

3 Аксиоми на общите квантови системи. Част 2: логика на събитията

В предния параграф развихме в значителна степен структурата на множеството на състоянията и ни остана още само една аксиома в тази насока, която ще дадем в края на този параграф. Преди това, в настоящия параграф ще се концентрираме основно върху събитията. Едно от първите заключения ще бъде, че *множеството на всички събития е (пълна) орто-модуларна решетка*³⁶ (в края на точка 3.5). В хода на изложението ще обясним и мотивираме всички понятия, споменати в това изречение. Това представлява логическа-

³⁶ortho-modular lattice

та структура на множеството от събития. Тя ще ни позволи да построим и определена геометрия върху множеството на събитията, която ще представим в следващия параграф и заедно с това ще ни позволи докрай да фиксираме там и общата структура на квантовите системи. С този параграф ще изчерпим аксиомите на т.нар. *квантово-логически аксиоматичен подход*, от първата част на аксиоматиката на квантовата теория, като в по-следващия параграф ще се върнем отново към тях и ще ги изложим сумарно.

3.1 Частична наредба

Като начало, нека въведем следната основна бинарна релация в множеството на събитията: за $P, Q \in \mathbf{Events}$ нека

$P \preceq Q$ се определя чрез
условието, че за всички
състояния $\rho, \sigma \in \mathbf{States}$,

от $Prob_{\rho}(P) = 1$ следва

$$Prob_{\rho}(Q) = 1,$$

от $Prob_{\sigma}(Q) = 0$ следва

$$Prob_{\sigma}(P) = 0. \quad (3.1)$$

Когато $P \preceq Q$ ще казваме, че събитието P **се мажорира** от събитието Q . Синонимни изрази за това ще бъдат също и: $Q \succcurlyeq P$, “ Q мажорира P ”, “ P се съдържа в Q ”, “ Q съдържа P ”, “от P следва Q ”, “ Q следва от P ”.

За да изразим определение (3.1) с думи, нека твърдението “ $Prob_{\rho}(P) = 1$ ” изкажем, като: “**събитието P почти сигурно настъпва** (се случва / се наблюдава) в състояние ρ ”. Също така, когато “ $Prob_{\rho}(P) = 0$ ” ще казваме, че “**събитието P почти сигурно не настъпва** (не се случва / не се наблюдава) в състояние ρ ”.³⁷ Тогава

³⁷Забележете, “ $Prob_{\rho}(P) = 1$ ” и “ $Prob_{\rho}(P) = 0$ ” са две *взаимно изключващи се*, но не и *взаимно допълнителни твърдения*, понеже за ситуациите с меж-

определение (3.1) може да се изкаже по следния начин: “ P се мажорира от Q , ако при всяко състояние в което P се наблюдава (случва / настъпва) почти сигурно също и Q се наблюдава почти сигурно, както и за всяко състояние, в което Q почти сигурно не се наблюдава следва, че и P почти сигурно не се наблюдава”. Малко по-кратко и по-свободно, определението за $P \preceq Q$ може да се изкаже и така: “винаги когато се наблюдава събитието P се наблюдава и събитието Q , както и винаги когато Q не се наблюдава, тогава и P не се наблюдава”.³⁸

От ф-ла (3.1) непосредствено следват (чисто логически) две основни вероятности нищо не се твърди. Затова е важно прилагателното “*почти сигурно*” да стои преди отрицанието.

