4 Понятия и структурна теория на квантово-логическия подход

4.1 Подрешетки и подсистеми

В математиката: **подрешетка** на една орто-решетка $\mathcal{T}$ е *непразно* подмножество $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}$, което е *затворено* спрямо решетъчните операции "$\wedge$" и "$\vee$" и операцията на допълнение (отрицанието) "$(\cdot)^{\perp}$". По-подробно: ако $a, b \in \mathcal{T}_1$, то $a \wedge b \in \mathcal{T}_1$, $a \vee b \in \mathcal{T}_1$, $a^{\perp} \in \mathcal{T}_1$. Като следствие, под-решетката $\mathcal{T}_1$ съдържа и нулата и единицата: наистина, ако $a \in \mathcal{T}_1$, то $\mathbf{0} = a \wedge a^{\perp} \in \mathcal{T}_1$ и $\mathbf{1} = a \vee a^{\perp} \in \mathcal{T}_1$.

Въз основа на това, определяме понятието **подсистема** на система, която е определена от множества на

събитията $\boldsymbol{Events}$ и на състоянията $\boldsymbol{States}$, и функция на вероятността *Prob* по следния начин. Това е система, за която:

- множеството на събитията $\boldsymbol{Events}_1$ е *подрешетка* на орто-решетката $\boldsymbol{Events}$;
- множеството на състоянията $\boldsymbol{States}_1$ се определя, като тези функции $\boldsymbol{Events}_1 \to [0,1]$, които се явяват ограничение при влагането $\boldsymbol{Events}_1 \subseteq \boldsymbol{Events}$ на функциите на състоянията $\boldsymbol{Events} \to [0,1]$, съгласно интерпретацията на състоянията, като функции върху събитията от точка 2.5 (ф-ла (2.7)).

Нека специално да подчертаем обратната страна на горното определение: всяка подрешетка на орто-решетката $\boldsymbol{Events}$ на събитията на една система ще определя подсистема. В тази връзка обръщаме внимание, че първата аксиома за отде-

лимост е автоматично изпълнена и за подсистемата, когато разглеждаме състоянията, като функции от събитията. Втората аксиома за отделимост обаче не е автоматично изпълнена, но на нас ни предстоят допълнителни аксиоми за състоянията, които в крайна сметка ще доведат до изпълняването и на втората аксиома за отделимост (както и на всички последващи аксиоми) за така определените по-горе подсистеми.

Мотивацията за горното определение е проста и интуитивна. Подсистемата се отделя, като подмножество от събития: това са събитията от тези измервания, които се отнасят до подсистемата. При това отделяне на подмножество от събития е естествено да очакваме, че логическата им структура не се променя. Математически това означава точно, че множеството от събитията на подсистемата е подрешетка на орто-решетката на всички събития, както определихме по-горе. Относ-

но определянето на състоянията на подсистемата, нашето полагане означава просто, че всяко състояние на подсистемата идва от някакво състояние на обемащата система. Тоест, състоянията на подсистемата могат, като функции от събитията, да се продължат от множеството на събитията на подсистемата към тези на цялата система. Обръщаме внимание, че такова продължение, по принцип, няма да бъде единствено, даже и при класическите системи. Тук единствено искаме такива продължения да съществуват.

Една илюстрация на понятието подсистема е това да си го мислим "отделяне на част от система". Например, всеки бит в една система от няколко бита ще бъде подсистема. Това ще бъде началната постановка, когато разглеждаме понятието за съставни системи. По такъв начин, когато комбинираме две или повече системи в една обща ние получаваме система, на която изходните

системи са подсистеми.

Горната ситуация обаче далеч не е единствената, в която ще използваме понятието подсистема. Има далеч по-проста и първична възможност: всеки експеримент ще разглеждаме, като една подсистема. И тази подсистема е всъщност класическа. На това ще се върнем в точка 4.4, а преди това, в следващата точка ще разгледаме една друга, също доста първична ситуация на преход между системи и подсистеми.

4.2 Над-системи и процеса на уточняване (прецизиране) на измерванията

Нека обърнем прехода "система" $\rightarrow$ "подсистема" от предходната точка. Така достигаме до понятието **над-система**, т.е., над-системата е система, за която нашата система е подсистема.

