

2 Аксиоми на общите квантови системи. Част 1: събития и състояния

Първата цел в настоящия курс е дадем аксиоматично описание на квантовите системи. За краткост ще ги наричаме просто системи или също, статистически системи, понеже ще предположим, че най-общо те могат да имат вероятностен характер.

Аксиомите на квантовата теория сме обособили в три общи раздела:

- Аксиоми на общи системи
- Аксиоми на съставни системи
- Квантови трансформации

“Общи системи” означава системи, без допълнителна структура. Например, отделните квантови битове в един квантов компютър ще бъдат примери на общи системи, но и целия квантов компютър може да се разглежда, като обща система, ако игнорираме съставната му структура. В случая на класическата теория на една “обща система” ще отговаря просто едно множество.

“Съставните системи” са системи изградени от няколко общи системи. Това е допълнително внасяне на структура в една обща система, при което я разглеждаме, като съставена от няколко под-системи. Както отбелязахме по-горе, квантовият компютър ще бъде основния ни пример на съставна система. В случая на класическата теория на една “съставна система” ще отговаря на множество, което е представено, като *декартово произведение* на други множества (съответните ѝ компоненти).

Докато първите два аксиоматични раздела описват “статиката” на квантовите системи, третият раздел ще опише тяхната “динамика”. Впрочем, в квантовите трансформации се включват не само измененията на системата в хода на еволюцията ѝ във времето, но и преобразованията на симетрия. Основното приложение в курса на квантовите трансформации ще бъдат квантовите изчисления. В случая на класическата теория “трансформациите” между системите са просто функциите между съответните множества.

Паралелно на горните три аксиоматични раздела, ние ще разгледаме и два подхода:

- Квантово-логически подход
- Алгебричен подход

Ние ще започнем нашето изложение с квантово-логическия подход. Исторически, това се явява заключителен етап в изграждането на квантовата теория. Този подход изхожда от възможно най-общи и първични предположения, което е неговото основно предимство.

Алгебричният подход въвежда повече първични понятия от квантово-логическия подход и фактически се явява негова интерпретация. Оказва се обаче, че по същество това е основната интерпретация на квантово-логическия подход. Тоест, двата подхода са еквивалентни. Алгебричният подход обаче има повече изразни средства, поради което той е значително по-удобен и ние ще преминем след първата част на аксиоматиката основно към него.

2.1 Начална постановка

Аксиоматичните части ще бъдат специално отделени по-нататък с вертикална черта от ляво на текста.

Начална постановка: определение на статистическа система.

В началото на всеки модел на една система ние си мислим за две съвкупности, елементите на първата от които ще наричаме **събития**¹⁶ на системата, а елементите на втората – **състояния**¹⁷ на системата. Множествата на всички събития на системата ще означаваме с **Events**, а множеството на всички състояния на системата – с **States**. Заедно с това ще ни бъде определена и функция, която на всяка двойка от събитие $Q \in \mathbf{Events}$ и състояние $\rho \in \mathbf{States}$ ни задава число

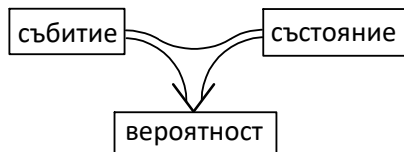
$$\mathit{Prob} : \mathbf{Events} \times \mathbf{States} \rightarrow [0, 1] : (Q, \rho) \mapsto \mathit{Prob}_\rho(Q) \ (\equiv \mathit{Prob}_\rho(Q)), \quad (2.1)$$

което се нарича **вероятност за настъпване (регистриране) на събитието Q в състояние ρ** . На кратко ще казваме, че е зададена

статистическа система от данни:

$$(\mathbf{Events}, \mathbf{States}, \text{Prob} : \mathbf{Events} \times \mathbf{States} \rightarrow [0, 1]). \quad (2.2)$$

Схематично това е изразено на фиг. 17.



фиг. 17: Основна теоретична схема

Ние ще се постараем да приведем подходящи аксиоми за функцията (2.1), така че *пълното описание на системата да следва единствено от информацията, съдържаща се в задаването на тази функция*. За да изразим последното ние въвеждаме следната аксиома.

Еднаквост (еквивалентност / изоморфност) на статистически системи.

Две статистически системи определени от данни

$$(\mathbf{Events}_1, \mathbf{States}_1, \text{Prob} : \mathbf{Events}_1 \times \mathbf{States}_1 \rightarrow [0, 1]),$$

$$(\mathbf{Events}_2, \mathbf{States}_2, \text{Prob} : \mathbf{Events}_2 \times \mathbf{States}_2 \rightarrow [0, 1])$$

се наричат **еквивалентни (изоморфни)**, ако са зададени биекции

$$F : \mathbf{Events}_1 \cong \mathbf{Events}_2,$$

$$G : \mathbf{States}_1 \cong \mathbf{States}_2, \quad (2.3)$$

такива че

$$\text{Prob}_{G(\rho)}(F(Q)) = \text{Prob}_\rho(Q), \quad (2.4)$$

за всеки $Q \in \mathbf{Events}_1$ и $\rho \in \mathbf{States}_1$.

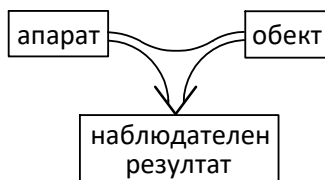
Въведеното понятие за еквивалентност не изключва въвеждането в бъдеще на допълнителни структури върху квантовите системи. Така например, третирането на една система, като съставена от части (например, система

от няколко бита) е вид допълнителна структура. На този етап ние просто определяме най-общото понятие за еквивалентност. Аналогична ситуация имаме и в теория на множествата, където първо се отделя понятието еднаквост (биекция) между множествата, като безструктурни съвкупности. Едва след това, когато някои множества се снабдят с допълнителна структура, като група, линейно пространство и т.н., ние вече отделяме по-фини понятия за еднаквост (изоморфизъм) на получените структури.

