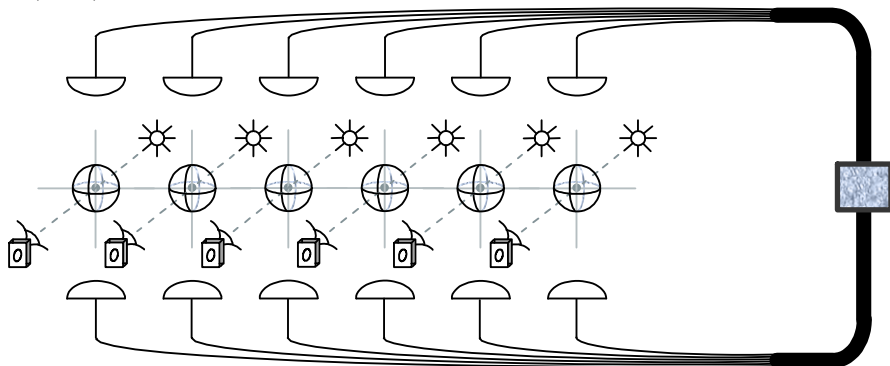


10 Квантови изчисления и квантови вериги. Дискретната Фурие трансформация. Начално понятие за квантов алгоритъм

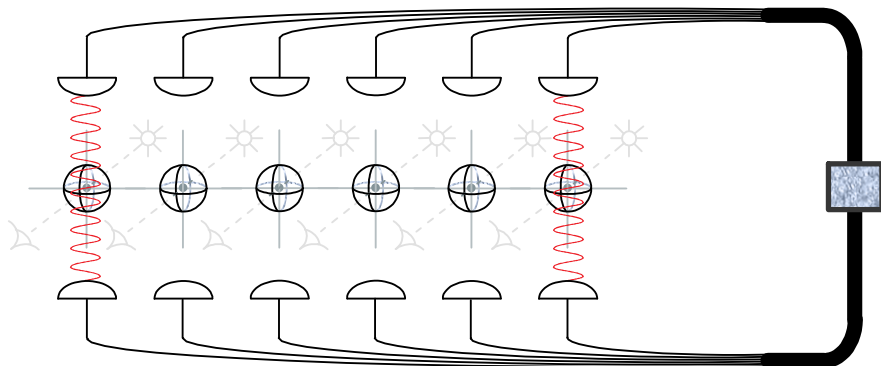
10.1 Квантови изчисления: начална постановка

Ще започнем с една схематична илюстрация на квантовите компютри дадена на фигурата по-долу. Тя изобразява един от основните модели на квантови изчисления: квантовите вериги, с който ще се запознаем в тази лекция.