³⁸В случая изрази “винаги когато” предполага изказването “за всяко състояние, в което” и също така “(не) се наблюдава” предполага “почти сигурност”

ни свойства на релацията $\preceq$:

(рефлексивност)

за всяко събитие P имаме:

$$P \preceq P, \quad (3.2)$$

(транзитивност)

за всеки три събития

P , Q и R имаме че:

от $P \preceq Q$ и $Q \preceq R$

$$\text{следва } P \preceq R. \quad (3.3)$$

Като поредна аксиома налагаме следното свойство:

(антисиметрия)

за всеки две събития

P и Q имаме че:

от $P \preceq Q$ и $Q \preceq P$

$$\text{следва } P = Q. \quad (3.4)$$

Еквивалентно,

$$P = Q \quad (3.5)$$

$$\iff \begin{cases} Prob_{\rho}(P) = 1 \\ \Leftrightarrow Prob_{\rho}(Q) = 1 \ (\forall \rho), \\ Prob_{\sigma}(P) = 0 \\ \Leftrightarrow Prob_{\sigma}(Q) = 0 \ (\forall \sigma). \end{cases}$$

Изказана с думи горната аксиома гласи, че ако P , респективно, настъпва или не настъпва, тогава и само тогава, когато Q настъпва или не настъпва, то тогава P и Q са едно и също събитие.

По такъв начин, множеството ***Events***, снабдено с релацията $\preceq$, се превръща в *частично наредено множество*,³⁹ тъй като (нека припомним, че) свойствата (3.2), (3.3) и (3.4) се явяват дефиниционни за това.

Аксиомата (3.4) изглежда напълно естествено. Тя засилва обаче втората аксиома за отделимост както непосредствено се вижда от еквивалентната формулировка (3.5).

По-нататък (в точка 3.7), в следствие на допълнителните ни аксиоми ще получим следното свойство:

$$P \preceq Q$$

тогава и само тогава, когато

за всяко състояние $\rho \in \mathbf{States}$:

³⁹partially ordered set = poset

$$\text{Prob}_\rho(P) \leq \text{Prob}_\rho(Q) . \quad (3.6)$$

За класическите системи от точка 2.11, въведената аксиома (3.4) се изпълнява и частичната наредба в множеството на събитията (2.27) за тези системи е просто релацията на включване на едно подмножество в друго (проверете!):

$$P \preceq Q \iff P \subseteq Q \quad (3.7)$$

за всеки $P, Q \in \mathbf{Events} = \mathcal{P}(\Omega)$ (класическа система).

3.2 Нула и единица

Следваща аксиома ще бъде изискването, че:

в частично нареденото множество на всички събития съществуват *най-голям и най-малък елемент*.

Последните ще означаваме с **0** (нула) и **1** (единица), съответно. Написано с формули, това означа, че за всяко събитие $P \in \mathbf{Events}$ имаме:

$$\mathbf{0} \preceq P \preceq \mathbf{1} . \quad (3.8)$$

Изказано с думи, от събитието **0** следва всяко друго събитие, поради което то ще има смисъл на *невъзможното събитие*.⁴⁰ Аналогично, събитието **1** следва от всяко друго събитие и поради това то придобива смисъл на *винаги изпълнено събитие*.⁴¹ Като следствие на допълнителните ни аксиоми по-нататък ще докажем, че:

$$P = 0$$

тогава и само тогава, когато

за всяко състояние $\rho \in \mathbf{States}$:

$$Prob_{\rho}(P) = 0. \quad (3.9)$$

и също, че

$$P = 1$$

тогава и само тогава, когато

⁴⁰“невъзможно”, понеже от него ще следват дори и “взаимно изключващи се” събития (каквото и да значи за момента това)

⁴¹“винаги изпълнено”, понеже то ще следва, в частност и от “взаимно допълващи се” събития (което за момента също, както и в предната подлистна бележка, има само интуитивен и мотивационен смисъл)

за всяко състояние $\rho \in \mathbf{States}$:

$$\text{Prob}_{\rho}(P) = 1. \quad (3.10)$$

Класическите системи (точка 2.11) притежават нула и единица – това са празното под-множество и цялото множество, съответно:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \in \mathcal{P}(\Omega) (= \mathbf{Events}), \\ 1 &= \Omega \in \mathcal{P}(\Omega) (= \mathbf{Events}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

(защо?).

