

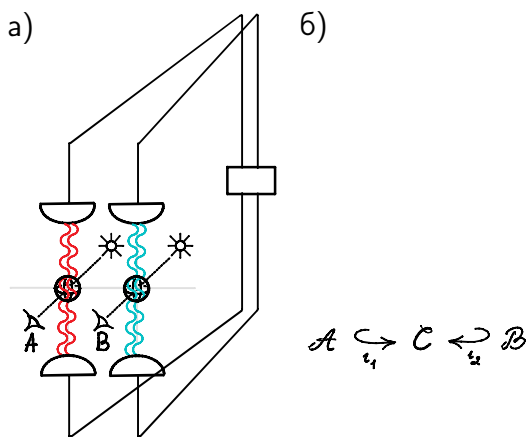
8 Съставни системи. Квантово сплитане. Неравенства на Бел

8.1 Обща постановка на съставна система

Започваме следващия раздел в аксиоматиката на квантовата теория: това е статистиката на съставни системи.

Най-напред ще въведем началната, илюстративна постановка. В по-голямата част на тази лекция ние ще се концентрираме на примера на система от два квантови бита (два кубита). Общият случай на комбиниране на две системи се получава с непосредствено обобщение. За комбинирането на повече от две системи ще споменем в по-следващата лекция, като просто следствие от асоциативността на конструкцията.

В по-предните лекции ние дадохме една илюстративна схема на система от един квантов бит. Тази схема непосредствено се обобщава за два и повече кубити. Например, на долната фигура сме разгледали случая на два кубита, а в по-следващата лекция ще разширим тази схема до произволен брой.



фиг. 56: Начална постановка на съставна система от два квантови бита:

- а) примерна (илюстративна) физическа постановка;
- б) математическа постановка.

На фиг. 56 а) е дадена примерна

(илюстративна) физическа реализация на система от два кубита. Фактически, това е схема на квантов компютър с два кубита. Както преди, микро-частици се удържат в малки области на пространството с помощта на вертикално означени сили (електромагнитни) полета, които формират и манипулират състоянието им. В хоризонтално направление са изобразени източници, които въздействат на микро-частиците и след това детектори измерват отклика на частиците. Това е измерване на състоянието на частиците. За всяка от двете микро-частици ние измерваме едно-кубитни наблюдаеми, A и B , съответно. Това ни води до математическата постановка, която е изобразена с диаграмата на фиг. 56 б). Нека първия и втория кубит ги наречем условно кубит (или, система) “ a ” и кубит “ b ”, а техните алгебри на наблюдаемите да означим с $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, съответно. В конкретния пример, понеже системите “ a ” и “ b ” са

и двете кубити, то алгебрите $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ще са изоморфни на матричната алгебра $Mat_2(\mathbb{C})$ на 2×2 -комплексни матрици и всъщност, ние ще считаме $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ за две копия на $Mat_2(\mathbb{C})$. Ако съставната система от двата кубита наречем системата “с” и нейната алгебра на наблюдаемите означим с $\mathcal{C}$, то естествено е да очакваме, че системите “а” и “b” ще са подсистеми на “с”. Съгласно по-предната лекция, математически това означава, че $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са $*$ -подалгебри с единица на $\mathcal{C}$. Последното също може да се каже така: $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ се влагат в $\mathcal{C}$ с морфизми на $*$ -алгебри с единица, които са означени на фиг. 56 б) с ι_1 и ι_2 , съответно.

Има две аксиоматични изисквания за $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, като подалгебри на $\mathcal{C}$. Първото е, че всяка наблюдаема на системата “а” трябва да е *съвместно измерима* с всяка наблюдаема на системата “b”. Съгласно по-предната лекция, това означава, че подалгебрите $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ комутират поелементно в

C. Това изискване е мотивирано от представата ни, че когато комбинираме две системи в една обща система, всяко измерване (или, наблюдение) над едната система може да извърши съвместно с всяко измерване над другата система без да се смущават взаимно. От друга страна, това не изключва възможността двете системи да взаимодействат помежду си и да си влияят, а единствено предполага, че може да извършваме измервания над съчетаните системи, които не се влияят взаимно.