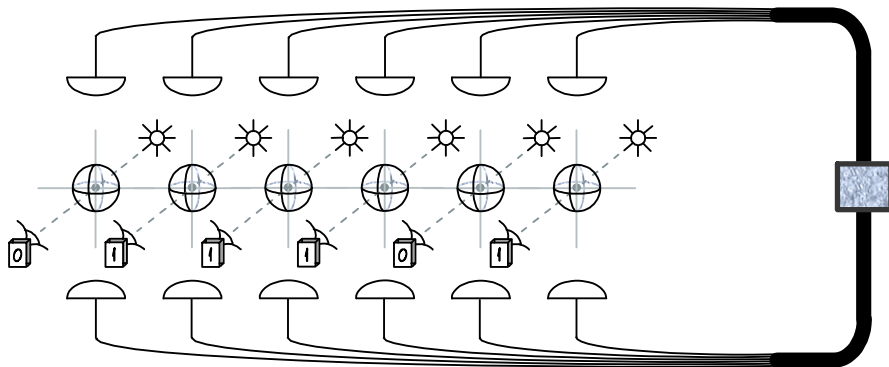
1) Инициализация



2) Квантово изчисление



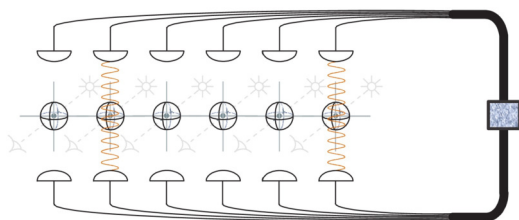
3) Измерване на резултата



фиг. 64: Една опростена схема на действие на квантов компютър

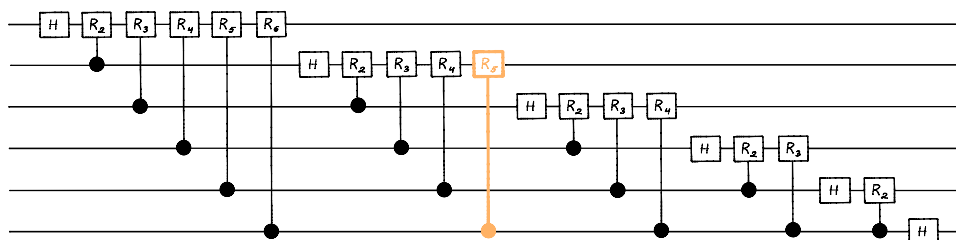
Съгласно този модел на квантови изчисления, информацията е вложена и се обработва върху система от краен брой квантови битове. Една такава илюстрация вече разгледахме в лекцията за съставни системи. Тук ние сме “надградили” квантовите битове с допълнителни полета изобразени по вертикалните оси, които влияят върху състоянието на всеки квантов бит. Тези “вертикални” полета се командват от един център, който всъщност изпълнява квантовата програма. Преди това обаче, системата се **инициализира**, т.е., състоянията на квантовите битове, които също ще наричаме “квантови регистри” се привежда в някакво начално изчислително състояние. Това става, чрез хоризонтално изобразеното въздействие и измерване, което в края се използва и за разчитан на крайния резултат. В тази връзка нека си припомним от предната лекция, че измерването и регистрирането на елементарно събитие води до преход в чистото състояние, което съответства на това събитие и това може да се използва за формиране на чисти състояния, подобно на филтрация. След първата стъпка, инициализацията, следва самото изпълнение на квантовия алгоритъм, което се изразява в поредица от въздействия върху кубитите, изобразени по вертикалните оси. Накрая е третата стъпка, разчитането на резултата, чрез измерването на крайното състояние на кубитите.

Достигахме до важното понятие за **квантова верига**, което е поредицата от квантови гейтове изпълнявани в хода на квантовото изчисление. Една такава квантова верига е изобразена на следната фигура:



Градивните квантови трансформации, които задават елементарните стъпки, се наричат "квантови операции" (quantum gates).

Тяхната последователност образува "квантова верига" (quantum circuit).



фиг. 65: Моделът на квантовите вериги за квантовите изчисления

Тя изобразява т.нар. дискретна Фурие трансформация, с която подробно ще се запознаем след малко в тази лекция.

10.2 Система от няколко кубита: изчислителен базис

Припомняме – имаме две употреби на бра-кет означенията:

- За $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ – вектор–стълб пишем $|\Psi\rangle := \Psi$, като едноместна линейна операция върху $\mathbb{C}^n$, която е идентитета. Така, $|\alpha\Psi + \alpha'\Psi'\rangle = \alpha|\Psi\rangle + \alpha'|\Psi'\rangle$ и в частност, $|0\rangle \equiv 0$.
- Втората употреба на бра-кет означенията е за орто-нормиран базис $e_0, \dots, e_{N-1} \in \mathbb{C}^N$, когато означаваме

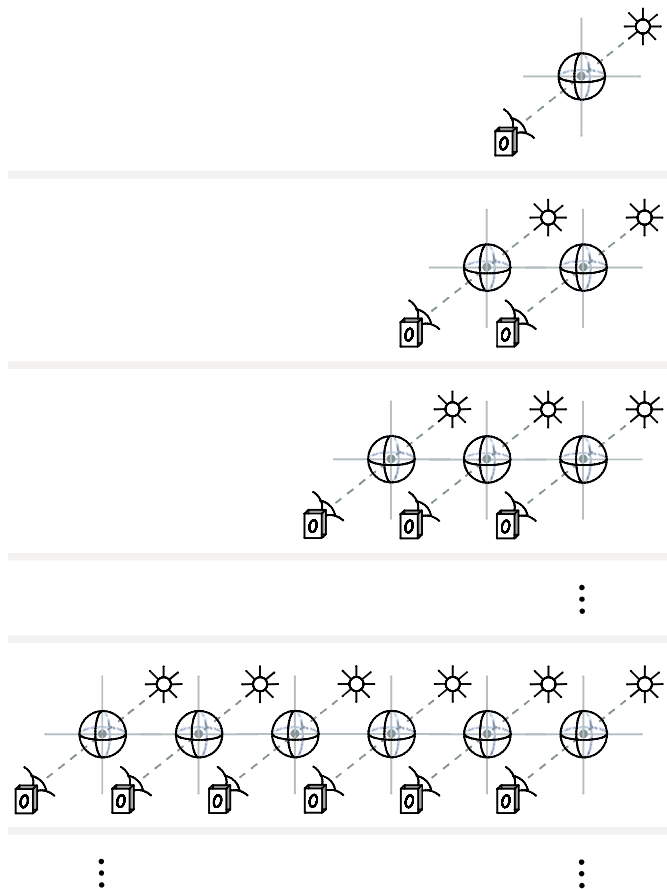
$$e_k \equiv |e_k\rangle =: |k\rangle ,$$