3.3 Логическите операции “и” и “или” за събития

Всяко частично наредено множество допуска формулирането на логическите операции “и” и “или” посредством понятията за *инфимум* (или още, *точна долна граница*) и *супремум* (*точна горна граница*), съответно.

Нашата следваща *аксиома* е, че

в множеството на всички събития съществуват инфимумите и супремумите на произволни подмножества от събития.

Нека припомним тези понятия от общата теория на частично наредените множества. Ако $(\mathcal{T}, \preceq)$ е едно частично наредено множество и $S \subseteq \mathcal{T}$, то **инфимум** на S се определя като:

$$\wedge S (\equiv \inf S) := a \quad (3.12)$$

$$\iff \begin{cases} \forall x \in S : a \preceq x \\ \forall y \in \mathcal{T} : (\forall x \in S : y \preceq x) \\ \quad \Rightarrow y \preceq a. \end{cases}$$

Изказано с думи, a е най-големия елемент в множеството на всички елементи y , които са по-малки от всеки елемент x на S . *Дуално понятие*⁴² е **супремума**:

$$\vee S (\equiv \sup S) := a \quad (3.13)$$

⁴²Дуално понятие (респ., твърдение) в теорията на частично наредените множества се получава с обръщане на посоките на наредбената релация навсякъде в съответното определение (респ., твърдение).

$$\iff \begin{cases} \forall x \in S : x \preceq a \\ \forall y \in \mathcal{T} : (\forall x \in S : x \preceq y) \\ \Rightarrow a \preceq y, \end{cases}$$

т.е., a е най-малкия елемент в множеството на всички елементи y , които са по-големи от всеки елемент x на S . Подчертаваме, че елементите $\wedge S$ и $\vee S$ не винаги съществуват. Доказва се обаче, че ако съществуват $\wedge S$ или $\vee S$, то определенията по-горе ги дефинират еднозначно.⁴³ Нека отбележим, че ако частично нареденото множество $(\mathcal{T}, \preceq)$ има нула и единица, то

$$\begin{aligned} \wedge \emptyset &= \mathbf{1}, & \vee \emptyset &= \mathbf{0}, & \wedge \mathcal{T} &= \mathbf{0}, \\ & & & & \vee \mathcal{T} &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Важна теорема в теорията на инфимумите и супремумите гласи, че: (i) ако в едно частично наредено множество $(\mathcal{T}, \preceq)$, в което има нула и единица, съществуват инфимумите на произволни подмножес-

⁴³опитайте да го докажете сами, ако това не ви е известно(!)

тва $S \subseteq \mathcal{T}$, то тогава съществуват и супремумите на произволни подмножества, като при това е в сила:

$$\vee S = \wedge \{y \in \mathcal{T} \mid \forall x \in S : x \preceq y\}; \quad (3.14)$$

(ii) дуално, ако в едно частично наредено множество $(\mathcal{T}, \preceq)$, в което има нула и единица, съществуват супремумите на произволни подмножества $S \subseteq \mathcal{T}$, то тогава съществуват и инфимумите на произволни подмножества, като при това е в сила:

$$\wedge S = \vee \{y \in \mathcal{T} \mid \forall x \in S : y \preceq x\}. \quad (3.15)$$

(Всъщност, ф-ли (3.14) и (3.15) са практически определенията за супремум и инфимум.)

В математиката, частично наредени множества, в които произволни, непразни, крайни подмножества от елементи имат супремум и инфимум, се наричат *решетки* (на-

редбени).⁴⁴ Ако в решетка съществуват супремумите и инфимумите на произволни подмножества, тогава решетката се нарича *пълна*.⁴⁵ По такъв начин, аксиомите формулирани до тук могат да се свият просто до формулировката, че *множеството на събитията **Events** е пълна решетка с нула и единица, спрямо операцията “ $\preceq$ ” (3.1), в качеството на частична наредба.*

