p,t) := \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{x\in R} \lambda\, e^{2\pi i\, xp/h} \varphi(x,t)$$

$$H_0 = \sum_{p\in\tilde{R}} \tilde{\lambda} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\left|(\partial_t \tilde{\varphi})(p,t)\right|^2 + \frac{\omega(p)^2}{c^2}\left|\tilde{\varphi}(p,t)\right|^2\right)$$

$$\{\partial_t \tilde{\varphi}(p,t), \tilde{\varphi}(p',t)\} = c^2 \delta_{\tilde{\lambda}}(p+p') \equiv c^2 \frac{1}{\tilde{\lambda}}\delta_{p,-p'}$$

$$\{\partial_t \tilde{\varphi}(p,t), \partial_t \tilde{\varphi}(p',t)\} = 0 = \{\tilde{\varphi}(p,t), \tilde{\varphi}(p',t)\}$$

L09.01.010.02 Моделът на трептящ пръстен

$$H_0 = \sum_{p \in \tilde{\mathbb{R}}} \tilde{\lambda}\, \hbar\, \omega(p)\, \frac{1}{2} \left(a(p)^* a(p) + a(p) a(p)^* \right)$$

$$\{a(p), a(p')^*\} = i\hbar^{-1} \delta_{\tilde{\lambda}}(p - p') = i\hbar^{-1} \tilde{\lambda}^{-1} \delta_{p,-p'}$$

$$\{a(p), a(p')\} = 0 = \{a(p)^*, a(p')^*\}$$

$$\Updownarrow \qquad a(p) = \sqrt{\frac{\omega(p)}{2c\hbar}}\, \tilde{\varphi}(p,0) + i \sqrt{\frac{1}{2c\,\omega(p)\hbar}}\, \partial_t \tilde{\varphi}(p,0)$$

$$H_0 = \sum_{p \in \tilde{\mathbb{R}}} \tilde{\lambda}\, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \left| (\partial_t \tilde{\varphi})(p,t) \right|^2 + \frac{\omega(p)^2}{c^2} \left| \tilde{\varphi}(p,t) \right|^2 \right)$$

$$\{\partial_t \tilde{\varphi}(p,t), \tilde{\varphi}(p',t)\} = c^2 \delta_{\tilde{\lambda}}(p + p') = c^2 \frac{1}{\tilde{\lambda}} \delta_{p,-p'}$$

$$\{\partial_t \tilde{\varphi}(p,t), \partial_t \tilde{\varphi}(p',t)\} = 0 = \{\tilde{\varphi}(p,t), \tilde{\varphi}(p',t)\}$$

L09.01.010.03 Моделът на трептящ пръстен

$$\hat{H}_0 = \sum_{p\in\tilde{\mathbb{R}}} \tilde{\lambda}\, \hbar\, \omega(p)\, \frac{1}{2}\left(\hat{a}(p)^*\hat{a}(p) + \hat{a}(p)\hat{a}(p)^*\right)$$

$$\{\hat{A},\hat{B}\}_q := \frac{i}{\hbar}[\hat{A},\hat{B}]$$

$$\{\hat{a}(p), \hat{a}(p')^*\}_q = i\hbar^{-1}\delta_{\tilde{\lambda}}(p-p') = i\hbar^{-1}\tilde{\lambda}^{-1}\delta_{p,-p'}$$

$$\{\hat{a}(p), \hat{a}(p')\}_q = 0 = \{\hat{a}(p)^*, \hat{a}(p')^*\}_q$$

$$\Updownarrow \qquad \hat{a}(p) = \sqrt{\frac{\omega(p)}{2c\hbar}}\,\hat{\tilde{\varphi}}(p,0) + i\sqrt{\frac{1}{2c\,\omega(p)\hbar}}\,\partial_t\hat{\tilde{\varphi}}(p,0)$$

$$H_0 = \sum_{p\in\tilde{\mathbb{R}}} \tilde{\lambda}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\left|(\partial_t\hat{\tilde{\varphi}})(p,t)\right|^2 + \frac{\omega(p)^2}{c^2}\left|\hat{\tilde{\varphi}}(p,t)\right|^2\right)$$

$$\{\partial_t\hat{\tilde{\varphi}}(p,t), \hat{\tilde{\varphi}}(p',t)\}_q = c^2\delta_{\tilde{\lambda}}(p+p') = c^2\frac{1}{\tilde{\lambda}}\delta_{p,-p'}$$

$$\{\partial_t\hat{\tilde{\varphi}}(p,t), \partial_t\hat{\tilde{\varphi}}(p',t)\}_q = 0 = \{\hat{\tilde{\varphi}}(p,t), \hat{\tilde{\varphi}}(p',t)\}_q$$