До тук няма нищо съществено

ново и ние няма да въвеждаме нови понятия. В тази точка обаче ние ще дискутираме допълнителен аспект, който се добавя в нашата интерпретация. Това е наблюдението, че разширяването на нашата система към над-система може да изразява *увеличаването на чувствителността на нашите измервания*. Наистина, в следствие на едно такова увеличаване ние започваме да регистрираме повече събития, като запазваме старите събития и тяхната логическа структура. Също, при едно такова разширяване елементарните събития на изходната система могат да престанат да бъдат елементарни в над-системата.

Увеличаването на прецизността на нашите измервания е по принцип безкраен процес. Нека разпишем един такъв процес на разширения на една система в хода на увеличаване на чувствителността на измерванията: полагайки $\boldsymbol{Events}_0$

$:= \boldsymbol{Events}$, имаме

$$\boldsymbol{Events}_0 \subseteq \boldsymbol{Events}_1 \subseteq \boldsymbol{Events}_2 \tag{4.1}$$

Първо, ще приведем на готово един математически резултат, който гласи, че *тази редица* (4.1) *поражда граница* $\boldsymbol{Events}_\infty$,[56] *в която всички орто-решетки* $\boldsymbol{Events}_j$ *са подрешетки:*

$$\boldsymbol{Events}_j \subseteq \boldsymbol{Events}_\infty\,, \tag{4.2}$$

запазвайки влаганията по-горе. Същевременно, в хода на разширенията във ф-ла (4.1) е естествено да се очаква, че рангът на системите $\boldsymbol{Events}_j$ ще расте с нарастването на j. В резултат на това орторешетката $\boldsymbol{Events}_\infty$ ще излезе извън рамките на аксиоматизируемите от нас множества от събития на крайни системи.

Възниква въпрос: не можем ли да работим направо с граничния слу-

[56] това е понятието *индуктивна граница / inductive limit*

чай. Отговорът зависи от поставените цели. Във фундаменталната теоретична физика, стремежът е да се опише физическата реалност, като независеща от нас, наблюдателите с нашите изследователски апарати. В този случай работата със системи от безкраен ранг е задължителна, но това на свой ред води до допълнителни математически условия, някои от които вече са далеч по-слабо мотивирани от нашия пряк експериментален опит.

От гледна точка на информационните приложения ние може, както да работим с граничната система, така и със самата редица от надсистеми. Може би по-честият подход обаче е работата с редицата на надсистемите и в този курс ние това ще следваме. Тоест, ние винаги ще работим с крайни системи, които могат да се разширяват потенциално до безкрайност.

4.3 Булеви подалгебри. Експерименти на системата

В математиката: **булева алгебра** е орто-решетка (т.е., изпълнени са тъждества (3.23)–(3.30) и (3.33)), в която се изпълняват дистрибутивните закони (тождествата (3.31)).

"Класически" пример за булева алгебра е множеството на събитията в една *класическа система*, както е определено в точка 2.11. Тоест, това е степенното множество (фла (2.27)). Всъщност, една от първите теореми в теорията на булевите алгебри гласи: *всяка* крайна *булева алгебра* "*може да се моделира като*"[57] *множеството от всички под-множества* (*т.е., степенното множество*) *на едно крайно множество. По-конкретно,* множеството от атомите *на булевата алгебра е именно това множество, над което булевата алгебра може да се моде-*

[57] точният термин е "е изоморфна на"

лира като степенно множество.

Булева подалгебра на орто-решетка е подрешетка, която като (самостоятелна) орто-решетка е булева алгебра. Тоест, в тази подрешетка се изпълняват дистрибутивните закони.

До тук в тази точка въведохме новите математически понятия за булева алгебра и подалгебра. Следва тяхната интерпретация в квантовата теория.

Първо да отбележим един факт, който ще изведем след завършването на аксиоматиката на квантово-логическия подход. *Една система е (крайна) класическа система, тогава и само тогава когато множеството на събитията ѝ е (крайна) булева алгебра.*

В интерпретационен план: определяме понятието **експеримент** върху системата, като булева подалгебра на орто-решетката на събитията ***Events*** на системата.

Атомите на булевата подалгебра, която определя даден експеримент ще наричаме **елементарни събития на експеримента** (или също, **елементарни алтернативи на експеримента**).

Забележете: елементарните събития за един експеримент може да не са елементарни събития за разглежданата система. В по-следващата точка ние ще видим, че това се случва за специални експерименти – т.нар. *максимални експерименти* на системата.