Особено важен случай е, когато имаме инфимум и супремум на множество от два елемента. Нека вече се концентрираме върху случая на частично нареденото множество на събитията. За две събития $P, Q \in \mathbf{Events}$ полагаме:

$$\begin{aligned} P \wedge Q (\equiv P \text{ и } Q) &:= \wedge \{P, Q\}, \\ P \vee Q (\equiv P \text{ или } Q) &:= \vee \{P, Q\} \end{aligned} \tag{3.16}$$

и по-нататък ние основно ще използваме означения “ $\wedge$ ” и “ $\vee$ ” за обознача-

⁴⁴lattice

⁴⁵complete lattice

чаване на логическите операции “и” и “или” между събитията, съответно. В следващата точка специално ще разгледаме инфимума и супремума, “ $\wedge$ ” и “ $\vee$ ”, като бинарни операции. По-нататък, операциите “ $\wedge$ ” и “ $\vee$ ” ще наричаме също **решетъчни операции**.

За класическите системи (точка 2.11) множеството на събитията, което е степенното множество (фла (2.27)), е пълна решетка. В този случай решетъчните операции “ $\wedge$ ” и “ $\vee$ ” съвпадат с теоретико-множествените операции сечение “ $\cap$ ” и обединение “ $\cup$ ”, съответно:

$$P \wedge Q = P \cap Q, \quad P \vee Q = P \cup Q \quad (3.17)$$

за всеки $P, Q \in \mathbf{Events} = \mathcal{P}(\Omega)$ (класическа система).

Тази точка ще завършим с дискусия относно мотивацията и илюстрацията (т.е., “практическата реализация”) на въведените логически операции “ $\wedge$ ” и “ $\vee$ ” между събитията. И така, възниква следния въпрос: до-

колко тези операции биха могли да се изпълнят в експерименти. Нека първо допуснем, че събитията P и Q могат да се определят в един общ експеримент, като подмножества от елементарни наблюдателни алтернативи. Тогава операциите “ $\wedge$ ” и “ $\vee$ ” ще преминат в операциите сечение и обединение на съответните подмножества от елементарни събития на експеримента. В общия случай обаче може и да не съществува общ експеримент за P и Q . Тогава се предлага следния изход ([Pi76, Theorem 2.1]). Нека $\{P_\alpha\}_\alpha$ е произволна фамилия от събития, като индекса α е “името” на експеримента, на който P_α се измерва (проверява). Допускаме, че може да конструираме експеримент, който се извършва по следния начин: избираме напълно случайно произволен експеримент “ α ” и проверяваме (измерваме) в него събитието P_α . Тогава, в така конструирания експеримент почти сигурното изпълняване на измерваното събитие ще има

смисъла точно на почти сигурното изпълняване на инфимума $\bigwedge \{P_\alpha\}_\alpha$. Това донякъде оправдава предположението, че в частично нареденото множество на събитията съществуват инфимумите на произволни подмножества.

И така, ако по една или друга причина допуснем съществуване на произволни инфимуми, то съгласно теоремата по го-горе (ф-ла (3.14)) ще съществуват и супремумите на произволни множества от събития. Обръщаме внимание, че за целта е нужно съществуването на инфимум да се допусне за произволни подмножества от събития $\{P_\alpha\}_\alpha$, а не само на крайни. Това е така, защото в следствие във ф-ла (3.14) се налага конструирането на инфимуми по безкрайни множества, даже и когато изходното множество S е крайно.

3.4 Отрицанието

За да завършим въвеждането на основните логически релации и операции между събитията ни остава да въведем и операцията *отрицание*.

Ще предположим, като поредна *аксиома*, че

за всяко събитие P съществува събитие Q такова, че Q се случва (наблюдава) тогава и само тогава, когато P не се случва, както и P се случва тогава и само тогава, когато Q не се случва.