2.2 Илюстрации на началната постановка

Понятията “събитие” и “състояние” ще разглеждаме, като първични понятия, които не подлежат на определение, също както понятията “точка” и “права” в геометрията са първични. Въпреки това обаче е полезно, а всъщност е и необходимо да се дадат по-конкретни илюстрации на събитията, състоянията и основната ни теоретична схема от фиг. 1. Нека да подчертаем, че тук става дума за само за илюстрации, които нито могат да обяснят напълно смисъла на първичните ни понятия, нито могат да изчерпат всички случаи от нашата практика, в които можем да ги приложим.

Като една първа конкретизация можем да заменим фиг. 1 със следната схема:



фиг. 18: Практическа постановка на теоретичната схема от фиг. 1

В случая “апарат” може да бъде например и цяла изследователска установка в един физичен експеримент, в който се изследва даден физичен “обект”. “Наблюдателният резултат”, който дава експеримента, е някакво измерване върху изследвания обект и то включва редица елементарни алтернативи, като например, възможни измерени стойности на някаква величина. От елементарните наблюдателни алтернативи можем да построим и събитията

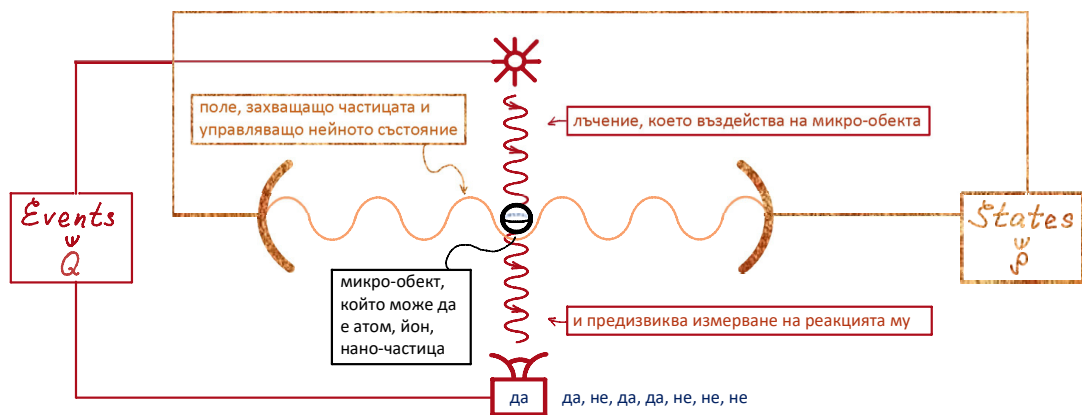
на провеждания експеримент и в частност, самите елементарни алтернативи съответстват на така наречените *елементарни събития на експеримента*.¹⁸ Ако се концентрираме върху едно събитие, то наблюдателния резултат ще бъде една последователност от потвърждения или отрицания на събитието:

$$\text{да, не, не, да, не, да, да, да, не, } \dots, \quad (2.5)$$

където “да” означава настъпване (регистрация) на елементарна наблюдателна алтернатива, която е включена в даденото събитие, а “не” – настъпване (регистрация) на друга елементарна алтернатива, която *не се включва* в събитието. Вероятността за събитието, тогава се изчислява по *закона за големите числа*,¹⁹ като граница:

$$Prob_p(Q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{брой “да” в } N \text{ последователни опита}}{N} \quad (2.6)$$

За още по-голяма конкретност, на фиг. 21 е изобразена схема на квантов експеримент.



фиг. 19: Схема на квантова система: включени са наблюдавания микро-обект и измервателната установка

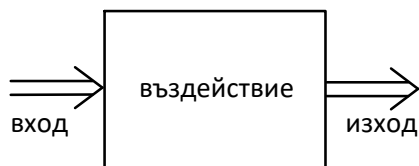
На фигурата в центъра е изследвания микро-обект, който може да бъде атом, йон, нано-частица. Той се удържа в малка област на пространството от силово

¹⁸В точка 4.3 ще въведем точното понятие за “елементарно събитие на експеримент”. Преди това обаче, в точка 3.8 ще имаме и по-силно понятие за елементарно събитие по отношение на цялата система.

¹⁹law of large numbers (in probability theory)

(електромагнитно) поле, схематично отбелязано на фигурата по хоризонтала. Същото това поле (или допълнителни полета) формират и управляват състоянието на микро-частицата. След установяване на желаното състояние ние въздействаме на микро-частицата с лъчение (т.е., отново електромагнитно поле) изобразено на фигурата по вертикалата. Посредством детектор, който е изобразен най-долу на фигурата ние измерваме реакцията на микро-частицата, като следим за два резултата: “да” (т.е., получена е желаната реакция на въздействието) и “не” (желаната реакция на въздействието отсъства). От дясно и ляво са означени схематично устройства, с които задаваме желаните състояния и наблюдателни събития, посредством контрол върху действащите полета и лъчения.

Алтернативна илюстрация на началната постановка, която е по-близка по стил до изчислителна постановка се дава от следната схема:



фиг. 20: Изчислителна интерпретация на теоретичната схема от фиг. 1

В постановката на фиг. 3, ролята на “апарата” от фиг. 2 играе средната кутия, наречена “въздействие”. Това може да бъде например изчислителния процесор в един (квантов) компютър. В ролята на изследвания “обект” от фиг. 2 е “входа” във фиг. 3, който в един компютър може да бъде началния сигнал подаден на процесора, т.е., състоянието на входните му регистри. Така, “изхода” във фиг. 3 е изходния сигнал, т.е., изходното състояние на регистрите. Горните предположения за “повторяемост” се пренасят и тук, както върху вида на въздействието, т.е., за работата на процесора, така и върху входа, т.е., за приготвянето на началното състояние на входните регистри. Измерването на крайното състояние на регистрите също трябва да се причисли към средната част на “въздействието” от фиг. 3, така че за “изхода” остава само крайния “наблюдателен резултат” от фиг. 2.