като така, вътре в скобите $|\dots\rangle$ стои не самия базисен вектор, а информацията за него, например, индекса му. Сега обаче имаме

$$|0\rangle \equiv e_0 \neq 0 ,$$

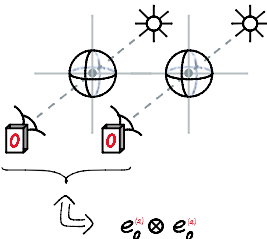
т.е., $|0\rangle$ не е нулевия вектор на $\mathbb{C}^N$ (!!!).

Преминаваме към описанието и построението на изчислителния базис в хода на надграждането на системата от кубити, както е изобразено на долната фигура:

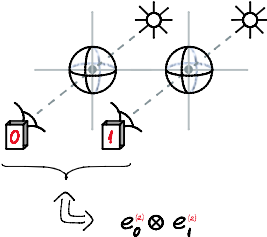


фиг. 66: Надграждане на броя на квантовите битове

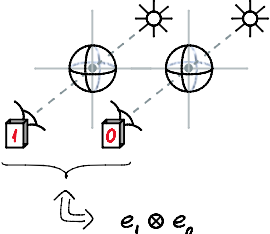
На следващите фигури е разгледан случая на дву-кубитна система:

$$\begin{aligned}
 e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} &\equiv |e_0^{(a)}\rangle \otimes |e_0^{(a)}\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle \equiv |[00]_2\rangle \equiv |0\rangle \leftarrow \begin{cases} \text{има} \\ \text{различен смисъл !!!} \end{cases} \\
 &\quad \text{нови означения} \quad \text{числото "0" в двоична система} \\
 &\quad \text{III} \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0^{(a)} \in \{e_0^{(a)}, e_1^{(a)}, e_2^{(a)}, e_3^{(a)}\} - \text{стандартия о.н.б. в } \mathbb{C}^4 \\
 e_0^{(a)} \in \mathbb{C}^2 &\quad \text{имат} \\
 &\quad \text{различен смисъл !!!}
 \end{aligned}$$


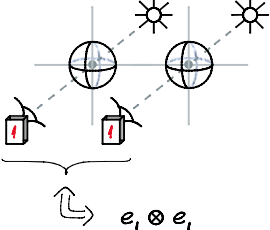
фиг. 67: Система от два кубита в изчислителен базис: случай "00"

$$\begin{aligned}
 e_0^{(a)} \otimes e_1^{(a)} &\equiv |e_0^{(a)}\rangle \otimes |e_1^{(a)}\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \equiv |0\rangle|1\rangle \equiv |0,1\rangle \equiv |[01]_2\rangle \equiv |1\rangle \leftarrow \begin{cases} \text{има} \\ \text{различен смисъл !!!} \end{cases} \\
 &\quad \text{числото "1" в двоична система} \\
 &\quad \text{III} \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_1^{(a)} \in \{e_0^{(a)}, e_1^{(a)}, e_2^{(a)}, e_3^{(a)}\} - \text{стандартия о.н.б. в } \mathbb{C}^4 \\
 e_0^{(a)}, e_1^{(a)} \in \mathbb{C}^2 &\quad \text{имат} \\
 &\quad \text{различен смисъл !!!}
 \end{aligned}$$


фиг. 68: Система от два кубита в изчислителен базис: случай "01"

$$\begin{aligned}
 e_1 \otimes e_0 &\equiv |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |1\rangle \otimes |0\rangle \equiv |1\rangle|0\rangle \equiv |1,0\rangle \equiv \underbrace{[10]_2}_{\text{число "2" в двоична система}} \equiv \underbrace{|2\rangle}_1 \\
 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{III}} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{III}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{e_2} \in \{e_0, e_1, \mathbf{e_2}, e_3\} - \text{стандартизиран о.н.б. в } \mathbb{C}^4
 \end{aligned}$$