Написано с формула това условие изглежда така: за всяко състояние $\rho \in \mathbf{States}$ имаме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned} Prob_{\rho}(P) = 1 & \iff Prob_{\rho}(Q) = 0, \\ Prob_{\rho}(P) = 0 & \iff Prob_{\rho}(Q) = 1. \end{aligned}$$

Съгласно аксиома (3.5) за равенство на две събития следва, че събитието Q е еднозначно определено от събитието P . Ще казваме, че Q е **отри-**

цание на събитието P и ще пишем:

$$Q =: P^{\perp} (\equiv \text{не } P). \quad (3.19)$$

Друго следствие, което получаваме от определенията и аксиомите ни до тук е твърдението, че всички събития P_1 и P_2 имаме:

$$P_1 \preceq P_2 \implies P_2^{\perp} = P_1^{\perp}. \quad (3.20)$$

По-нататък, като следствие на останалите ни аксиоми ще покажем, че

$$\text{Prob}_{\rho}(P^{\perp}) = 1 - \text{Prob}_{\rho}(P) \quad (3.21)$$

за всички $P \in \mathbf{Events}$ и $\rho \in \mathbf{States}$.

За класическите системи (точка 2.11) отрицанието е теоретико-множественото допълнение (защо?):

$$P^{\perp} = \Omega \setminus P \quad (3.22)$$

за всеки $P, Q \in \mathbf{Events} = \mathcal{P}(\Omega)$ (класическа система).

3.5 Общи закони на съждителното (пропозиционалното) смятане за събития

Нека изброим основните свойства на въведените до тук логически операции и релации върху събитията, които следват от въведените до сега аксиоми:

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \wedge R) &= (P \wedge Q) \wedge R, \\ P \vee (Q \vee R) &= (P \vee Q) \vee R, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} P \wedge Q &= Q \wedge P, \\ P \vee Q &= Q \vee P, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} P \vee (P \wedge Q) &= P, \\ P \wedge (P \vee Q) &= P, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$P \wedge P = P = P \vee P, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} P \wedge Q = P &\Leftrightarrow Q \preceq P, \\ P \vee Q = Q &\Leftrightarrow P \preceq Q. \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$(P^\perp)^\perp = P, \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} P \vee P^\perp &= \mathbf{1}, \quad P \wedge P^\perp = \mathbf{0}, \\ \mathbf{1}^\perp &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp,$$

$$(P \vee Q)^{\perp} = P^{\perp} \wedge Q^{\perp} \quad (3.30)$$

(за всеки $P, Q, R \in \mathbf{Events}$).

Поименно:

- (3.23) са тъждествата за *асоциативност*;
- (3.24) са тъждествата за *комутативност*;
- (3.25) се наричат тъждества за “*поглъщането*”;⁴⁶
- (3.26) са тъждествата за *идемпотентност*;
- (3.27) дават обратна характеристика на релацията на частична наредба $\preceq$ посредством операциите $\wedge$ или $\vee$;
- (3.28) е *идемпотентността на отрицанието*;
- (3.29) започва със *закона за изключеното трето*;

⁴⁶absorption laws

- и накрая, (3.30) са законите на *де Морган*.⁴⁷

Доказателството на горните тъждества се състои просто в пряко следване на дадените до тук в този параграф определения и аксиоми, и затова ще го пропуснем.

Тъждествата (3.23)–(3.30) съставляват законите за класическото съждително смятане, от които са изпуснати само *законите за дистрибутивност*:

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \vee R) &= (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \\ P \vee (Q \wedge R) &= (P \vee Q) \wedge (P \vee R). \end{aligned} \tag{3.31}$$

В общия случай, това което следва вместо тъждествата (3.31) са неравенствата

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \vee R) &\not\approx (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \\ P \vee (Q \wedge R) &\not\approx (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \end{aligned} \tag{3.32}$$

⁴⁷de Morgan's laws

(докажете ги(!) – упражнението е много полезно).