Като мотивация за горните ни определения: ние вече обявихме в края на точка 4.1, че понятието за експеримент на една система ще бъде разглеждано, като частен случай на подсистема. Тук уточняваме очевидното изискване, че тази подсистема трябва да бъде класическа, т.е., логиката й да бъде класическа (и следователно, дистрибутивна). Отново обаче обратна страна определе-

нието за експеримент на системата заслужава специално подчертаване: с горното определение ние полагаме, че всяка булева подалгебра отговаря на експеримент.

А всъщност, може ли да се случи системата да не съдържа експерименти? С други думи, може ли в орто-решетката ***Events*** да няма булеви подалгебри? Отговорът е прост и е "не". Най-баналната булева подалгебра на всяка орто-решетка е подмножеството

$$\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}\,. \tag{4.3}$$

Това е и най-безинтересния, и неинформативен експеримент: "нищо" или "всичко". Има и малко по-сложни, и съдържателни експерименти: *ако P е събитие различно от* $\mathbf{0}$ *и* $\mathbf{1}$*, то подмножеството*

$$\{\mathbf{0}, P, P^{\perp}, \mathbf{1}\} \tag{4.4}$$

е винаги булева подалгебра (оставяме проверката на това твърдение в

качеството на просто упражнение за читателя). Булевата подалгебра (4.4) съответства на *минималния* експеримент при който се тества (проверява / измерва) събитието P.

Така, достигаме до една доста съдържателна математическа структура, която същевременно играе и важна роля в квантовата теория. Това е множеството на всички експерименти на една система. Математически, това е множеството от булеви подалгебри $\mathcal{B}$ на орто-решетката на събитията $\boldsymbol{Events}$. Това е множество е *частично наредено* спрямо релацията включване:

$$\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2\,, \tag{4.5}$$

за две булеви подалгебри $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2 \subseteq \boldsymbol{Events}$. За експериментите, които съответстват на $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ релацията (4.5) означава, че експериментът "$\mathcal{B}_2$" **е по-фин** от "$\mathcal{B}_1$", понеже има повече събития. Еквивалентно може да кажем, че експериментът "$\mathcal{B}_1$" **е по-груб** от "$\mathcal{B}_2$".

В математически план, може да забележим, че *в частично наредено-то множество на всички експери-менти* $\mathcal{B} \subseteq \boldsymbol{Events}$ *има най-малък елемент*: *това е булевата подалгеб-ра* (4.3); *освен това,* атоми *на то-ва частично наредено множество са* минималните *експерименти* (4.4).

Оказва се още, че: *в частично наредe-ното множество на всички експеримен-ти съществуват инфимумите на произ-волни подмножества. Наистина*: това е сечението на съответните булеви подалгебри, което е отново булева подалгебра, понеже при сечението необходимите тъждества на дистрибутивност ще останат изпълнени. В частност, имаме решетъчна операция $\wedge$ за булеви подалгебри, която съвпада с теоретико-множественото им сечение. Обаче, *сюпремумите и в частност, операция-та* $\vee$*, не съществуват, в общия случай, в множеството на експерименти-те. Всъщност, това се случва тогава и само тогава, когато орто-решетката* $\boldsymbol{Events}$ *не е дистрибутивна. Наистина*: ако съществуваха всички сюпремуми, то сюпремумът

на фамилията от всички булеви подалгебри от вида (4.4) би трябвало да бъде цялата орто-решетка ***Events***, а тя не е булева алгебра.

4.4 Комутируемост и съвместна измеримост

Дистрибутивността макар, че се нарушава за общи събития, продължава да играе ключова роля и при квантови системи. Причината за това е, че събития, които се наблюдават в общ експеримент изпълняват дистрибутивния закон, понеже се подчиняват на класическата логика. Следователно, нарушаването на дистрибутивността за набор от събития показва, че те не могат да се наблюдават в общ експеримент. Покъсно, в следствие на проекционния постулат ще покажем, че тази невъзможност за общо измерване (проверяване) има и друг аспект – нарушаването на закона на Бейс. В следствие на това, имаме ще зависи-

мост от реда на проверка (измерване), т.е., некомутируемост.

На този етап, нека въведем следното определение: събитията $P_\alpha \in \boldsymbol{Events}$ от една фамилия ще наричаме **съвместно проверяеми** (**съвместно измерими**), ако съществува експеримент, който включва всичките. С други думи, това се случва когато всички P_α се съдържат в една обща булева подалгебра на орто-решетката $\boldsymbol{Events}$. В контекста на теория на орто-решетките в този случай се използва термина "(**взаимно**) **комутиращи елементи**".

