

Приложение П. Основната структурна теорема, спектралната теорема и техните доказателства

В това приложение е дадено доказателството на основната структурна теорема за крайно-мерни, положителни $*$ -алгебри и спектралната теорема. В началото са включени, за пълнота и някои сведения от алгебрата, които са пряко използвани. Нека припомним условието на основната структурна теорема.

Теорема П.0.1. *Всяка крайно-мерна, положителна $*$ -алгебра $\mathcal{A}$ с единица може да се отъждестви с (е изоморфна на) $*$ -алгебрата на блочно-диагоналните матрици,*

$$\mathcal{A} \cong \text{Mat}_{k_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \text{Mat}_{k_m}(\mathbb{C}) \quad (\text{П.0.1})$$

за определени естествени числа $k_1, \dots, k_m$.

При доказателството на теорема П.0.1 ние ще използваме спектралната теорема, която за целта ще докажем предварително. Ето формулировката ѝ:

Теорема П.0.2. Нека $\mathcal{A}$ е крайно-мерна, положителна $*$ -алгебра с единица и $A \in \mathcal{A}$ е самоспрегнат елемент, $A = A^*$. Тогава съществува единствен краен, нареден набор от реални числа, $\alpha_1 < \dots < \alpha_s$ и единствена система от ортогонални проектори $P_1, \dots, P_s \in \mathcal{A}$, такива че се изпълняват $\hat{f}$ -ли

$$A = \sum_{\ell=1}^s \alpha_{\ell} P_{\ell}, \quad (\text{П.0.2})$$

$$P_k P_{\ell} = \begin{cases} P_k & \text{ако } k = \ell, \\ 0 & \text{ако } k \neq \ell, \end{cases} \quad (\text{П.0.3})$$

$$P_1 + \dots + P_s = \hat{1}. \quad (\text{П.0.4})$$

II.1 Сведения от теорията на пръстените и асоциативните алгебри

Алгебрите, от които ще се интересуваме в това приложение, ще бъдат основно *асоциативни алгебри*. Ето защо, за краткост ще ги наричаме само *алгебри*.

По определение, алгебра е векторно пространство, което е снабдено с допълнителна бинарна операция, наречена *произведение в алгебра*.

гебрата. Произведението е билинейно и асоциативно (виж. лекции 4 и 5). Ще означим с $\mathbb{K}$ полето над което разглеждаме алгебрите и ще предполагаме, освен ако не е уговорено друго, че $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ (полетата на комплексните и реалните числа).

По такъв начин, една алгебра е също така и *пръстен*. Напомняме, че пръстен е структура с две бинарни операции, събиране и умножение, като: (1) тези операции са асоциативни по отделно; (2) спрямо събирането пръстенът е комутативна (абелева) група; (3) умножението изпълнява дистрибутивните закони спрямо събирането. Така, това което липсва в пръстена за да се превърне в алгебра е операцията умножение по число, което да го превърне във векторно пространство. Ако обаче даден пръстен има *единица* $\hat{1}$ и съдържа, като подпръстен $\mathbb{K}.\hat{1}$, числовото поле $\mathbb{K}$, тогава той автоматично се превръща и в алгебра над $\mathbb{K}$. В последния случай, операцията умножение по число се поема в операцията на произведение в алгебрата, тъй като $\lambda.A = (\lambda\hat{1}).A$, където $\lambda \in \mathbb{K}$, а A е произволен елемент на алгебрата. Именно такава ситуация имаме в

пръстена на полиноми $\mathbb{K}[z]$ на една променлива z над числово поле $\mathbb{K}$ (т.е., с коефициенти в $\mathbb{K}$).

Аналогично на теория на пръстените, в теорията на алгебрите се въвеждат понятията за *морфизми*, *подалгебри* и *идеали*.