В алгебрата, множество с бинарни операции “ $\wedge$ ” и “ $\vee$ ” и едномесна операция “ $\perp$ ”, в което изпълняват тъждествата (3.23)–(3.30) се нарича **орто-решетка**.⁴⁸ Така, аксиомите до тук от настоящия параграф 3 могат на кратко да се изкажат така: *множеството **Events** на квантовите събития е орто-решетка (спрямо релацията (3.1) и операциите (3.16) и (3.19)).*

3.6 Орто-модуларност и допълнения

Структурата на орто-решетка е сравнително силна и съдържателна, но не достатъчно. Допълнително усиляване идва от т.нар.⁴⁹

закон за орто-модуларност:

ако $P \preceq Q$ тогава

⁴⁸ortho-lattice

⁴⁹ortho-modularity law

$$P \vee (P^\perp \wedge Q) = Q \quad (3.33)$$

за всеки две събития $P, Q \in \mathbf{Events}$,

който приемаме като *аксиома*. Условието (3.33) може да се разглежда, като специален случай на дистрибутивност понеже

$$\begin{aligned} P \vee (P^\perp \wedge Q) &= (P \vee P^\perp) \wedge (P \wedge Q) \\ &= \mathbf{1} \wedge Q = Q, \end{aligned}$$

където във второто равенство сме използвали закони (3.29) и (3.27).

В алгебрата, орто-решетки, в които се изпълнява орто-модуларния закон се наричат **орто-модуларни решетки**.⁵⁰

Забележете, че за събития P, Q в една класическа система (точка 2.11), ако $P \preceq Q$, то събитието $Q \wedge P^\perp$ е допълнението на P в Q ,

$$Q \setminus P := P^\perp \wedge Q, \quad (3.34)$$

понятие което по-нататък ще пренесем и в общи орто-модулари

⁵⁰ortho-modular lattices

решетки. Така, закона за ортомодуларност приема вида:

$$\begin{aligned} \text{ако } P \preceq Q \text{ тогава} \\ P \vee (Q \setminus P) = Q. \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.7 Състоянията като вероятности върху орторешетката на събитията

Сигаме до мястото, където едва естествения завършек на аксиомите за състоянията в общите системи. Досега искахме те да са само изпъкнало подмножество в линейното пространство на функциите върху събитията. В следващата *аксиома* ще поискаме те да имат свойствата на естественото обобщение на понятието за вероятност:

Всяко състояние $\rho \in \mathbf{States}$ изпълнява свойствата:

адитивност

$$\rho(Q) = \rho(P) + \rho(Q \setminus P), \quad (3.36)$$

за всеки две събития $P, Q \in \mathbf{Events}$, за които $P \preceq Q$;

нормираност

$$\rho(1) = 1. \quad (3.37)$$

Да припомним, че в случая на ситуацията $P \preceq Q$ при събития $P, Q \in \mathbf{Events}$ е в сила ортомодуларния закон (3.35).

От математическа гледна точка: за произволна орто-решетка $\mathcal{T}$ можем да въведем понятието за **вероятност върху $\mathcal{T}$** , като такава функция

$$\varphi : \mathcal{T} \rightarrow [0, 1] \quad (3.38)$$

която изпълнява горните две условия (3.36) и (3.37). Тогава, ако означим с

$$\mathbf{Prob.Func.}(\mathcal{T}) \quad (3.39)$$

$$:= \{ \varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ е вероятност} \}$$

върху $\mathcal{T}$ },

то горните аксиоматични условия (3.36) и (3.37) се записват кратко, като

$$\begin{aligned} \mathbf{States} & \quad (3.40) \\ \subseteq \mathbf{Prob.Func.}(\mathbf{Events}). \end{aligned}$$

Също, лесно се проверява, че за всяка орто-решетка $\mathcal{T}$ множеството $\mathbf{Prob.Func.}(\mathcal{T})$ е изпъкнало подмножество в линейното пространство на всички функции $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ (упражнение).

Все още не сме сигурни, че системите, които аксиоматизираме ще имат достатъчно много състояния. Това ще следва от следната аксиома:

За всяко ненулево събитие $P \in \mathbf{Events}$ съществува състояние $\rho \in \sigma$, в което P настъпва почти сигурно, т.е., $\mathbf{Prob}_\rho(P) = 1$.