На този етап няма да конкретизираме повече първоначалната ни

обща, теоретична схема от фиг. 1. В хода на излагането на аксиомите и техните следствия понякога ще привеждаме и допълнителни постановки за илюстрация. В последствие, ние ще приведем и съвсем конкретни опитни постановки.

2.3 Коментари по началната постановка

Присъствието на “субект” на фундаментално ниво

Нека обърнем внимание на една от основните особености на квантовата теория, която виждаме още в началната ѝ постановка. Това е, че тя описва взаимоотношението между “субект” и “обект”, без да отстранява “субекта”. Под “субект” разбираме най-общо наблюдател (измервател). Това може да бъде например апарат за наблюдение или цяла експериментална установка, както видяхме в примера по-горе.²⁰ “Обектът” е изследвания (наблюдавания) обект, което може да бъде и система от обекти.

При класическото описание на природните явления се е целяло да се постигне самостоятелно описание на изследвания обект. Това е било възможно, понеже в този случай винаги може да се сведе влиянието на наблюдателната апаратура върху изследвания обект под пренебрежимото ниво. В микросвета последното е вече невъзможно, както отбелязвахме. В резултат на това в нашето теоретично описание остава следа от “изследователя” (“субекта”). Това е една нова релация между събитията, която ще наречем “*съвместна измеримост*.” Съвместно измеримите събития ще бъдат тези събития, които могат да се наблюдават в общ експеримент. Всички тези понятия ние ще въведем систематично в хода на нашето аксиоматично построение. Една от целите ни е да изградим теорията по начин, който да включва класическите системи, като частен случай. Така ще видим точните условия, при които описваните системи престават да бъдат класически. Възщност, класическите системи ще бъдат точно тези системи, за които всеки две събития са съвместно измерими.

От друга страна, тази особеност на квантовата теория, че в началната постановка ѝ допускаме присъствието на “субект”, не означава липсата

²⁰В следващите лекции ще направим специален анализ на процеса на измерване.

на обективност при описанието на света. Обективността означава, че има пълно съгласие между отделните субекти относно наблюденията и техните интерпретации. Отсъствието на последното би било именно “субективност”.

Повторяемостта и началните ни понятия за еднаквост на събития и състояния

Разглеждайки илюстрациите по-горе ние опираме до една важна черта на всеки експеримент, а и на опита ни, като цяло: това е *повторяемостта*. Предполага се, че всеки експеримент може да бъде проведен многократно по “един и същи начин”.²¹ Тази повторяемост присъства в двете страни на експеримента: апарата и обекта. Първо, ние считаме, че можем да направим неограничено много еднакви апарати, които да измерват (тестват, проверяват) едни и същи елементарни наблюдателни събития. От тук идват и най-първите ни емпирични разбирания за понятието за еднаквост на събития. Второ, ние считаме, че можем да приготвяме и изследваните обектите многократно, и по “един и същи начин”. От тук пък идват първоначалните ни емпирични разбирания за понятието за състояние на обект. Ние считаме още, че има известна независимост между “апаратите” и “обектите”. Това означава, че с един апарат ние можем да изследваме обекти приготвени по различни начини, т.е., едно събитие ние можем да тестваме в различни състояния на системата. И също така ние можем да изследваме на различни апарати обекти, които са приготвени еднотипно, т.е., при едно също състояние на системата ние можем да тестваме различни събития. Всичко това са всъщност основни емпирични предположения предхождащи теорията на вероятностите, на които се основава и закона на големите числа.

Разрушителни и неразрушителни измервания

Често се случва, след измерване върху даден обект той да се разруши и да престане да съществува. Например, при регистрация на частица върху фотоплака или, при регистрация на фотон в детектор, те се абсорбират (поглъщат)

²¹Тук изрази “по един и същи начин” отново има първичен характер – както става обикновено за обясняването на едни първични понятия се налага въвеждането на други първични понятия и този процес се трябва да се прекрати в един момент.

и престават да съществуват. В тези случаи не е възможно по нататъшно провеждане на измервания върху обекта. Има експерименти обаче, при които обекта продължава да съществува и в тези случаи особен интерес за нас ще представлява въпроса за трансформацията на състоянието на системата след първото измерване. На това ще бъде посветена и специална аксиома – така наречения *проекционен постулат на фон Нойман*.²² От гледна точка на теория на вероятностите, това отговаря на проблема за *условната вероятност*, т.е., намирането на вероятност за събитие при условие, че преди това е настъпило друго събитие.

2.4 Аксиоми на отделимостта

Нашите *първи аксиоми* изхождат от идеята, че единствените наблюдателни резултати, с които разполагаме са вероятностите $Prob_\rho(Q)$. Поради това, дори само на базата на сравняването на тези вероятности ние трябва да можем да отличаваме различните състояния и събития. По конкретно, приемаме, следните аксиоми.

Аксиоми за отделимост:

- За всеки две състояния $\rho, \sigma \in \mathbf{States}$, ако $Prob_\rho(Q) = Prob_\sigma(Q)$ при всяко събитие $Q \in \mathbf{Events}$, то $\rho = \sigma$.
- За всеки две събития $P, Q \in \mathbf{Events}$, ако $Prob_\rho(P) = Prob_\rho(Q)$ при всяко състояние $\rho \in \mathbf{States}$, то $P = Q$.