фиг. 69: Система от два кубита в изчислителен базис: случай “10”

$$\begin{aligned}
 e_1 \otimes e_1 &\equiv |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |1\rangle \otimes |1\rangle \equiv |1\rangle|1\rangle \equiv |1,1\rangle \equiv \underbrace{[11]_2}_{\text{число "3" в двоична система}} \equiv \underbrace{|3\rangle}_1 \\
 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{III}} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{III}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{e_3} \in \{e_0, e_1, e_2, \mathbf{e_3}\} - \text{стандартизиран о.н.б. в } \mathbb{C}^4
 \end{aligned}$$


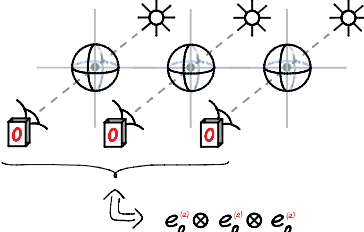
фиг. 70: Система от два кубита в изчислителен базис: случай “11”

По-нататък, при формиране на три и повече кубитни състояния използваме асоциативността на тензорното произведение.

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underbrace{e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)}} &= \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

фиг. 71: Тензорното произведение е асоциативно (т.е., скобите могат да се местят): пример

На базата на това, на следващите фигури е разгледан случая на трикубитна система:

$$\begin{aligned} \underbrace{e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)}} &\equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\ &\equiv |0\rangle|0\rangle|0\rangle \equiv |0,0,0\rangle \equiv |[000]_2\rangle \equiv |0\rangle \\ &\text{числото "0" в двоична система} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_0^{(a)} \in \{e_0^{(a)}, e_1^{(a)}, e_2^{(a)}, e_3^{(a)}, e_4^{(a)}, e_5^{(a)}, e_6^{(a)}, e_7^{(a)}\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$


фиг. 72: Система от три кубита в изчислителен базис: случай "000"

$$\begin{aligned}
 e_0 \otimes (e_0 \otimes e_1) &\equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \\
 &\equiv |0\rangle|0\rangle|1\rangle \equiv |0,0,1\rangle \equiv |[001]_2\rangle \equiv |1\rangle \\
 &\quad \text{число "1" в двоична система} \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} - \text{стандардни о.н.б. в } \mathbb{C}^8 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad \text{фиг. 73: Система от три кубита в изчислителен базис: случай "001"}
 \end{aligned}$$

фиг. 73: Система от три кубита в изчислителен базис: случай "001"

$$\begin{aligned}
 e_0 \otimes (e_1 \otimes e_0) &\equiv |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \\
 &\equiv |0\rangle|1\rangle|0\rangle \equiv |0,1,0\rangle \equiv |[010]_2\rangle \equiv |2\rangle \\
 &\quad \text{число "2" в двоична система} \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} - \text{стандардни о.н.б. в } \mathbb{C}^8 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad \text{фиг. 74: Система от три кубита в изчислителен базис: случай "010"}
 \end{aligned}$$

фиг. 74: Система от три кубита в изчислителен базис: случай "010"

$$\begin{aligned}
 e_0 \otimes (e_1 \otimes e_1) &\equiv |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \\
 &\equiv |0\rangle|1\rangle|1\rangle \equiv |0,1,1\rangle \equiv |[011]_2\rangle \equiv |3\rangle \\
 &\quad \text{число "3" в двоична система} \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_3 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_3 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8
 \end{aligned}$$

фиг. 75: Система от три кубита в изчислителен базис: случай "011"

$$\begin{aligned}
 e_1 \otimes (e_0 \otimes e_0) &\equiv |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\
 &\equiv |1\rangle|0\rangle|0\rangle \equiv |1,0,0\rangle \equiv |[100]_2\rangle \equiv |4\rangle \\
 &\quad \text{число "4" в двоична система} \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_4 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8 \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_4 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8
 \end{aligned}$$

фиг. 76: Система от три кубита в изчислителен базис: случай "100"

$$\begin{aligned}
 e_1 \otimes (e_0 \otimes e_1) &\equiv |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \\
 &\equiv |1\rangle |0\rangle |1\rangle \equiv |1, 0, 1\rangle \equiv |[101]_2\rangle \equiv |5\rangle \\
 &\quad \text{число "5" в двоична система} \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_5 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8 \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad \text{фиг. 77: Система от три кубита в изчислителен базис: случай "101"}
 \end{aligned}$$