По-нататък ще покажем, че от аксиомите ни следва, че:

$$\mathbf{States} \quad (3.41)$$

$$= Prob.Func.(Events),$$

т.е., в (3.40) всъщност имаме равенство.

Преди да продължим със заключителните аксиоми на квантово-логическия подход, нека дадем някои непосредствени следствия от горните аксиоми за състоянията, като вероятности върху орто-решетката на събитията. Най-напред, забележете, че от (3.36) и (3.37) следва

$$\rho(\mathbf{0}) = 0, \quad (3.42)$$

понеже $1 = \rho(\mathbf{1}) = \rho(\mathbf{1} \vee (\mathbf{1} \setminus \mathbf{1})) = \rho(\mathbf{1}) + \rho(\mathbf{1} \setminus \mathbf{1}) = 1 + \rho(\mathbf{1} \setminus \mathbf{1})$ и $\mathbf{1} \setminus \mathbf{1} = \mathbf{1}^\perp \wedge \mathbf{1} = \mathbf{0}$. Друго следствие е, че

$$P \preceq Q \implies \rho(P) \leq \rho(Q), \quad (3.43)$$

от където следва и вече анонсираната в (3.6) вероятностна характеристика на релацията мажориране.

3.8 Елементарни събития.

Ниво на събитие. Ранг на системата

По определение, **елементарно събитие** е събитие $P \in \mathbf{Events}$, такова, че за всяко друго събитие $Q \in \mathbf{Events}$ следва, че:

$$Q \preceq P \implies Q = \mathbf{0} \text{ или } Q = P. \quad (3.44)$$

В теорията на частично наредените множества с *най-малък елемент* (и в частност, решетките с нула и единица) свойство (3.44) определя понятието **атом в частично наредено множество**. Така, *елементарните събития* – това са атомите на решетката на събитията.

По определение, една решетка се нарича **атомарна**,⁵¹ ако всеки ненулев елемент мажорира поне един атом. Нашата *поредна аксиома* гласи, че решетката на всички събития $\mathbf{Events}$ е атомарна. Подробно,

⁵¹atomic lattice

всяко ненулево събитие мажорира поне едно елементарно събитие.

Обобщение на понятието за атом в решетка е понятието за *ниво*. Нека за определеност говорим конкретно за решетката на събитията **Events**. По определение, нулевото събитие и само то има **ниво нула**. За едно *ненулево* събитие P , казваме че има **крайно ниво**, ако всяка верига

$$\begin{aligned} 0 = P_0 \preceq P_1 \preceq P_2 \preceq \cdots \preceq P_r = P \\ P_0 \neq P_1 \neq P_2 \neq \cdots \neq P_r \end{aligned} \quad (3.45)$$

е *крайна* и в множеството на тези вериги има такива с *най-голяма дължина* r . Числото $r \geq 1$ се нарича **ниво на ненулевото събитие** P . Ясно е, че *елементарните събития са тези и само тези събития, които са от ниво 1*.

Системата наричаме от **система от крайно ниво** или още **крайна система**, ако *единицата 1 има крайно ниво*. Тогава нивото на еди-

ницата ще наричаме **ранг на системата**.

Ще приемем, като *аксиоматично предположение* в нашия курс, че:

Всички системи на квантовата информатика са крайни.

Това е равносилно на твърдението, че *всички събития имат крайно ниво*.