Тук е първия важен момент, в който условието за *ортомодуларност* (3.33) започва да играе по-съществена роля. Всъщност, това условие е равносилно на съвсем естественото очакване, че: *ако P и Q са събития, такива че $P \preccurlyeq Q$, тогава P и Q са съвместно измерими.* За целта е нужно да се провери, че в този случай

множеството

$$\{\mathbf{0}, P, Q, P^{\perp}, Q^{\perp}, P \wedge Q^{\perp}, P^{\perp} \vee Q, \mathbf{1}\} \tag{4.6}$$

е булева подалгебра на орто-решетката на събитията ***Events***. Проверката използва тъждествата от групата (3.23)–(3.30) и (3.33) и я оставяме за упражнение на читателя.

Централна теорема за понятието съвместна измеримост е следната теорема, която ще приведем на готово: *В орто-модуларна решетка една фамилия от елементи* комутират съвместно *тогава и само тогава, когато комутират два по два.* За случая на орто-решетката на събитията ***Events*** теоремата се перифразира, като: *събитията от една фамилия са съвместно измерими, тогава и само тогава, когато всеки две от тях са съвместно измерими.*

4.5 Дизюнктивни събития, разбивания на единицата и на събития

Събитията $Q_1, \ldots, Q_r \in \boldsymbol{Events}$ наричаме **дизюнктивни**, ако изпълняват следните условия:

- $Q_1, \ldots, Q_r$ са съвместно проверяеми (което определихме в предната точка),
- $Q_j \wedge Q_k = \mathbf{0}$, за всеки $1 \leqslant j < k \leqslant r$.

С други думи, $Q_1, \ldots, Q_r$ са дизюнктивни, ако са ***взаимно изключващи се*** събития, което изисква, в частност, да са съвместно измерими. За класически системи всички събития са съвместно измерими, така че там за дизюнктивността остава само второто условие по-горе.

Когато правим решетъчно обединение "$\vee$" на дизюнктивни събития ние ще отбелязваме това с допълни-

телен знак "$\overset{\bullet}{\vee}$". Така,

$$R = Q \overset{\bullet}{\vee} P$$

$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} R = Q \vee P\,, \\ \mathbf{0} = Q \wedge P\,, \\ Q \text{ и } P \text{ са съвместно} \\ \qquad\qquad \text{проверяеми} \end{array} \right\} Q \text{ и}$$
$$\text{диз}$$
$$\text{тив}$$

т.е., равенството $R = Q \overset{\bullet}{\vee} P$ изразява просто обикновеното решетъчно обединение, $R = Q \vee P$, с допълнителното твърдение за дизюнктивност. В теория на множествата аналогично се означава дизюнктивното обединение:

$$S = T \overset{\bullet}{\cup} U \quad \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{l} S = T \cup U\,, \\ \emptyset = T \cap U\,, \end{array} \right. \tag{4.8}$$

където S, T, U са множества.

Означението (4.7) се обобщава и за дизюнктивни обединения на повече събития,

$$R = Q_1 \overset{\bullet}{\vee} \cdots \overset{\bullet}{\vee} Q_r \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} R = \\ = Q_1 \vee \cdots \\ Q_1 \ldots, Q_r \\ \text{дизюнктив} \end{array} \right. \tag{4.9}$$

Ако в допълнение към (4.9) имаме и условието, че събитията $Q_1 \ldots, Q_r$ са *ненулеви*, тогава казваме че (4.9) е **дизюнктивно разбиване на събитието** R, а когато $R = \mathbf{1}$, тогава говорим за **дизюнктивно разбиване на единицата**.

Забележете: *за произволни събития* P *и* Q *е в сила еквивалентността*

$$P \text{ и } Q \text{ са дизюнктивни} \iff Q \preccurlyeq \tag{4.10}$$

както и това, че

$$\mathbf{1} = P \overset{\bullet}{\vee} P^{\perp}, \tag{4.11}$$

което е разбиване на единицата, ако $P \neq \mathbf{0}, \mathbf{1}$. Доказателството на тези твърдения оставяме за читателя, като упражнение.