фиг. 77: Система от три кубита в изчислителен базис: случай "101"

$$\begin{aligned}
 e_1 \otimes (e_1 \otimes e_0) &\equiv |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \\
 &\equiv |1\rangle |1\rangle |0\rangle \equiv |1, 1, 0\rangle \equiv |[110]_2\rangle \equiv |6\rangle \\
 &\quad \text{число "6" в двоична система} \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_6 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8 \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad \text{фиг. 78: Система от три кубита в изчислителен базис: случай "110"}
 \end{aligned}$$

фиг. 78: Система от три кубита в изчислителен базис: случай "110"

$$\begin{aligned}
 e_i \otimes (e_i \otimes e_i) &\equiv |e_i\rangle \otimes |e_i\rangle \otimes |e_i\rangle \equiv |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \\
 &\equiv |1\rangle|1\rangle|1\rangle \equiv |1, 1, 1\rangle \equiv |[111]_2\rangle \equiv |7\rangle \\
 &\quad \text{число "7" в двоична система} \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_7 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8 \\
 \end{aligned}$$

фиг. 79: Система от три кубита в изчислителен базис: случай "111"

Така достигаме до най-общия случай:

$$\begin{aligned}
 e_{i_{n-1}} \otimes \dots \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_1} \otimes e_{i_0} &= |l\rangle \in \mathbb{C}^N \\
 \text{където} \quad & \text{за } j_0, \dots, j_{n-1} = 0, 1 \text{ и } N = 2^n \\
 l = [j_{n-1} \dots j_1 j_0]_2 &:= j_{n-1} 2^{n-1} + \dots + j_1 2^1 + j_0 2^0 \in \{0, \dots, N-1\} \\
 &\quad \text{двоично разлагане}
 \end{aligned}$$

фиг. 80: Общ случай на система от няколко кубита в изчислителен базис.

Изводи: хилбертовото пространство на състоянията на система от n кубита е:

$$\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_n = \mathbb{C}^{2 \dots 2} = \mathbb{C}^{2^n}, \quad N \text{ мерно, за } N = 2^n$$

Стандартният базис $e_0 \equiv |0\rangle$ и $e_1 \equiv |1\rangle$ в $\mathbb{C}^2$ поражда стандартния базис в така построеното хилбертово пространство $\mathbb{C}^N$: $[j_1 \dots j_n]_2 \equiv e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_n}$. Тези базиси се наричат също **изчислителни базиси**.

10.3 Система от няколко кубита: квантови трансформации. Квантови мрежи

10.3.1 Комбиниране на квантови трансформации

Нека $U : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ и $V : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M$ са унитарни оператори на квантови трансформации. Векторите на несплетените състояния $\Psi \otimes \Phi$ на съставната система $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^M$ отново във вектори на несплетени състояния, при което Ψ и Φ се трансформират независимо. Това ни води до понятието за **тензорно произведение** на линейни изображения,

$$\begin{aligned} U \otimes V : \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^M &\rightarrow \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^M \\ \Psi \otimes \Phi &\mapsto U\Psi \otimes V\Phi, \end{aligned}$$

което допълнително се разпространява по линейност и за сплетени състояния.

Схематично това е изобразено на долната фигура:

$$\Psi \otimes \Phi \left\{ \begin{array}{c} \Psi \text{ — } \boxed{U} \text{ — } U\Psi \\ \Phi \text{ — } \boxed{V} \text{ — } V\Phi \end{array} \right\} U\Psi \otimes V\Phi = (U \otimes V)(\Psi \otimes \Phi)$$

фиг. 81: Тензорното произведение на две квантови трансформации – основна стъпка при строене на квантови мрежи

Следователно, съставната квантова трансформация се представя от матрицата $U \otimes V$, която $NM \times NM$ -матрица и е също унитарна, понеже

$$(U \otimes V)^*(U \otimes V) = U^*U \otimes V^*V = \hat{1}.$$

10.3.2 Примери

Да разгледаме, като първи пример паралелното прилагане на n гейта на Адамар върху базисния вектор $|0, 0, \dots, 0\rangle$:

$$\begin{array}{ccccc} |0\rangle & \text{—} & \boxed{\text{H}} & \text{—} & \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \\ |0\rangle & \text{—} & \boxed{\text{H}} & \text{—} & \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ |0\rangle & \text{—} & \boxed{\text{H}} & \text{—} & \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \end{array}$$