Едни от най-фундаменталните системи на квантовата информатика са системите от ниво 2: това е **системата на един бит**. По-нататък в този курс ще покажем, че *в следствие на аксиомите ни, има по същество⁵² точно две системи от ниво две: това са класическия и квантовия бит*. Последния се нарича също **q -бит**.⁵³

За класическите системи от точка 2.11 (с множество на състо-

⁵²или, по-точно казано, има “с точност до изоморфизъм”

⁵³ q -bit

янията ***Events*** = $\mathcal{P}(\Omega)$ по ф-ла (2.27)) елементарните събития, в смисъла на горното определение, са точно едно-елементните подмножества, както и бяха наричани там. Също така, *степенните множества* $\mathcal{P}(\Omega)$ са винаги атомарни решетки. Друго просто твърдение, което получаваме е, че: *едно събитие на класическа система е от крайно ниво, тогава и само тогава, когато е крайно подмножество (на Ω); при това, неговото ниво е равно точно на броя на елементите това подмножество*. В частност, *всяка крайна класическа система (а ние определихме само крайни), е крайна в горния смисъл, т.е., множеството Ω е крайно*.

Забележка: Така, *крайните класически системи имат крайни множества от събития ***Events****. Същевременно обаче, в общия случай, *крайните квантови системи няма да имат крайно много събития(!)*. Даже квантовия бит ще има безкрайно много събития – и всичките, ко-

ито са различни от $\mathbf{0}$ или $\mathbf{1}$, ще са елементарни.

В заключение на тази точка, ще дадем още някои математически понятия и твърдения от теория на решетките, които ще играят важна роля в квантовата теория.

В едно частично наредено множество $\mathcal{T}$ и два негови елемента $a, b \in \mathcal{T}$ казваме, че

b **покрива** a ,

ако $a \preceq b, a \neq b$

и за всеки елемент $c \in \mathcal{T}$,

$a \preceq c \preceq b$

$\implies a = c$ или $b = c$. (3.46)

Така, твърдението, че a е атом на частично наредено множество $\mathcal{T}$ с най-малък елемент $\mathbf{0} \in \mathcal{T}$ е равносилно на изказването, че a покрива $\mathbf{0}$.

Разбира се, в квантовата теория ние ще използваме горното определение (3.46) главно за събития

от орто-решетката ***Events*** (която преди всичко е и частично наредено множество). Затова следващото определение направо ще приведем за ***Events***. За едно събитие от крайно ниво $P \in \mathbf{Events}^{54}$ ще казваме, че веригата (3.45) е **максимална верига**, ако в нея за всяко $j = 1, \dots, r - 1$ имаме, че P_{j+1} *покрива* P_j . Еквивалентно, последното означава, че веригата (3.45) не може да се разшири с добавяне на междинни елементи.

Важна теорема за ортомодуларни решетки гласи, че всяка максимална верига от нулата до елемент от крайно ниво има една и съща дължина (и следователно, това е и максималната дължина за дадения елемент). Последното условие (теорема) в математиката е известно също като *условие (теорема) на Жордан* –

⁵⁴а съгласно аксиомата по-горе в тази точка всички събития са от крайно ниво

Хьолдер.⁵⁵

3.9 Закон за покриването

В тази точка ние ще дадем последната аксиома на квантово-логическия подход отнасяща се до събитията. За пълното завършване на аксиоматиката ще останат още две аксиоми, които вече се отнасят до състоянията и които ще въведем по-нататък.

Новата ни **аксиома** е известна също, като **закон за покриването** ([Pi76, (2.12): Axiom (A_2))] и гласи следното:

Ако P е елементарно събитие, а Q е събитие, такова че $P \wedge Q = \mathbf{0}$, тогава $P \vee Q$ покрива Q .

Еквивалентно, ако P е елементарно събитие, а Q е събитие, такова че $P \wedge Q = \mathbf{0}$, тогава $(P \vee Q) \wedge P^\perp$ е елементарно събитие. Последната еквивалентност оставяме без доказателство.

⁵⁵Jordan-Hölder chain condition

В заключение на тази точка ще отбележим, че горната аксиома за покриването няма да играе никаква роля в следващите няколко точки, където ние ще въведем доста ключови понятия от квантовата теория. Аксиомата за покриването ще се използва съществено при описанието на геометричната структура на събитията в следващия параграф.