Второто аксиоматично изискване цели да изрази факта, че системата “*c*” е съставена единствено от “*a*” и “*b*”, тъй като по-нататък ние може да добавим и още системи. Например, в случая на фиг. 56 ние искаме да опишем система на точни два кубита, а не на три или повече. Математически, това се изразява от изискването, че подалгебрите *A* и *B* пораждат алгебрически алгебрата *C*, т.е., *A* и *B* пораждат *C* при последователното

прилагане на всевъзможните алгебрични операции: сума, произведение, спрягане.

И така, да запишем сумарно получената аксиома:

Аксиома за съставна система.

Ако две квантови системи се задават от алгебри на наблюдаеми $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, съответно, то при разглеждането им, като една обща, съставна квантова система с алгебра на наблюдаемите $\mathcal{C}$, то $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ се влагат, като $*$ -подалгебри с единица в $\mathcal{C}$, като при това образите им комутират поелементно в $\mathcal{C}$ и също алгебрически пораждат $\mathcal{C}$.

8.2 Тензорно произведение и произведение на Кръонекер

Предната точка завършихме с аксиомата за статистиката на съставна система. Удивително е, че тя напълно фиксира какво трябва да е

описанието на получената система. По-точно, за всеки две алгебри на наблюдаемите $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ съществува алгебра на наблюдаемите $\mathcal{C}$, която изпълнява тази аксиома и при това $\mathcal{C}$ е единствена, съвместно с посочените в нея образи на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, с точност до изоморфизъм. Конструкцията на $\mathcal{C}$ от $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ се нарича **тензорно произведение** на алгебри. Тази конструкция е основана на една побазисна конструкция, която е отново тензорно произведение, но на общи линейни пространства. Тази конструкция е в основата на т.нар. “полилинейна алгебра”. Оказва се, че в крайно-мерния случай, който е от главен интерес в нашия курс има една проста координатно (т.е., матрично) построение на тензорното произведение, наречено: **произведение на Кръонекер**. В тази и в следващите две точки ще дадем главните сведения от математическата теория на тензорните произведения, адаптирани за нуждите на настоящия курс.

След това, в точка 8.5 ние ще се върнем към въпроса как точно тензорното произведение задава модела на аксиомата за съставни системи.

За простота, ние ще произведението на Кръонекер опишем тук за два конкретни случая, като обобщението се вижда непосредствено:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}}_\Phi \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}_\Psi = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \psi_1 \\ \phi_1 \psi_2 \\ \phi_2 \psi_1 \\ \phi_2 \psi_2 \end{pmatrix}}_{\Phi \otimes \Psi} \quad (8.1)$$

Така, произведението на Кръонекер е определено без ограничение за всякакви правоъгълни матрици: ако умножаваме по Кръонекер две матрици с размери $n \times m_1$ и $n_2 \times m_2$, то резултата е матрица с размер $n_1 n_2 \times m_1 m_2$. Получената матрица има бло-

чен строеж, формиран от поставянето на втората матрица, като блок, във всички позиции на първата матрица, с доумножаване по коефициентите, стоящи в съответните позиции.

По нататък в настоящия курс ние ще отъждествяваме тензорното произведение с произведението на Крьонекер, макар че последното е определено само за линейни пространства от матрици. Това е защото ние вече приехме, че нашите алгебри на наблюдаеми ще са винаги матричните алгебри, както и че векторите на състояния ще са винаги вектор-стълбове (т.е., пак матрици).

8.3 Свойства на тензорното произведение

Основно свойство:

$$\begin{aligned}(A \otimes B)(A' \otimes B') &= (AA') \otimes (BB'), \\ (A \otimes B)(\Phi \otimes \Psi) &= (A\Phi) \otimes (B\Psi),\end{aligned}\tag{8.2}$$

за $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ и $\Phi, \Psi \in \mathbb{C}^n$.
 Всъщност, горните двете формули са частен случай на формула с общи правоъгълни матрици, като матричното произведение в лявата страна е винаги определено, когато и матричното произведение в дясната страна е определено.