L09.01.010.04 Моделът на трептящ пръстен

$$\hat{H}_0 = \sum_{p\in\tilde{\mathbb{R}}} \tilde{\lambda}\, \hbar\, \omega(p) \frac{1}{2}\left(\hat{a}(p)^*\hat{a}(p) + \hat{a}(p)\hat{a}(p)^*\right)$$

$$\left[\hat{a}(p), \hat{a}(p')^*\right] = \delta_{\tilde{\lambda}}(p-p') = \tilde{\lambda}^{-1}\delta_{p,-p'}$$

$$\left[\hat{a}(p), \hat{a}(p')\right] = 0 = \left[\hat{a}(p)^*, \hat{a}(p')^*\right]$$

$$\{\hat{A},\hat{B}\}_q := \frac{i}{\hbar}[\hat{A},\hat{B}]$$

$$\Updownarrow \qquad \hat{a}(p) = \sqrt{\frac{\omega(p)}{2c\hbar}}\,\hat{\tilde{\varphi}}(p,0) + i\sqrt{\frac{1}{2c\,\omega(p)\hbar}}\,\partial_t\hat{\tilde{\varphi}}(p,0)$$

$$H_0 = \sum_{p\in\tilde{\mathbb{R}}} \tilde{\lambda}\, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\left|(\partial_t\hat{\tilde{\varphi}})(p,t)\right|^2 + \frac{\omega(p)^2}{c^2}\left|\hat{\tilde{\varphi}}(p,t)\right|^2\right)$$

$$\left[\partial_t\hat{\tilde{\varphi}}(p,t), \hat{\tilde{\varphi}}(p',t)\right] = -i\hbar c^2\delta_{\tilde{\lambda}}(p+p') = -i\hbar c^2\frac{1}{\tilde{\lambda}}\delta_{p,-p'}$$

$$\left[\partial_t\hat{\tilde{\varphi}}(p,t), \partial_t\hat{\tilde{\varphi}}(p',t)\right] = 0 = \left[\hat{\tilde{\varphi}}(p,t), \hat{\tilde{\varphi}}(p',t)\right]$$

L09.01.010.05 Моделът на трептящ пръстен

$$\hat{H}_0 = \sum_{p \in \tilde{\mathbb{R}}} \tilde{\lambda}\, \hbar\, \omega(p)\, \frac{1}{2} \left(\hat{a}(p)^* \hat{a}(p) + \hat{a}(p) \hat{a}(p)^* \right)$$

$$[\hat{a}(p), \hat{a}(p')^*] = \delta_{\tilde{\lambda}}(p-p') = \tilde{\lambda}^{-1} \delta_{p,-p'}$$

$$[\hat{a}(p), \hat{a}(p')] = 0 = [\hat{a}(p)^*, \hat{a}(p')^*]$$

$$\Updownarrow \qquad \hat{a}(p) = \sqrt{\frac{\omega(p)}{2c\hbar}}\, \hat{\tilde{\varphi}}(p,0) + i \sqrt{\frac{1}{2c\,\omega(p)\hbar}}\, \partial_t \hat{\tilde{\varphi}}(p,0)$$

$$H_0 = \sum_{p \in \tilde{\mathbb{R}}} \tilde{\lambda}\, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \left| (\partial_t \hat{\tilde{\varphi}})(p,t) \right|^2 + \frac{\omega(p)^2}{c^2} \left| \hat{\tilde{\varphi}}(p,t) \right|^2 \right)$$

$$[\partial_t \hat{\tilde{\varphi}}(p,t), \hat{\tilde{\varphi}}(p',t)] = -i\hbar c^2 \delta_{\tilde{\lambda}}(p+p') \equiv -i\hbar c^2 \frac{1}{\tilde{\lambda}} \delta_{p,-p'}$$

$$[\partial_t \hat{\tilde{\varphi}}(p,t), \partial_t \hat{\tilde{\varphi}}(p',t)] = 0 = [\hat{\tilde{\varphi}}(p,t), \hat{\tilde{\varphi}}(p',t)]$$