Морфизъм на алгебри $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ е линейно изображение, което изпраща произведение в произведение: $\phi(A_1 A_2) = \phi(A_1) \phi(A_2)$. Ако една алгебра $\mathcal{A}$ е подмножество на друга алгебра $\mathcal{B}$ по такъв начин, че естественото изображение на влагане $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ е морфизъм на алгебри, то казваме че $\mathcal{A}$ е **подалгебра** на $\mathcal{B}$.

Идеал в алгебра $\mathcal{A}$ е векторно подпространство J на $\mathcal{A}$, такова че

$$\begin{aligned} A \in J \text{ и } B \in \mathcal{A} \\ \Rightarrow AB, BA \in J. \end{aligned}$$

Последното се записва накратко и като

$$J\mathcal{A} \subseteq J, \quad \mathcal{A}J \subseteq J.$$

Горното понятие, понякога за по-голяма яснота се нарича също **двустранен идеал**, за да се отличи от по-общите ситуации на едностранни идеали, които биват *леви* и *десни*.

Ако $J \subseteq \mathcal{A}$ е идеал в алгебрата $\mathcal{A}$ (двустранен идеал), то върху фактор-пространството $\mathcal{A}/J$ има единствена бинарна операция на произведение, която превръща $\mathcal{A}/J$ в алгебра по такъв начин, че каноничната проекция $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/J$ е морфизъм на алгебри. Това ни води до понятието за **факто-алгебра**.

Когато един пръстен има единица и съдържа, като подпръстен $\mathbb{K}.\hat{1}$, числовото поле $\mathbb{K}$ (ситуация, за която споменахме по-горе), тогава понятията за идеал в смисъл на пръстени и в смисъл на алгебри съвпадат. В частност, такава е ситуацията с идеалите в алгебрата (или в пръстена) на полиноми $\mathbb{K}[z]$ над числово поле $\mathbb{K}$. В този случай, се наблюдава следното важно свойство: *всеки идеал в $\mathbb{K}[z]$ е главен идеал*. По-конкретно, ако $J \subseteq \mathbb{K}[z]$ е идеал, то съществува единствен полином $q(z) \in J$, който има старши коефициент 1 и е такъв, че е в сила:

$$p(z) \in J \quad \Leftrightarrow \quad q(z) \text{ дели } p(z). \quad (\text{II.1.5})$$

Пръстени, в които всички идеали имат горното свойство се наричат *области на главни идеали* (*principle ideal domains*).

П.2 Спектрална теорема в крайно-мерни, положителни $*$ -алгебри

Тук е изложено пряко доказателство на теорема П.0.2. По-нататък в тази подточка, $\mathcal{A}$ ще бъде крайно-мерна, положителна $*$ -алгебра с единица и $A \in \mathcal{A}$ ще бъде самоспрегнат елемент, $A = A^*$. Нека

$$J_A := \{q(z) \in \mathbb{C}[z] \mid q(A) = 0\}. \quad (\text{П.2.6})$$

Следователно, J_A е *идеал* в алгебрата на полиномите $\mathbb{C}[z]$ и съгласно (П.1.5), съществува единствен полином $q_A(z)$ със старши коефициент единица, такъв че

$$p(z) \in J_A \iff q_A(z) \text{ дели } p(z). \quad (\text{П.2.7})$$

Полиномът $q_A(z)$ се нарича **минимален полином на A** .¹

¹В случаите, когато $\mathcal{A}$ е матричната алгебра и A е матрица, минималният полином на A по принцип е различен от характеристичния полином на A , макар че все пак двата са тясно свързани. По-конкретно, за самоспрегнати матрици минималният полином има същите корени, като характеристичния полином, но с кратност единица. Това следва от лема П.2.3 по-долу.

Преди всичко, от $A = A^*$ следва, че $q_A(z)$ има реални коефициенти, т.е., $\overline{q_A}(z) (\equiv \overline{q_A(\bar{z})}) = q_A(z)$. Действително, $\overline{q_A}(A) = (q_A(A^*))^* = 0$ и следователно, $\overline{q_A}(z) \in J_A$, но $\overline{q_A}(z)$ има старши коефициент 1 и степента му е равна на степента на $q_A(z)$. Следователно, $\overline{q_A}(z) = q_A(z)$.