Съгласно първата от горните аксиоми ние отъждествяваме две състояния, ако при всеки експеримент те водят до еднакви наблюдателни резултати. Втората аксиома привежда същия принцип спрямо събитията. Нека отбележим, че при нашите илюстрации от точка 2.2, ние вече предположихме, че имаме някакви първични, *априорни* понятия за тъждественост на състояния и събития въз основа на “еднаквост в начина на приготвяне (конструирание)”. Тук обаче засилваме нашите понятия за тъждественост, вече като следствие от наблюдателния ни опит. В частност, особено интересно следствие е възможността за отъждествяване на събития по втората аксиома за

²²von Neumann’s projection postulate

отделимост, независимо от това дали експериментите, в които участват тези събития могат да се проведат съвместно или не.

Всъщност, отриждествяването от аксиомите за отделимост има и *прагматичен характер*. Ние нищо не губим, ако го направим, тъй като винаги може да опитаме се откажем от това в бъдеще. Ние ще се върнем отново на този момент в дискусията по т.нар. “проблем за *скритите параметри*”.²³

2.5 Състоянията като функции от събитията

Съгласно първата от аксиомите за отделимост, ние може да третираме състоянията, като *функции върху множеството на събитията* **Events**: за едно състояние $\rho \in \mathbf{States}$ ще пишем

$$\rho(Q) := \text{Prob}_\rho(Q) \quad (2.7)$$

и по такъв начин ρ става функция

$$\rho : \mathbf{Events} \rightarrow [0, 1] : Q \mapsto \rho(Q). \quad (2.8)$$

Нека подчертаем обаче, че далеч не всяка функция $\mathbf{Events} \rightarrow [0, 1]$ идва от състояние. Специална аксиома (точка 3.7) ще отдели клас от допустими функции. Също ще отбележим, че във втората аксиома за отделимост, състоянията и събитията си разменят ролите, и следователно бихме могли и събитията да ги третираме, като функции на състоянията. Последната практика обаче, макар че е възможна, не се е утвърдила в квантовата теория, докато третирането на състоянията, като функции се оказва изключително удобно, което ще видим още в следващата точка.

Забележете: Когато разглеждаме състоянията, като функции от събитията ние автоматично удовлетворяваме първата аксиома за отделимост. Втората аксиома за отделимост обаче си остава, като условие. От математическа гледна точка, втората аксиома за отделимост може да се изкаже така: *множеството от функции, които представят състоянията, разделя точките на множеството **Events***.²⁴

²³*hidden variables*

²⁴това е всъщност определението на термина “разделяне на точките”

2.6 Смес на състояния

За две състояния ρ_1 и $\rho_2 \in \mathbf{States}$ и числа

$$q_1, q_2 \in [0, 1], \quad q_1 + q_2 = 1, \quad (2.9)$$

определяме **смес на ρ_1 и ρ_2 с тегла q_1 и q_2** по формулата:

$$\rho(Q) := q_1 \rho_1(Q) + q_2 \rho_2(Q), \quad (2.10)$$

като функция, за всяко събитие $Q \in \mathbf{Events}$. Последното равенство ще записваме още и във “функционален вид”, като:

$$\rho = q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2. \quad (2.11)$$

Нашата поредна *аксиома* гласи, че:

Аксиома на смесването:

Функцията ρ (2.10) е винаги състояние на системата.

Еквивалентно, *изискваме да съществува състояние ρ , такова че*

$$Prob_\rho(P) = q_1 Prob_{\rho_1}(P) + q_2 Prob_{\rho_2}(P), \quad (2.12)$$

за всяко събитие P (и тогава, съгласно втората аксиома за отделимост, токова състояние ρ ще е единствено).

С итериране на операцията на бинарното смесване (2.10), получаваме и по-общи смеси: ако $\rho_1, \dots, \rho_k \in \mathbf{States}$ и

$$q_1, \dots, q_k \in [0, 1], \quad q_1 + \dots + q_k = 1, \quad (2.13)$$

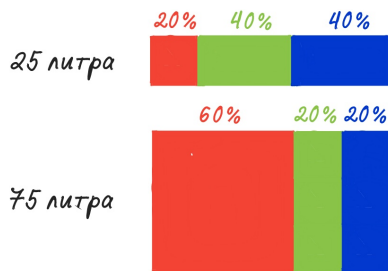
то е определено състоянието смес на $\rho_1, \dots, \rho_k$ с тегла $q_1, \dots, q_k$ по формулата

$$\rho(P) := q_1 \rho_1(P) + \dots + q_k \rho_k(P), \quad (2.14)$$

за всяко събитие $P \in \mathbf{Events}$.

2.7 Първа илюстрация на понятието за смес на състояния

В следващата точка 2.9 ще дадем мотивация от теория на вероятностите на въведеното понятие за смес на състояния, а в точка 2.10 ще дадем и геометрична интерпретация на тази операция. В тази точка ние ще се ограничим до една проста илюстрация на смесването. Нека си представим два вида смеси от боя, както е представено на фиг. 21.



фиг. 21: Две смеси от боя, приготвени за общо смесване

Във всяка от смесите пропорциите на трите цвята се определят съответно като

$$(20\% : 40\% : 40\%) = \left(\frac{1}{5} : \frac{2}{5} : \frac{2}{5}\right), \quad (60\% : 20\% : 20\%) = \left(\frac{3}{5} : \frac{1}{5} : \frac{1}{5}\right).$$

Заедно с това, в общата смес пропорциите между обемите на първоначалните две смеси са:

$$(25 : 75) = \left(\frac{1}{4} : \frac{3}{4}\right). \quad (2.15)$$

Следователно в общата смес пропорциите между трите цвята ще са

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} : \frac{2}{5} : \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5} : \frac{1}{5} : \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{4}\right),$$

както е изобразено на фиг. 22.