До тук бяха математическите определения, сега ще дадем тяхното значение и интерпретация в квантовата теория. Те се изразяват от следното твърдение: *има* $1-1$ *съответствие между булевите подалгебри*

на орто-решетката на събитията **Events** *и разбиванията на единицата. То се определя по следния начин:*

(*a*) *Ако* $\mathcal{B}$ *е булева подалгебра на* **Events**, *тогава* атомите *на* $\mathcal{B}$ *са краен брой и задават разбиване на единицата.*

(*b*) *Ако* $1 = Q_1 \overset{\bullet}{\vee} \cdots \overset{\bullet}{\vee} Q_r$ *е разбиване на единицата, то съществува единствена булева подалгебра* $\mathcal{B}$ *на* **Events**, *за която* $\{Q_1, \cdots, Q_r\}$ *е множеството от атоми. Всъщност, тази булева подалгебра* $\mathcal{B}$ *може да се опише по-подробно: нека за всяка редица от* r *на брой нули или единици,*

$$\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^{\times r} \tag{4.12}$$

да положим,

$$S_{\underline{\varepsilon}} := Q_1^{(\varepsilon_1)} \vee \cdots \vee Q_r^{(\varepsilon_r)}\,,$$
$$Q_j^{(0)} := \mathbf{1}\,, \quad Q_j^{(1)} := Q_j \quad (j = 1, \ldots$$

Тогава търсената булева подалгебра $\mathcal{B}$ е съвкупността от всичките $S_{\underline{\varepsilon}}$ при всевъзможните 2^r на брой редици $\underline{\varepsilon}$ от нули и единици.

В термини на понятията от квантовата теория горното твърдение се изказва така. *Съществува $1-1$ съответствие между експериментите на една система и разбиванията на единицата: елементарните събития на всеки експеримент задават разбиване на единицата и обратно, всяко разбиване на единицата определя единствен експеримент, за който елементите на разбиването са елементарните му алтернативи.*

Полезни са и следните допълнителни твърдения:

(*c*) *Ако имаме верига*

$$0 = P_0 \preccurlyeq P_1 \preccurlyeq P_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq P_r = P_0 \neq P_1 \neq P_2 \neq \cdots \neq P_r \tag{4.14}$$

и положим

$$Q_j := P_j \wedge P_{j-1}^{\perp} \quad (j = 1, \ldots, r), \tag{4.15}$$

тогава

$$\mathbf{1} = Q_1 \overset{\bullet}{\vee} \cdots \overset{\bullet}{\vee} Q_r \tag{4.16}$$

е разбиване на единицата. Обратно, ако е зададено разбиване на единицата (4.16) *и положим* $P_0 := \mathbf{0}$,

$$P_j := Q_1 \overset{\bullet}{\vee} \cdots \overset{\bullet}{\vee} Q_j \quad (j = 1, \ldots, \tag{4.17}$$

тогава получаваме верига от типа (4.14).

(*d*) *Нека* $\mathcal{B}_1$ *и* $\mathcal{B}_2$ *са две булеви подалгебри на орто-решетката* ***Events****. Тогава*:

- *ако* $\mathcal{B}_1$ *и* $\mathcal{B}_2$ *имат едни и същи множества от атоми, то те съвпадат.*
- $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$, *тогава и само тогава, когато атомите на* $\mathcal{B}_1$ *се подразбиват от атомите на* $\mathcal{B}_2$.

При това, ако $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ са различни, то поне един атом на $\mathcal{B}_1$ ще се подразбива на повече от един атом на $\mathcal{B}_2$. В термини на понятията от квантовата теория можем да кажем че: *един експеримент е по-фин от друг експеримент, тогава и само тогава, когато елементарните събития на втория експеримент се подразбиват от елементарните събития на първия.*

Доказателствата на горните твърдения (a)–(d) ще дадем схематично в края на тази точка, като приложение.

Твърдение (c) се доказва с непосредствена проверка на условия, използвайки законите на съждителното смятане от точка 3.5.

За твърдение (a), най-напред, ако започнем да подреждаме атомите на $\mathcal{B}$ в редица $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r, \ldots,$ (независимо дали са безкрайно много и дори *неизброимо* много), то посредством полагането (4.17) полу-

чаваме строго растяща верига

$$\begin{aligned} 0 = P_0 &\preccurlyeq P_1 \preccurlyeq P_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq P_r \\ P_0 &\neq P_1 \neq P_2 \neq \cdots \neq P_r\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Тъй като всички такива вериги в ***Events*** имат ограничена дължина (поради аксиомата за крайност на системата от точка 3.8), то заключаваме, че множеството на атомите на $\mathcal{B}$ е крайно. Освен това, редицата (4.18) трябва да свърши в единичното събитие, в противен случай, ако $P_r \neq \mathbf{1}$, то $\mathbf{0} \neq P_r^{\perp} \in \mathcal{B}$ ще мажорира някакъв атом на $\mathcal{B}$, който ще е дизюнктивен (и следователно, различен) от всички изброени до тук атоми $Q_1, \ldots, Q_r$. Следователно, $P_r = \mathbf{1}$ за някое $r \geqslant 1$ и по твърдение (c) завършваме доказателството на (a).