Оттук следва, че

$$\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \quad \text{и}$$

$$\text{Mat}_2(\mathbb{C}) \otimes \text{Mat}_2(\mathbb{C}) = \text{Mat}_4(\mathbb{C}).$$

В частност, при тензорното произведение на стандартните базиси в $\mathbb{C}^2$ получаваме стандартния базис в $\mathbb{C}^4$:

$$e'_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0 \otimes e_0 ,$$

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv e_0 \otimes e_1 ,$$

$$e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_1 \otimes e_0 ,$$

$$e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv e_1 \otimes e_1 ,$$

което ще използваме основно в квантовите изчисления по-нататък.

За спрежението (ермитовото спрягане) имаме формулата:

$$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*, \quad (8.3)$$

която е в сила за произволни правоъгълни матрици. Обръщаме внимание, че във ф-ла (8.3) *няма обръщане на реда* на тензорното произведение.

Скаларното произведение в тензорно произведение на Хилбертови пространства се дава от формулата:

$$\langle \Phi \otimes \Psi | \Phi' \otimes \Psi' \rangle = \langle \Phi | \Phi' \rangle \langle \Psi | \Psi' \rangle. \quad (8.4)$$

Последната формула може да се изведе в случая, когато я прилагаме в тензорното произведение на хилбертовите пространства $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{nm}$, които имат “стандартно” скаларно произведение. *Наистина*, заместяваме лявата страна в (8.4) с определението на скаларното произведение в $\mathbb{C}^{nm}$ и преработваме:

$$(\Phi \otimes \Psi)^* (\Phi' \otimes \Psi')$$

$$\begin{aligned}
&= (\Phi^* \otimes \Psi^*)(\Phi' \otimes \Psi') \\
&= (\Phi^* \Phi) \otimes (\Psi^* \Psi'), \quad (8.5)
\end{aligned}$$

достигайки до дясната страна в (8.4) (забележете, че в крайния израз в (8.5) знака за тензорно произведение може да се изпусне, понеже тензорното произведение на числа е съвпада с числовото умножение). Нека отбележим в допълнение, че при тензорно произведение абстрактни хилбертови пространства, ф-ла (8.4) не се доказва, а става определение на скаларното произведение в тензорното произведение.

8.4 Разложими и неразложими елементи на тензорни произведения. Квантовото сплитане

Както завършихме в последната точка, ф-ла (8.4) дава определение за скаларно произведение, когато работим с абстрактни хилберто-

ви пространства, а не с пространствата $\mathbb{C}^n$, които имат избран ортонормиран базис и координати. Имам обаче известна тънкость, когато възприемаме формули от типа на (8.4), като определения. *Общият вид на вектор (елемент) в едно тензорно произведение на линейни пространства не е тензорно произведение на два вектора, като например $\Phi \otimes \Psi$.* Такива вектори (елементи) в тензорно произведение се наричат **разложими**. Така, с други думи, не всички елементи на тензорно произведение са разложими елементи. Има и **неразложими елементи**: това са такива, които винаги се представят в сума от поне два ненулеви разложими елемента.

И така, първата тънкость във формули от типа на (8.4), когато се възприемат като определения, е че те са зададени само за разложими елементи, а не за произволни. Тогава следва тези формули по-нататък да се разпространят по линейност

за произволни, неразложими елементи. Това е възможно, понеже разложимите елементи линейно пораждат цялото тензорно произведение. Тук обаче идва следваща тънкость. Множеството на разложимите елементи не е линейно независимо: в него има линейни съотношения:

$$\begin{aligned} & \Phi \otimes (\alpha_1 \Psi_1 + \alpha_2 \Psi_2) \\ &= \alpha_1 \Phi \otimes \Psi_1 + \alpha_2 \Phi \otimes \Psi_2, \\ & (\alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2) \otimes \Psi \\ &= \alpha_1 \Phi_1 \otimes \Psi + \alpha_2 \Phi_2 \otimes \Psi, \end{aligned} \quad (8.6)$$

за произволни елементи Φ , Φ_1 , Φ_2 , Ψ , Ψ_1 и Ψ_2 на тензорно умножаваните линейни пространства и за произволни числа α_1 и α_2 . Това са всъщност съотношенията за билинейност или също, разделна линейност, на тензорното произведение. За щастие, оказва се, че горните съотношения за билинейност са единствените линейни зависимости, или както се казва в теорията на тензорните произведения: тензорното произведение е универсална билинейна операция. На