$$\begin{array}{c}
 + \left\{ \begin{array}{l} 0.25 \times \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right) \\ 0.75 \times \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right) \end{array} \right. \\
 \hline
 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 \text{50\%} & \text{25\%} & \text{25\%} \\
 \hline
 \text{Red} & \text{Green} & \text{Blue} \\
 \hline
 \end{array}$$

фиг. 22: Резултата от смесването на смесите от фиг. 21

След тези прости пресмятания, които илюстрират как се смесват смеси от бои, ние може да направим следната аналогия. На всяка смес от бои съпоставяме едно “неакуратно приготвено състояние”, в което подобно на сместа от бои, отделните “чисти компоненти” присъстват в определени съотношения (процентни състави). В допълнение на това, ние допълнително смесваме състоянията, отново като следствие на нашата неакуратност в приготвянето. Тогава, като са ни известни пропорциите между двете смеси от ф-ла (2.15), които играят ролята на теглата q_1 и q_2 във ф-ли (2.9) и (2.10) по-горе, ние пресмятаме и дяла на отделните чисти примеси в резултантната смес.

2.8 Чисти състояния

И така, интерпретацията на операцията смесване на състояния е, че това изразява нашата неакуратност, а също и несигурност в приготвянето на състояния. Следователно, в обратния процес на процеса на смесване можем да видим начин на “изчистване” на състояния. Това ни води до следното определение:

Чисто състояние²⁵ е състояние, което не може да се представи като *нетривиална смес*. Подробно, състоянието $\rho \in \mathbf{States}$ е чисто, тогава и само тогава, когато за всяко негово представяне в смес (2.11) е в сила, че или $q_1 = 1$ ($\Leftrightarrow q_2 = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_1$), или $q_2 = 1$ ($\Leftrightarrow q_1 = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_2$) (последните именно казваме, че отговарят на тривиални смеси).

И така, чистите състояния съответстват на най-прецизно приготвените състояния. Логично е да се очаква, че при тях вероятностите на всички

²⁵pure state

събития биха били 1 или 0. Оказва се обаче, че това е така само за т.нар. “класически системи”, които ще дефинираме точно във точка 2.11. За обща квантова система се оказва, че дори и в чисто състояние определени събития могат да настъпват с вероятност отлична от 1 или 0. Това е именно точния израз на неотстранимия индетерминизъм на квантовата теория, за който споменахме в увода.

2.9 Преговор от теория на вероятностите

Понятието за вероятност започна да играе все по-съществена роля в настоящия курс. За това, ще направим кратко отстъпление и в тази точка ще преговорим някои части на елементарната теория на вероятностите, отнасящи се до **крайни вероятностни пространства**. По определение, последните включват:

- Крайно множество $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. То се нарича *множество на елементарните състояния*, а също и *множество на елементарните събития*. За момента обаче, термините състояния и събития в тази точка няма да бъдат обвързани с въведените в точка 2.1 първични понятия за състояние и събитие.
- На елементите на Ω са зададени *вероятности*:

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 p_1, \dots, p_n & & \\
 = p_1(\omega_1), \dots, = p(\omega_n). & & (2.16)
 \end{array}$$

Системата от вероятности $(p_1, \dots, p_n)$ изпълняват условията

$$p_j \in [0, 1], \quad \sum_{j=1}^n p_j \left(\equiv \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \right) = 1, \quad (2.17)$$

които накратко се означават, че $(p_1, \dots, p_n)$ е **вероятностно разпределение**. Казваме също че функцията $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ задава вероятностно разпределение върху Ω .

Всяко вероятностно разпределение върху Ω поражда вероятности за събитията S в Ω , т.е., за подмножествата $S \subseteq \Omega$:

$$p(S) := \sum_{\omega \in S} p(\omega) \in [0, 1]. \quad (2.18)$$

Вероятностите $p(S)$ имат свойствата:

(p_1) адитивност

$$S = S_1 \dot{\cup} S_2 \quad \Rightarrow \quad p(S) = p(S_1) + p(S_2),$$

където $S = S_1 \dot{\cup} S_2$ по определение означава, че $S = S_1 \cup S_2$ и $\emptyset = S_1 \cap S_2$ и се нарича *дизюнктивно обединение* (по-късно, ще го обобщим в точка 4.5);

(p_2) монотонност

$$S_1 \subseteq S \quad \Rightarrow \quad p(S_1) \leq p(S);$$

(p_3) нормировка

$$p(\emptyset) = 0, \quad p(\Omega) = 1.$$

Следващо важно понятие, което ще преговорим е **условната вероятност**:²⁶

$$p(S | Q) := \frac{p(S \cap Q)}{p(Q)} \quad (2.19)$$

и следващия оттук **закон на Бейс**²⁷

$$p(S \cap Q) = p(Q) p(S | Q) = p(S) p(Q | S). \quad (2.20)$$

Смисълът на закона е, че ако определяме вероятността за S и Q , чрез последователно установяване на Q и после на S , при условие, че е налице Q , то резултатът ще бъде същия ако сменим реда на S и Q . Това е главният закон, който се нарушава при квантовата статистика.