За доказателство на твърдение (d), първо да забележим, че всяка булева подалгебра $\mathcal{B}$ на ***Events*** ще е винаги крайна, понеже съгласно (a), $\mathcal{B}$ ще има краен брой атоми и следователно, елемент на $\mathcal{B}$ ще се представя и характеризира еднозначно, като разбиване на атоми на $\mathcal{B}$. Тогава, ако две булеви подалгебри имат едни и същи множества от атоми, то те ще съвпадат. Следователно, ако имаме $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ две булеви подалгебри на ***Events***, такива че $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$, тогава атомите на $\mathcal{B}_1$ ще се съдържат в $\mathcal{B}_2$. Така, атомите на $\mathcal{B}_1$ ще се подразбиват на атомите на $\mathcal{B}_2$.

Относно твърдение (b). Първо, конструираните събития $S_{\underline{\varepsilon}}$ ще се съдържат във всяка булева подалгебра на ***Events***, която съдържа $Q_1, \ldots, Q_r$. Освен това, съвкупността от всички $S_{\underline{\varepsilon}}$ е булева подалгебра: за целта се уверяваме че логическите операции се прехвърлят по компонентно върху редиците:

$$
\begin{aligned}
S^{\perp}_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)} &= S_{(\textit{не}\,\varepsilon_1,\ldots,\textit{не}\,\varepsilon_r)}\,, \\
S_{(\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_r)} \wedge S_{(\varepsilon''_1,\ldots,\varepsilon''_r)} &= S_{(\varepsilon'_1\ \textit{и}\ \varepsilon''_1,\ldots,\varepsilon'_r\ \textit{и}\ \varepsilon''_r)}\,, \\
S_{(\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_r)} \vee S_{(\varepsilon''_1,\ldots,\varepsilon''_r)} &= S_{(\varepsilon'_1\ \textit{или}\ \varepsilon''_1,\ldots,\varepsilon'_r\ \textit{или}\ \varepsilon''_r)} \\
S_{(\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_r)} \preccurlyeq S_{(\varepsilon''_1,\ldots,\varepsilon''_r)} &\Leftrightarrow \quad \varepsilon'_j \leqslant \varepsilon''_j \quad (\forall\, j)\,,
\end{aligned}
$$

където в дясната страна стоят стандартните интерпретации на логическите операции "*не*", "*и*" и "*или*" в множеството $\{0,1\}$. От последния ред на (4.19) следва, че $Q_1, \ldots, Q_r$ са атомите на така конструираната булева подалгебра, понеже

$$
Q_j \;=\; S_{(0\ ,\ \ldots\ ,\ 0\ ,\ \underbrace{1}_{j}\ ,\ 0,\ \ldots\ ,\ 0)}\,. \qquad (4.20)
$$

Всяка друга булева подалгебра $\mathcal{B}'$, която съдържа $Q_1, \ldots, Q_r$ ще съдържа и горната, и съгласно твърдение (d) поне някое Q_j ще престане да бъде атом в $\mathcal{B}'$ (и ще се подразбие на повече от един атоми на $\mathcal{B}'$).

4.6 Максимални експерименти, разбивания на единицата и на събития

Специален интерес представляват *максималните* елементи в частично наредената множество на всички експерименти: това са **максималните експерименти**. С други думи, всеки такъв експеримент дава максимална възможна информация за системата, която може да извлечем от нашите наблюдения.

Математически, максимален експеримент се определя от максимална булева подалгебра на орторешетката на събитията $\boldsymbol{Events}$. От друга стрна, твърдение (d) от предходната точка ни дава прост критерий, *кога една булева подалгебра* $\mathcal{B}$ *на* $\boldsymbol{Events}$ *е максимална*: *последното се случва тогава и само тогава, когато атомите на* $\mathcal{B}$ *са и атоми на* $\boldsymbol{Events}$. *Наистина*, в

този и само в този случай атомите на $\mathcal{B}$ няма да могат да се подразбиват допълнително в $\boldsymbol{Events}$.