практика, последното означава, че ако зададем като определение едно равенство само за разложими елементи, то се разпространява еднозначно и коректно по линейност за произволни елементи, стига дясната му страна да е разделно линейна по тензорните множители използвани в разложимите елементи в лявата страна. Това свойство е налице във ф-ла (8.4): дясната страна е разделно линейна Φ' и Ψ' (както и по Φ^* и Ψ^* , т.е., е анти-линейна по Φ и Ψ , заедно с лявата страна). Същият принцип се използва и при доказване на твърдения: достатъчно е те да се установят само за разложими елементи, ако имаме навсякъде в изразите разделна линейност по множителите в тези разложими елементи.

Така, виждаме, че разложимите елементи на тензорните произведения играят фундаментална роля в математическата теория. В квантовата теория и във физиката обаче, фундаментална роля ще играят не-

разложимите елементи: тях ще ги наречем сплетени, например, сплетени състояния. В следващите точки ще видим защо това е така.

8.5 Как тензорното произведение дава модел на аксиомата за квантови съставни системи

След като въведохме операцията тензорно произведение да видим, как точно с нейна помощ се реализира аксиомата за съставна система от края на точка 8.1. Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са алгебрите на наблюдаемите на двете системи, които се съчетават в една, то алгебрата на съставната система очакваме да е тяхното тензорно произведение

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

Трябва да уточним обаче, как се влагат $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в $\mathcal{C}$, като $*$ -алгебри с единица, т.е., $\mathcal{A} \xhookrightarrow{\iota_1} \mathcal{C} \xhookleftarrow{\iota_2} \mathcal{B}$. Това се

дава с формулите

$$\begin{aligned}\iota_1(A) &:= A \otimes \hat{1} := A_{(1)} \in \mathcal{C}, \\ \iota_2(B) &:= \hat{1} \otimes B := B_{(2)} \in \mathcal{C},\end{aligned}\quad (8.7)$$

за наблюдаеми $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$.
Диаграмно, това се изразява също така:

$$\begin{array}{ccccc} & & \iota_1(A) =: A_{(1)} & & \\ & & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \\ A & \mapsto & A \otimes \hat{1} & & \\ \mathcal{A} & \xhookrightarrow{\iota_1} & \mathcal{C} & \xleftarrow{\iota_2} & \mathcal{B} \\ & & \hat{1} \otimes B & \longleftarrow & B \\ & & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \\ & & \iota_2(B) =: B_{(2)} & & \end{array} \quad (8.8)$$

Като пример, за системата от два кубита имаме:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 & a_{11} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 \\ a_{11} \cdot 0 & a_{11} \cdot 1 & a_{12} \cdot 0 & a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 & a_{21} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 \\ a_{21} \cdot 0 & a_{21} \cdot 1 & a_{22} \cdot 0 & a_{22} \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

когато “потопяваме” 2×2 -матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \quad (\equiv \mathcal{A}),$$

като 4×4 -матрица $A_{(1)}$ от страна на първия кубит и аналогично:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot b_{11} & 1 \cdot b_{12} & 0 \cdot b_{11} & 0 \cdot b_{12} \\ 1 \cdot b_{21} & 1 \cdot b_{22} & 0 \cdot b_{21} & 0 \cdot b_{22} \\ 0 \cdot b_{11} & 0 \cdot b_{12} & 1 \cdot b_{11} & 1 \cdot b_{12} \\ 0 \cdot b_{21} & 0 \cdot b_{22} & 1 \cdot b_{21} & 1 \cdot b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

когато “потопяваме” 2×2 -матрицата

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \quad (\equiv \mathcal{B}),$$

като 4×4 -матрица $B_{(2)}$ от страна на втория кубит.