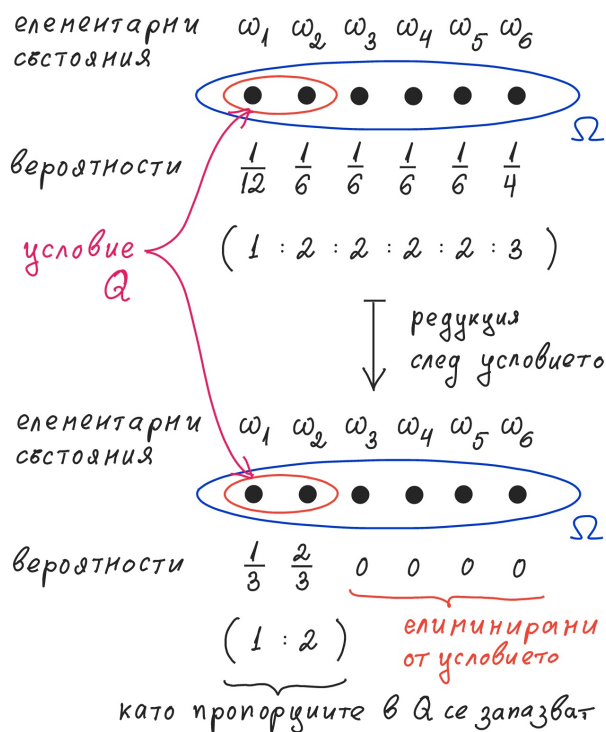
²⁶conditional probability

²⁷Bayes' law / theorem

Една мотивация на определението (2.19) идва от следното съображение. Ако имаме вероятностно разпределение $p(\omega_k)$, $\omega_k \in \Omega$, то след настъпване на събитие $Q \subseteq \Omega$, вероятностното разпределение се редуцира до

$$p'(\omega_k) := p(\omega_k|Q),$$

което на свой ред означава, че вероятностите за $\omega_k \notin Q$ стават нула, а за $\omega_k \in Q$ вероятностите запазват взаимните си пропорции, каквито са имали преди настъпването на условието. Един това за пример това е илюстриран на фиг. 23.



фиг. 23: Иллюстрация на условната вероятност

В случая на квантови системи, описаната ситуация се обобщава от споменатия преди проекционен постулат.

Забележете: $p'(\omega_k) := p(\omega_k|Q)$ ($k = 1, \dots, n$) отново е вероятностно разпределение. Действително:

$$\sum_{k=1}^n p(\omega_k|Q) = \sum_{k=1}^n \frac{p(\{\omega_k\} \cap Q)}{p(Q)} = \frac{1}{p(Q)} \sum_{k=1}^n p(\{\omega_k\} \cap Q)$$

$$= \frac{1}{p(Q)} p\left(\bigcup_{k=1}^n (\{\omega_k\} \cap Q)\right) = \frac{1}{p(Q)} p\left(\underbrace{\left(\bigcup_{k=1}^n \{\omega_k\}\right)}_{\Omega} \cap Q\right) = 1.$$

Събитията $S, Q \subseteq \Omega$ се наричат **независими събития**, ако $p(S|Q) = p(S)$. Така, S и Q са независими

$$\begin{aligned} \iff p(Q|S) &= p(Q) \\ \iff p(S \cap Q) &= p(S)p(Q) \end{aligned}$$

и в частност, релацията независимост е симетрична.²⁸

Достигахме до понятието за вероятностни смеси,²⁹ което дава обосновка на понятието за смес на състояния от предходната точка.

Ще илюстрираме най-напред понятието на пример.

Нека разполагаме с два вида зарчета: първият вид са симетрични и всичките 6 страни (елементарните събития $\omega_1, \dots, \omega_6$) се падат с равни вероятности ($= 1/6$), а вторият вид зарчета са несиметрични. **Смесваме** 75 зарчета от първия вид с 25 от втория вид, както са дадени на фиг. 24, след което произволно изтегляме едно от всичките и питаме какви са вероятностите за елементарните събития.

75 зарчета от вид 1:	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
	●	●	●	●	●	●
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
25 зарчета от вид 2:	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
	●	●	●	●	●	●
	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

фиг. 24: Смес от два типа зарчета

Резултатът според теория на вероятностите е представен на фиг. 25.

²⁸но не и рефлексивна (!)

²⁹mixture probability

$$\begin{array}{cccccc}
 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \\
 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 + \left\{ \begin{array}{l} 0.75 \times \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) \\ 0.25 \times \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4} \right) \end{array} \right. \\
 \hline
 \left(\frac{7}{48}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{16} \right)
 \end{array}$$

фиг. 25: Вероятностите след смесването на зарчетата от фиг. 24

Обща постановка:

Нека предположим, че провеждаме експеримент, който определя вероятностно пространство, като е дадено на ф-ла (2.16). Да допуснем, че зад това вероятностно описание стои *по-фино* описание, при което всяко елементарно събитие

$$\tilde{\omega}_k := \{\omega_k\}$$

престава да бъде елементарно и се реализира при две взаимно допълнителни се ситуации A_1, A_2 :

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad (\text{невъзможно събитие}),$$

$$A_1 \cup A_2 = \text{винаги изпълненото събитие.}$$

Тогава:

$$\tilde{\omega}_k = (A_1 \cup A_2) \cap \tilde{\omega}_k = (A_1 \cap \tilde{\omega}_k) \cup (A_2 \cap \tilde{\omega}_k), \quad \text{като } (A_1 \cap \tilde{\omega}_k) \cap (A_2 \cap \tilde{\omega}_k) = \emptyset.$$

Следователно,

$$p(\omega_k) = p(A_1 \cap \tilde{\omega}_k) + p(A_2 \cap \tilde{\omega}_k) = p(A_1) p(\tilde{\omega}_k | A_1) + p(A_2) p(\tilde{\omega}_k | A_2).$$

Нека положим:

$$p'(\omega_k) := p(\tilde{\omega}_k | A_1), \quad p''(\omega_k) := p(\tilde{\omega}_k | A_2),$$

$$q_1 := p(A_1), \quad q_2 := p(A_2), \quad \text{за } k = 1, \dots, n.$$

Тогава полученият резултат се записва като:

$$p(\omega_k) = q_1 \cdot p'(\omega_k) + q_2 \cdot p''(\omega_k) \quad (k = 1, \dots, n),$$

където $(p'(\omega_1), \dots, p'(\omega_n)), (p''(\omega_1), \dots, p''(\omega_n))$ и (q_1, q_1) са вероятностни разпределения.