В резултат получаваме тензорното произведение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2^n}} (|0\rangle + |1\rangle) \overset{\otimes}{\vee} (|0\rangle + |1\rangle) \overset{\otimes}{\vee} \cdots \overset{\otimes}{\vee} (|0\rangle + |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(\underbrace{|0\rangle|0\rangle\cdots|0\rangle}_{|[00\cdots 0]_2\rangle} + \underbrace{|0\rangle|0\rangle\cdots|1\rangle}_{|[00\cdots 1]_2\rangle} + \cdots + \underbrace{|1\rangle|1\rangle\cdots|1\rangle}_{|[11\cdots 1]_2\rangle} \right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=0}^{N-1} |\ell\rangle. \end{aligned}$$

Друг пример: ако $W : \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^M$, то трансформацията

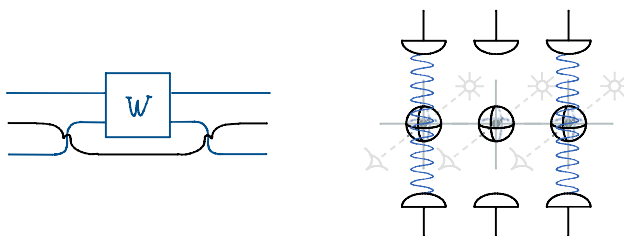
$$W \otimes \hat{1} : (\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^M) \otimes \mathbb{C}^L \rightarrow (\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^M) \otimes \mathbb{C}^L$$

е изобразена на долната фигура

$$\Psi \otimes \Phi \otimes \Theta \left\{ \begin{array}{c} \Psi \\ \Phi \\ \Theta \end{array} \right. \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left[W \right] \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left. \begin{array}{c} \Psi \\ \Phi \\ \Theta \end{array} \right\} W(\Psi \otimes \Phi) \left\{ \begin{array}{c} W(\Psi \otimes \Phi) \otimes \Theta \end{array} \right.$$

фиг. 82: Специален случай на квантова трансформация, при която на една от линиите не се действа

Възможно е и с допълнително пренареждане, както е показано на долната фигура, като в този случай казваме, че W действа върху първия и третия кубити.



фиг. 83: В случая на фиг. 82 може свободната линия да е между тези на които се действа: математически това се описва с допълнителна операция на разместване на линиите

10.3.3 Операциите на пренареждане

Да разгледаме най-общо квантовите операции на пренареждане: за всяка пермутация $\sigma \in \mathcal{S}_n$ съществува единствено линейно изображение

$$\begin{aligned} \Gamma_\sigma : \underbrace{\mathbb{C}^M \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^M}_{n \text{ пъти}} &\rightarrow \underbrace{\mathbb{C}^M \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^M}_{n \text{ пъти}} \\ \Psi_1 \otimes \cdots \otimes \Psi_n &\rightarrow \Psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \Psi_{\sigma(n)}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

В частност, $\Gamma_\sigma(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_n}) = e_{j_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{j_{\sigma(n)}}$, което определя Γ_σ напълно и показва, че е унитарна (понеже изобразява орто-нормиран базис в орто-нормиран).

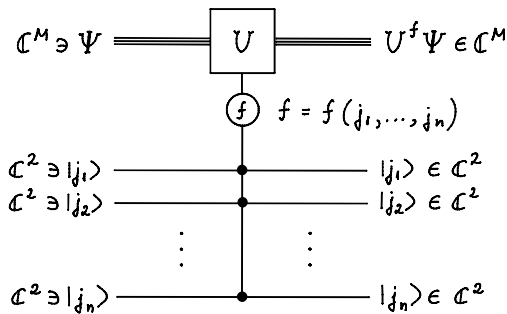
Забележка: $\Gamma_\eta \circ \Gamma_\sigma = \Gamma_{\sigma\eta}$ и за да се коригира запазването на реда понякога избират σ^{-1} по-горе в определението на Γ_σ вместо σ .