Полученият резултат, изказан с понятията на квантовата теория гласи, че: *един експеримент е максимален, тогава и само тогава, когато елементарните събития на този експеримент са елементарни събития и на цялата система.*

Последният резултат може да се изкаже и така: *максималните експерименти са в* $1-1$ *съответствие с разбиванията на единицата на елементарни събития* (*на системата*).

От тук получаваме една проста конструкция на максимален експеримент. Използвайки на няколко стъпки аксиомата за атомарност от точка 3.8, ние започваме от *елементарно* събитие $Q =: Q_1$. Ако, $Q_1 = \mathbf{1}$, то значи $\boldsymbol{Events} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ и това е и максималната булева подалгебра. Ако, $Q_1 \neq \mathbf{1}$, то $Q_1^{\perp} \neq \mathbf{0}$ и следователно, съществува елементарно събитие

$Q_2 \preccurlyeq Q_1^\perp$ – това е втората стъпка. Продължавайки с индукция по броя на стъпките $r = 1, 2, \ldots$, нека положим

$$\begin{aligned} P_1 &:= Q_1\,, \quad P_2 := Q_1 \vee Q_2\,, \quad \ldots \quad (4.2) \\ P_r &:= Q_1 \vee \cdots \vee Q_r\,, \\ 0 = P_0 &\preccurlyeq P_1 \preccurlyeq P_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq P_r\,, \\ P_0 &\neq P_1 \neq P_2 \neq \cdots \neq P_r\,. \end{aligned}$$

Ако $P_r \neq \mathbf{1}$, то $P_r^\perp \neq \mathbf{0}$ и съществува елементарно събитие $Q_{r+1} \preccurlyeq P_r^\perp$ – това е стъпка $r+1$. Ако $P_r = \mathbf{1}$, тогава това е последната стъпка и съгласно твърдение (c) на предходната точка ще получим разбиване на единицата на единицата на елементарни събития, и следователно ще получим и максимална булева подалгебра, т.е., максимален експеримент.

Обърнете внимание, ако орторешетката на събитията ***Events*** не е дистрибутивна, то няма единствен максимален експеримент. В противен случай ще излезе, че всички елементарни събития на системата са съвместно проверяеми, т.е.,

се съдържат в обща булева подалгебра, която няма какво друго да е освен цялата орто-решетка ***Events***. И така, за недистрибутивни орто-решетки на събития може да имаме различни "максимални информации". Това показва, че тези "максимални информации" никога не са *пълни*.

Приложение: допълнителни сведения от теория на решетките

Решетките могат да се въведат и като алгебрична структура, която се определя от операции и тъждества. По-подробно, в сила е следното твърдение ([Bi73, Chapt. I, Sect. 5, Theorem 8]): *ако в едно множество $\mathcal{T}$ са определени бинарни операции "$\wedge$" и "$\vee$", които изпълняват тъждествата за асоциативност* (3.23), *за комутативност* (3.24), *за поглъщането* (3.25) *и за идемпотентност* (3.26), *тогава ако определим бинарна релация "$\preccurlyeq$" по един от редовете във фла* (3.27), *то $\mathcal{T}$ ще се превърне в частично наредено множество, което е решетка и освен това, решетъчните операции на би-*

нарни инфимуми и супремуми ще съвпадат с отнапред зададените операции "$\wedge$" и "$\vee$", съответно.

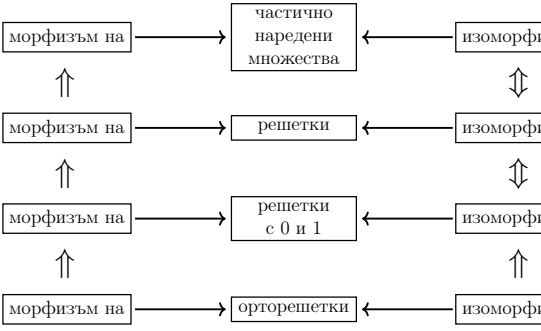
Като при всеки тип математическа структура, след определението й идва понятието за *морфизми*[58] на съответния тип структура.[59] **Морфизъм на частично наредени множества** $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ е такова изображение между тях, $\phi : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$, което запазва релациите на частична наредба: от $a \preccurlyeq b$ следва $\phi(a) \preccurlyeq \phi(b)$, за всеки $a, b \in \mathcal{T}_1$. Ако $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ са решетки, тогава едно изображение $\psi : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ се нарича **морфизъм на решетки**, ако запазва решетъчните операции: $\psi(a \wedge b) = \psi(a) \wedge \psi(b)$ и $\psi(a \vee b) = \psi(a) \vee \psi(b)$, за всеки $a, b \in \mathcal{T}_1$. Ако решетките имат $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, тогава за да бъде морфизмът на решетки $\psi : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ също и **морфизмът на решетки с нула и единица**, то е необходимо още да ги запазва: $\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и $\psi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. И накрая, когато сме в класа (категорията) на орторешетките, тогава едно изображение $\theta : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ е **морфизъм на орто-решетки**, ако е морфизъм на решетки с нула и единица и запазва допълненията: $\theta(a^\perp) = \theta(a)^\perp$.