Вероятностното разпределение $(p(\omega_1), \dots, p(\omega_n))$ се нарича **смес** на $(p'(\omega_1), \dots, p'(\omega_n))$ и $(p''(\omega_1), \dots, p''(\omega_n))$ с тегла q_1 и q_2 и то се дава по формулата

$$(p(\omega_1), \dots, p(\omega_n)) = q_1 \cdot (p'(\omega_1), \dots, p'(\omega_n)) + q_2 \cdot (p''(\omega_1), \dots, p''(\omega_n)). \quad (2.21)$$

От тук и ф-ла (2.18) следва, че за всяко събитие $S \subseteq \Omega$ е в сила равенството:

$$p(S) = q_1 p'(S) + q_2 p''(S). \quad (2.22)$$

Последната формула на свой ред съответства точно на ф-ла (2.10) (и също (2.12)) и така обосновава понятието за смес на състояния от точка 2.6.

2.10 Геометрия на множеството на състоянията

Операцията смесване на състояния има прост геометричен смисъл: тя представлява *изпъкнала комбинация в линейно пространство*. Заедно с това и множеството на всички състояния придобива структура на *изпъкнало множество* в линейно пространство. В тази точка ще въведем подробно тези понятия.

По определение, **изпъкнало (под)множество**³⁰ S в едно линейно пространство V над реалните числа $\mathbb{R}$ е такова множество, за което за всеки $q_1, q_2 \in [0, 1]$, такива че $q_1 + q_2 = 1$ и всеки $u, v \in S$ следва, че и $q_1 u + q_2 v \in S$. При това, линейната комбинация $w := q_1 u + q_2 v$ е от специален вид и се нарича **изпъкнала комбинация**³¹ на u и v с тегла q_1 и q_2 . Геометрически, множеството от точки w , които са изпъкнали комбинации на точките u и v е отсечката свързваща u и v в линейното пространство V . Така, едно подмножество $S \subseteq V$ е изпъкнало, ако заедно с всеки две свои точки съдържа и отсечката, която ги свързва (виж фиг. 26).

³⁰convex set

³¹convex combination



фиг. 26: Изпъкнала комбинация и изпъкнало множество

И така, множеството на всички състояния **States** е изпъкнало множество. Но в кое линейно пространство? Обемащото линейно пространство в случая е линейното пространство на всички реални функции върху множеството от събития:

$$\{f \mid f : \mathbf{Events} \rightarrow \mathbb{R}\}. \quad (2.23)$$

Важно понятие в тази теория е понятието **екстремална (крайна) точка** на едно изпъкнало множество S : това е такава точка $w \in S$, която не лежи във вътрешността на нито една отсечка, която се съдържа в S . С други думи, ако $w = q_1u + q_2v$ е изпъкнала комбинация за $u, v \in S$, то или $w = u$ (и $q_1 = 1, q_2 = 0$) или $w = v$ (и $q_1 = 0, q_2 = 1$). Така, чистите състояния са точно екстремалните точки на **Events**, като изпъкнало множество.

Ако $T \subseteq V$ е подмножество в линейно пространство, то **изпъкнала обвивка**³² на T се нарича множеството

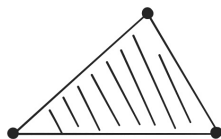
$$\text{ConvexHull}(T) := \{w \in V \mid w = q_1u + q_2v \text{ е произволна изпъкнала комбинация за } u, v \in T\}. \quad (2.24)$$

В тази връзка идва важния резултат: теоремата на Крейн-Милман.³³ Тя гласи, че: *всяко затворено изпъкнало подмножество на едно реално, крайно-мерно, линейно пространство съвпада с изпъкналата обвивка на екстремалните си точки.*

Забележете: в едно изпъкнало множество екстремалните точки са винаги гранични, но обратното не винаги е изпълнено. Отрицателен пример (контрапример) за последното е следния. В триъгълник екстремалните точки

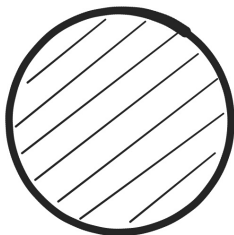
³²convex hull³³Krein–Milman theorem

са единствено върховете му, но границата му включва и трите му страни (фиг. 27).



фиг. 27: Всеки затворен триъгълник е изпъкнало множество. Екстремалните му точки са само върховете му, без останалата част от границата му.

Положителен пример е диска: в него всички точки от границата екстремални (фиг. 28).



фиг. 28: Всеки затворен диск е изпъкнало множество. Екстремалните му точки са цялата граница.

Затворения триъгълник и *затворената* отсечка са примери на изпъкнали множества, чийто подмножества на екстремалните точки са *крайни*. Това са множества от върховете и за триъгълника те са три, а за отсечката – два. В общия случай това ни води до понятието **симплекс**.³⁴ По определение, n -симплекс е изпъкнало множество, чийто екстремални точки са $(n + 1)$ -елементно множество. Екстремалните точки на симплекса се наричат негови *върхове* и те имат свойството, че никой от тях не лежи в изпъкналата обвивка на останалите.

Важен пример за симплекс е множеството от всички вероятностни разпределения върху множество с n елемента. Това е подмножество на $\mathbb{R}^n$ от вида:

$$\Delta_{n-1} := \{ (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq p_j \leq 1, \text{ за } j = 1, \dots, n, \text{ и } p_1 + \dots + p_n = 1 \}$$

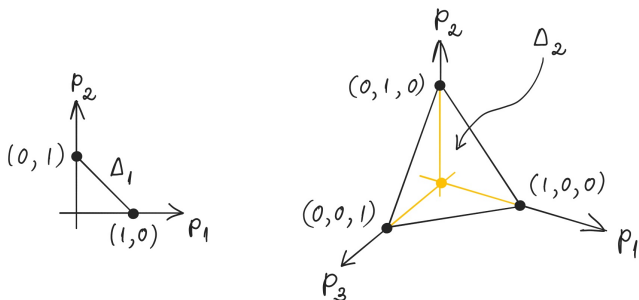
³⁴simplex

$$j = 1, \dots, n; p_1 + \dots + p_n = 1\} . \quad (2.25)$$

Това е изпъкнало подмножество на $\mathbb{R}^n$, в което изпъкналата комбинация, както видяхме в предната точка, има смисъл на *вероятностна смес*. Екстремалните точки на Δ_{n-1} са разпределенията от вида

$$(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) . \quad (2.26)$$

Нула-симплекса Δ_0 е точка, 1-симплекса Δ_1 е отсечка, а 2-симплекса Δ_2 е триъгълник. Последните два са изобразени на фиг. 29.