10.3.4 Условни операции: “IF $f = 1$ THEN U ELSE $\hat{1}$ ”

Нека $f : \{0, 1\}^{\times n} \rightarrow \{0, 1\} : (j_1, \dots, j_n) \mapsto f(j_1, \dots, j_n)$ ($= 0$ или 1) и нека $U : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M$ е унитарна. Тогава определяме

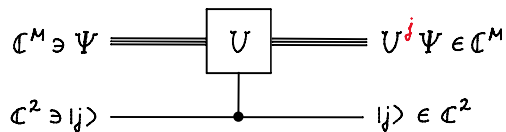
$$\tilde{U} : \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^M,$$

$N = 2^n$, според както е показано на долната фигура:



фиг. 84: Условните квантови трансформации: “ако $f = 1$ тогава изпълни U , в противен случай - нищо не изпълнявай” (“if $f = 1$ then do U , else - do nothing”)

В частност, когато $n = 1$ и $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ е идентитета, то имаме важния частен случай:



фиг. 85: Специалния случай на условните квантова трансформация с едно-кубитов контролен гейт: ако контролния гейт е $j = 1$, тогава U се изпълнява, $U^j \equiv U^1 = U$, в противен случай, когато $j = 0$, тогава U не се изпълнява, $U^j \equiv U^0 = \hat{1}$

което е унитарна трансформация:

$$\tilde{U} : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^M .$$

10.4 Дискретна Фурие трансформация

10.4.1 Определение и свойства

По определение, дискретната Фурие трансформация е линейна трансформация

$$F : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N ,$$

която е определена от $N \times N$ -матрицата: $F := (f_{j,k})_{j,k=0}^{N-1} :=$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \dots & \xi^{N-1} \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \dots & \xi^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi^{N-1} & \xi^{(N-1)^2} & \dots & \xi^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

където $\xi := e^{\frac{2\pi i}{N}}$ е примитивен N -ти корен на единицата, $\xi^N = 1$.

Така,

$$f_{j,k} = N^{-\frac{1}{2}} \xi^{jk} \equiv N^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi i}{N} jk} = N^{-\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{2\pi jk}{N} + i \sin \frac{2\pi jk}{N} \right).$$

Въведената матрица е унитарна, наистина, $(c_{j,k})_{j,k=0}^{N-1} := F^* F \stackrel{?}{=} \widehat{1}$, понеже $F^* = (\overline{f_{k,j}})_{j,k=0}^{N-1}$ и $\overline{f_{k,j}} = \overline{f_{j,k}} = N^{-\frac{1}{2}} \bar{\xi}^{jk} = N^{-\frac{1}{2}} \xi^{-jk}$ и оттук:

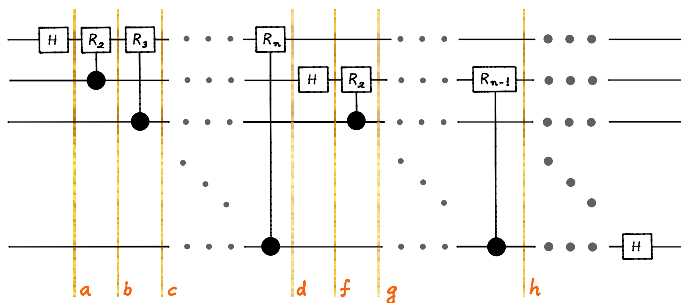
$$c_{j,k} = \sum_{\ell=0}^{N-1} \overline{f_{\ell,j}} f_{\ell,k} = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \xi^{(k-j)\ell} = \begin{cases} \frac{1}{N} N = 1 & \text{за } j = k \\ \frac{\xi^{(j-k)N} - 1}{\xi - 1} = 0 & \text{за } j \neq k. \end{cases}$$

Действието може да се разпише и така:

$$F |j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{N} j \cdot 1} |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{N} j \cdot 2} |2\rangle + e^{\frac{2\pi i}{N} j \cdot 3} |3\rangle + \dots \right).$$

10.4.2 Реализация с квантова мрежа

Ние вече дадохме квантовата мрежа за дискретната Фурие трансформация в началото на тази лекция, като илюстрация на квантовите изчисления. В общия случай, тази мрежа е дадена на долната фигура:



фиг. 86: Мрежа за дискретната фурие трансформация в n кубитовия случай

За да се убедим, че указаната мрежа дава наистина за дискретната Фурие трансформация, нека определим състоянието на n -те квантови бита, на указаните на фигурата разрези, при условие, че стартираме от състояние

$$|j_1, j_2, j_3, \dots, j_n\rangle \equiv |j_1\rangle |j_2\rangle |j_3\rangle \dots |j_n\rangle$$