Тогава имаме:

$$A_{(1)}B_{(2)} = B_{(2)}A_{(1)} = A \otimes B, \quad (8.9)$$

което следва от пресмятането:

$$A \otimes B$$

$$\begin{aligned}
&= (A.\hat{1}) \otimes (\hat{1}.B) = (A \otimes \hat{1})(\hat{1} \otimes B) \\
&= (\hat{1}.A) \otimes (B.\hat{1}) = (\hat{1} \otimes B)(A \otimes \hat{1}).
\end{aligned}$$

И така, равенство (8.9) беше първото аксиоматично условие за влаганията ι_1 и ι_2 (т.е., образите на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ да комутират поелементно в $\mathcal{C}$). Второто аксиоматично условие беше образите на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ да пораждат алгебрически $\mathcal{C}$. Но произведенията $A_{(1)}B_{(2)}$ на елементите от $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ след влагането (“потопянето”) им $\mathcal{C}$ са *разложимите* елементи $A \otimes B$ на $\mathcal{C}$, които, както вече отбелязвахме, линейно пораждат всички останали елементи на $\mathcal{C}$.

С това, установихме, че модела на тензорното произведение наистина реализира аксиомата за съставни системи.

8.6 Независимост на измерванията над отделните подсистеми в съставна в несплетени състояния

Както е естествено да се очаква, ако направим измервания на наблюдаеми за отделните подсистеми в една съставна, то те ще се окажат независими, но при условие, че състоянието в което са направени е несплетено. Това идва от следното общо свойство на следата:

$$\text{Tr} A \otimes B = \text{Tr} A \text{Tr} B \quad (8.10)$$

за квадратни матрици A и B . Например,

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) \\ & \equiv \text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11} b_{11} + a_{11} b_{22} + a_{22} b_{11} + a_{22} b_{22} \\
&= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) \\
&= \text{Tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{Tr} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Следователно, всеки състояния на отделните подсистеми с матрици на плътността, съответно, $\hat{\rho}_1$ и $\hat{\rho}_2$ водят до състояние с матрица $\hat{\rho} := \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$, така че за всеки две наблюдаеми на подсистемите, A и B , имаме:

$$\langle A \otimes B \rangle_{\rho} \equiv \langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\rho} = \langle A \rangle_{\rho_1} \langle B \rangle_{\rho_2}, \quad (8.11)$$

което именно, съгласно теория на вероятностите изразява това, че $A_{(1)}$ и $B_{(2)}$ са независими наблюдаеми, когато се измерват в несплетеното състояние ρ .

Нека да видим как се съчетават сега чистите състояния. За простота нека пак се концентрираме за система от два кубита с хилбертово пространство на състоянията $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Матрицата на едно чисто, дву-

кубитно състояние е $\hat{\rho} \in \text{Mat}_4(\mathbb{C})$, която е от вида $\hat{\rho} = \Theta \Theta^*$ за единичен вектор $\Theta \in \mathbb{C}^4$. В специалния случай, когато $\Theta = \Phi \otimes \Psi$ имаме:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \Theta \Theta^* = (\Phi \otimes \Psi)(\Phi \otimes \Psi)^* \\ &= (\Phi \otimes \Psi)(\Phi^* \otimes \Psi^*) \\ &= (\Phi \Phi^*) \otimes (\Psi \Psi^*) \\ &= \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2,\end{aligned}$$

което е именно случая от по-горе на несплетени състояния.

Специално за дву-кубитния случай имаме прост критерий за несплетеност на вектор на състояние: следното неравенство

$$\begin{aligned}\Theta &= \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} \neq \Phi \otimes \Psi \\ &= \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \psi_1 \\ \phi_1 \psi_2 \\ \phi_2 \psi_1 \\ \phi_2 \psi_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

е винаги изпълнено, тогава и само

ТОГАВА, КОГАТО

$$\theta_1\theta_4 \neq \theta_2\theta_3.$$

Например,

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\Theta &:= e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

дава вектор Θ на сплетено състояние.