фиг. 29: Смплексите Δ_1 и Δ_2

2.11 Класически системи

В този курс ние ще се ограничим само до крайни системи.³⁵

Класическа крайна система се определя от едно крайно множество Ω , по което задаваме:

$$\mathbf{Events} := \mathcal{P}(\Omega) , \quad (2.27)$$

това е **степенното множество** (**power set**) на Ω , т.е., това е множеството на всички подмножества на Ω ; множеството на състоянията определяме като

$$\mathbf{States} := \text{Prob}(\Omega) , \quad (2.28)$$

което е множеството на всички *вероятностни разпределения* над Ω (както бяха определени в началото на точка 2.9). Функцията Prob (2.1) се определя,

³⁵Това обаче не означава, че безкрайните системи ще останат съвършено недостъпни за теорията ни. По-нататък ние ще разгледаме един подход към безкрайните системи, чрез крайни.

като

$$Prob_p(S) := p(S), \quad (2.29)$$

което е вероятността за $S \subseteq \Omega$ от ф-ла (2.18).

Така определените класически системи удовлетворяват аксиомите, които са наложени до тук: аксиомите за отделимост и аксиомата за смесването. В частност, в края на предходната точка ние видяхме, че множеството на състоянията на една крайна класическа система е симплекс, чийто върхове са чистите състояния. Последните са вероятностните разпределения от вида (2.26), т.е., това са вероятностни разпределения, в които всяко събитие настъпва с вероятност 1 или 0. Затова, тези състояния можем да наречем още **детерминистични състояния**. И така, *в класическите системи чистите състояния са точно детерминистичните състояния*. Това ще отпадне обаче за квантовите системи, където чисти състояния ще продължим да имаме, но детерминистични състояния няма да има.

Нека да отбележим и друг прост, но фундаментален факт. В примерите на класически системи наблюдаваме 1–1 съответствие между едно-елементните събития $\{\omega\} \subseteq \Omega$ и чистите състояния. Това 1–1 съответствие се формализира с условието:

$$\begin{aligned} &\text{за всяко } \{\omega\} \subseteq \Omega \text{ съществува единствено чисто състояние} \\ &p \in Prob(\Omega), \text{ такова че } p(\{\omega\}) = 1, \end{aligned} \quad (2.30)$$

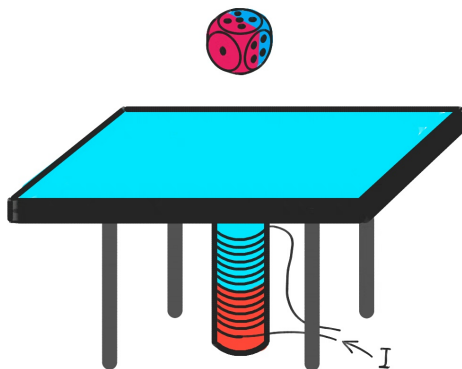
както и

$$\begin{aligned} &\text{за всяко чисто състояние } p \in Prob(\Omega), \text{ съществува единствено} \\ &\{\omega\} \subseteq \Omega \text{ такова че } p(\{\omega\}) = 1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Едно-елементните събития $\{\omega\} \subseteq \Omega$ се наричат още и *елементарни събития*, така, че може да изкажем накратко, че *в класическите системи има 1–1 съответствие между елементарни събития и чисти състояния*. Това свойство ще остане в сила и за най-общи квантови системи, след като въведем преди това обобщение на понятието “елементарно събитие”.

Тази точка ще завършим с кратка дискусия за новите аспекти, които в случая на класически системи се добавят към обичайните разглеждания в

теорията на вероятностите. Преди всичко да обърнем внимание, че докато при понятието “вероятностно пространство” от точка 2.9 ние имаме само едно вероятностно разпределение върху Ω , в случая на класическа система ние допускаме *всички възможни* вероятностни разпределения, като ги наричаме “състояния на системата”. Нека илюстрираме това нагледно в следния пример от фиг. 30. Магнитно (нечестно) зарче се хвърля върху маса, която е електромагнит. В зависимост от посоката и силата на тока I , плътът на масата се намагнетизира и това променя вероятностите $p_{(I)}(\omega_k)$ за падането на числата 1, $\dots$, 6 (елементарните събития $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$).



фиг. 30: Магнитно зарче, чието вероятностно разпределение на паданията може да се манипулира от тока I намагнетизиращ масата

На фиг. 31 е дадена примерна зависимост на вероятностите от пускания ток. По такъв начин, ние променяме състоянието а системата, което се закодира във вероятностното разпределение за паданията на зарчето.

состояние $\downarrow$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
вероятност $p_{(I=+3)}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{5}{6}$
вероятност $p_{(I=+1)}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
вероятност $p_{(I=0)}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
вероятност $p_{(I=-1)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
вероятност $p_{(I=-3)}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{54}$

фиг. 31: Примерни вероятностни разпределения за зарчето от фиг. 30, в зависимост от силата на тока I

Накратко, можем да заключим, че класическите системи са “вероятностни пространства с променливи вероятностни разпределения”.