В хода на действието на мрежата състоянието на n -те бита ще остане несплетено, т.е., тензорно произведение на n -те еднокубитни състояния и ние ще определим какви са те. Това е така, защото действаме с условни квантови гейтове, които в изчислителен базис имат това свойство. Освен това, контролните битове са винаги под бита на който се действа и те не се променят при действие. И накрая, виждаме, че по всяка линия имаме една и съща последователност на гейтове, започваща от гейт на Адамар, $\boxed{H}$ и последвана от условни гейтове на ротации $\boxed{R_2}, \dots, \boxed{R_k}$. Затова, достатъчно е да проследим как се изменя състоянието на първия бит по разрезите до края, а за следващите битове пресмятането е аналогично:

$$\text{a. } |j_1\rangle \xrightarrow{\boxed{H}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (-1)^{j_1} |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2\pi i \cdot [0.j_1]_2} |1\rangle,$$

където сме използвали, че $(-1)^{j_1} = (e^{2\pi i \frac{1}{2}})^{j_1} = e^{2\pi i \frac{j_1}{2}}$ и $\frac{j_1}{2} = [0.j_1]_2$ в двоичен запис.

$$\text{b. } \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2\pi i \cdot [0.j_1]_2} \xrightarrow{\boxed{R_2}} \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2\pi i \cdot [0.j_1 j_2]_2}.$$

Това е така, защото условния гейт $\boxed{R_2}$, при стойност j_2 на контролния бит

$$\text{действа, като матрицата } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (e^{2\pi i \frac{1}{4}})^{j_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \cdot [0.0 j_2]_2} \end{pmatrix}.$$

c. $\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2\pi i \cdot [0.j_1 j_2]_2} \xrightarrow{\boxed{R_2}} \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2\pi i \cdot [0.j_1 j_2 j_3]_2} |1\rangle,$

което е аналогично на предходното действие.

d. На този етап приключваме с действието върху първия кубит. Крайният резултат от действието на останалите условни гейтове $\boxed{R_4}, \dots, \boxed{R_n}$ е:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2\pi i \cdot [0.j_1 j_2 j_3 \dots j_n]_2} |1\rangle.$$

f. – h. На тези разрези състоянието на първия кубит не се променя повече.

И така, крайното състояние се дава от тензорното произведение:

$$2^{-\frac{n}{2}} (|0\rangle + e^{2\pi i \cdot [0.j_1 j_2 j_3 \dots j_n]_2} |1\rangle) (|0\rangle + e^{2\pi i \cdot [0.j_2 j_3 \dots j_n]_2} |1\rangle) (|0\rangle + e^{2\pi i \cdot [0.j_3 \dots j_n]_2} |1\rangle) \dots \\ \times (|0\rangle + e^{2\pi i \cdot [0.j_n]_2} |1\rangle).$$

Отчитайки, че

$$e^{2\pi i \cdot [0.j_k \dots j_n]_2} = e^{2\pi i \cdot [j_1 \dots j_n]_2 \cdot 2^{-(n-k+1)}},$$

получаваме израза на дискретната Фурие трансформация.

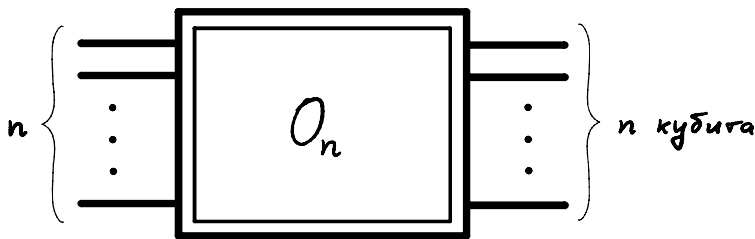
10.5 Първо понятие за квантов алгоритъм

И така, съвсем естествено достигнахме до следното понятие за квантов алгоритъм. Това е редица от квантови мрежи

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n, \dots$$

такива, че:

- $\mathcal{O}_n$ оперира върху n кубита;
- при $m < n$, ако ограничим действието на $\mathcal{O}_n$ върху последните m бита, занулявайки първите, то ще получим действието на $\mathcal{O}_m$;
- редицата от мрежи $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n, \dots$ се поражда от класически алгоритъм.
- В края на изпълнението на мрежата върху изчислителен базис, при измерване отново в изчислителния базис резултата се получава с вероятност близка до 1. Това сме илюстрирали схематично на долната фигура:



фиг. 87: Първоначалното ни понятие за квантов алгоритъм е “алгоритмично породена”, съгласувана редица от квантови мрежи $\{\mathcal{O}_n\}_{n=1}^{\infty}$

По такъв начин, квантовите изчисления са винаги обратими. Растежа на дължината на мрежата $\mathcal{O}_n$ в зависимост от n (което е $\log_2 N$) определя понятието за ефективност на алгоритъма. От особен интерес са тези алгоритми, за които този растеж е полиномиален.