8.7 Квантови корелации на Бел

Да разгледаме вектора на състояние

$$\Theta := \frac{1}{\sqrt{2}} (e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

и за две едно-кубитни наблюдаеми,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

и да пресметнем в него следните средни стойности: на $A_{(1)}$ в Θ ,

$$\begin{aligned}
& \langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{22} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22})
\end{aligned}$$

на $B_{(2)}$ в Θ :

$$\begin{aligned}
& \langle B_{(2)} \rangle_{\Theta} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} (b_{11} + b_{22})
\end{aligned}$$

и на произведението на $A_{(1)} B_{(2)}$ в Θ :

$$\begin{aligned}
& \langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (a_{11} b_{11} + a_{22} b_{22} + a_{12} b_{21} + a_{21} b_{12})$$

Понеже състоянието е сплетено, $A_{(1)}$ и $B_{(2)}$ не са независими в Θ :

$$\langle A_{(1)} B_{(2)} \rangle_{\Theta} \neq \langle A_{(1)} \rangle_{\Theta} \langle B_{(2)} \rangle_{\Theta}$$

Оказва се обаче, че състоянието Θ поражда корелации между наблюдаемите на кубит “a” и кубит “b”, които са по-силни от класическите. За да покажем това, нека разгледаме матриците:

$$Z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+c & s \\ s & 1-c \end{pmatrix},$$

$$Z^{\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-c & -s \\ -s & 1+c \end{pmatrix},$$

които за $c = \cos \varphi$ и $s = \sin \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, задават събитие и неговото отрицание, съответно. Съгласно горните формули, получаваме нулева вероятност в състоянието Θ да се регистрира Z за кубит “a” и отрицанието на $X^{\perp}$ за кубит “b”:

$$\text{Prob}_{\Theta}(Z_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp}) \equiv \langle Z_{(1)} Z_{(2)}^{\perp} \rangle_{\Theta}$$

$$= \frac{1}{2} \left((1+c)(1-c) + (1-c)(1+c) - s^2 - s^2 \right) = 0$$

С други думи, при всеки избор на параметъра φ ако в състоянието Θ за двата кубита се тества паралелно събитието Z , то ще имаме пълен синхрон: какъвто е резултат за първия кубит (0 или 1), точно такъв ще бъде и за втория кубит.

След като имаме налице тази корелираност нека сега изчислим вероятности за други паралелни измервания. За целта, нека държим параметъра φ в Z все така произволен, но да въведем и два специални негови случая, които да наречем събитията X и Y , съответно:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{Z}(\varphi = 0) ,$$

$$Y := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \mathbb{Z}(\varphi = \frac{\pi}{2}) ,$$

Тогава, да пресметнем следните вероятности в състояние Θ . Първо, да се регистрира X за кубит “a” и да се регистрира не Y за кубит “b”:

$$\begin{aligned}\text{Prob}_{\Theta}\left(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^{\perp}\right) &\equiv \left\langle X_{(1)} Y_{(2)}^{\perp} \right\rangle_{\Theta} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 \right) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

После, да се регистрира Y за кубит “а” и да се регистрира не Z за кубит “b”:

$$\begin{aligned}\text{Prob}_{\Theta}\left(Y_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp}\right) &\equiv \left\langle Y_{(1)} Z_{(2)}^{\perp} \right\rangle_{\Theta} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} (1-c) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} (1-c) - \frac{1}{2} \frac{s}{2} - \frac{1}{2} \frac{s}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (1-s)\end{aligned}$$

И накрая, да се регистрира X за кубит “а” и да се регистрира не Z за кубит “b”:

$$\begin{aligned}\text{Prob}_{\Theta}\left(X_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp}\right) &\equiv \left\langle X_{(1)} Z_{(2)}^{\perp} \right\rangle_{\Theta} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 \cdot \frac{1}{2} (1-c) + 0 + 0 + 0 \right) = \frac{1}{4} (1-c)\end{aligned}$$

Тогава, нека да формираме следните неравенства, наречени **неравенства на Бел**:

$$\underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Y_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(Y_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}(1-s)}$$

$$\geq \underbrace{\text{Prob}_{\Theta}(X_{(1)} \text{ и } Z_{(2)}^{\perp})}_{\frac{1}{4}(1-c)} \quad \text{неравенства на Бел}$$

?

 $\geq$

$$\frac{1}{4}(1-c)$$

 $\Downarrow$

$$1 \geq \sin \varphi - \cos \varphi$$

 $\Downarrow$

$$\sin \frac{\pi}{4} \geq \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right)$$

Горните неравенства биха се изпълнявали, ако зад първоначално установения синхрон при регистрацията на еднакви събития за двата кубита стоеше класическа статистика. Те обаче се нарушават, ако параметър φ е в интервала $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.