Ако изображенията по-горе ϕ, ψ и θ са

[58] morphism

[59] на свой ред, това ни води до понятието за категория

биекции, то говорим за **изоморфизми**[60] на съответните типове структури. На фиг. 32 са дадени взаимовръзките между различните случаи на морфизми и изоморфизми.



фиг. 32: Взаимовръзка между различните категории морфизми

Като примери за решетки, освен степенното множество $\mathcal{P}(\Omega)$ нека посочим и

В решетка $\mathcal{T}$ с $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, може да се въведе общо понятие за **допълнение на елемент** $a \in \mathcal{T}$: това е такъв елемент $b \in \mathcal{T}$, за който $a \wedge b = \mathbf{0}$ и $a \vee b = \mathbf{1}$. В общия случай обаче,

[60] isomorphism

такъв елемент b обаче може както да не съществува, така и да не е единствен. **Решетка с допълнения**[61] е решетка с $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, в която всеки елемент има поне едно допълнение. По такъв начин, орто-решетките, които въведохме в точка 3.4 са решетки с допълнение, в които има "избрано" допълнение.

Jordan-Hölder chain condition

Имаме следното твърдение: *В орто-модуларна решетка $\mathcal{T}$ за всеки $a,\ b \in \mathcal{T}$ имаме: $a \vee b$ покрива b тогава и само тогава, когато $(a \vee b) \wedge b^{\perp}$ е елементарно събитие.*

За доказателството в права посока, да предположим, че $c \preccurlyeq (a \vee b) \wedge b^{\perp}$, тогава $b \preccurlyeq c \vee b \preccurlyeq \big((a \vee b) \wedge b^{\perp}\big) \vee b \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (b^{\perp} \vee b) = a \vee b$ (където в предпоследното неравенство използвахме (3.32)). И така, $b \preccurlyeq c \vee b \preccurlyeq a \vee b$ и от първата формулировка на закона за покриването имаме, че $b = c \vee b$ или

[61] complemented lattice

$a \vee b \preccurlyeq c \vee b$. Ако $b = c \vee b$, то $c \preccurlyeq b$ (втората от ф-ли (3.29)) и понеже първоначално имахме $c \preccurlyeq (a \vee b) \wedge b^{\perp} \preccurlyeq b^{\perp}$, то следва че $c = \mathbf{0}$. Ако $a \vee b = c \vee b$, тогава, започвайки от началното предположение за c, $c \preccurlyeq (a \vee b) \wedge b^{\perp}$ имаме, че $c \preccurlyeq b^{\perp}$ и тогава от закона за орто-модуларност (3.33) имаме: $c = (c \vee b) \wedge b^{\perp} = (a \vee b) \wedge b^{\perp}$.

В обратната посока, нека предположим че $(a \vee b) \wedge b^{\perp}$ е елементарно събитие и да докажем, че $a \vee b$ покрива b. Нека $b \preccurlyeq d \preccurlyeq a \vee b$. Тогава $d \wedge b^{\perp} \preccurlyeq (a \vee b) \wedge b^{\perp}$ и понеже $(a \vee b) \wedge b^{\perp}$ е елементарно събитие, то $d \wedge b^{\perp} = \mathbf{0}$ или $d \wedge b^{\perp} = (a \vee b) \wedge b^{\perp}$. Ако $d \wedge b^{\perp} = \mathbf{0}$, то $d \preccurlyeq b$, но понеже имахме и обратното, $b \preccurlyeq d$, то $d = b$. Ако $d \wedge b^{\perp} = (a \vee b) \wedge b^{\perp}$, то започвайки със закона за орто-модуларност имаме $d = (d \wedge b^{\perp}) \vee b = \big((a \vee b) \wedge b^{\perp}\big) \vee b = a \vee b$ (накрая отново използвайки закона за орто-модуларност).