Съгласно основната теорема на алгебрата, ако $q_A(z)$ е полином от степен s , то $q_A(z)$ има s комплексни корена $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, евентуално с кратности.

Лема П.2.3. *Корените на $q_A(z)$ са реални и имат кратност 1, т.е., $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ са различни реални числа.*

Доказателство. Нека

$$q_{A,j}(z) := \frac{q_A(z)}{z - \alpha_j} \in \mathbb{C}[z] \quad (\text{П.2.8})$$

за $j = 1, \dots, s$. Това е полином от степен $s-1$ със старши коефициент 1. Следователно, $(A - \alpha_j)q_{A,j}(A) = q_A(A) = 0$, т.е.,

$$A q_{A,j}(A) = \alpha_j q_{A,j}(A), \quad (\text{П.2.9})$$

от където по индукция получаваме $A^k q_{A,j}(A)$

$= \alpha_j^k q_{A,j}(A)$, така че имаме:

$$p(A) q_{A,j}(A) = p(\alpha_j) q_{A,j}(A) \quad (\text{П.2.10})$$

за всеки полином $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ и $j = 1, \dots, s$.

Забележете, че по конструкция полиномите $q_{A,j}(z)$ имат свойството

$$q_{A,j}(\alpha_k) = 0 \quad \text{ако} \quad j \neq k, \quad (\text{П.2.11})$$

което ще играе многократно роля по-нататък.

Нека да докажем най-напред, че корените α_j са реални. За това е необходимо и достатъчно да покажем, че

$$q_{A,j}(\overline{\alpha_j}) \neq 0,$$

понеже, ако α_j е комплексен корен, който не е реален, то и $\overline{\alpha_j}$ ще бъде корен на $q_A(z)$ (тъй като последният е с реални коефициенти).

Отчитайки, че $q_{A,j}(A)^* = \overline{q_{A,j}}(A)$ имаме:

$$q_{A,j}(A)^* q_{A,j}(A) = \overline{q_{A,j}}(\alpha_j) q_{A,j}(A). \quad (\text{П.2.12})$$

Тогава, ако $q_{A,j}(\overline{\alpha_j}) = 0$ ($\Leftrightarrow \overline{q_{A,j}}(\alpha_j) = 0$), то лявата страна на (П.2.12) ще се анулира и съгласно условието за положителност на алгебрата ще следва, че $q_{A,j}(A) = 0$. От тук,

$q_{A,j}(z) \in J_A$, но $q_{A,j}(z)$ има степен по-малка от $q_A(z)$, което противоречи на минималността на q_A (и (П.2.7)).

И така, всички корени на $q_A(z)$ са реални и заедно с това и полиномите $q_{A,j}(z)$ са реални. Тогава повтаряйки горното разсъждение следва, че $q_{A,j}(\alpha_j) \neq 0$. Последното на свой ред означава, че $q_A(z)$ няма кратни корени.

Лема П.2.3 е доказана. $\square$

Лема П.2.4. *Нека да положим*

$$p_{A,j}(z) := \frac{q_{A,j}(z)}{q_{A,j}(\alpha_j)}, \quad (\text{П.2.13})$$

$$P_j := p_{A,j}(A) \in \mathcal{A} \quad (\text{П.2.14})$$

$(j = 1, \dots, s)$. Твърдим, че

$$P_j^* = P_j, \quad P_j^2 = P_j, \quad (\text{П.2.15})$$

$$AP_j = P_jA = \alpha_j P_j, \quad (\text{П.2.16})$$

$$P_j P_k = 0, \quad \text{ако } j \neq k \quad (\text{П.2.17})$$

$$P_1 + \dots + P_s = \hat{1}, \quad (\text{П.2.18})$$

$$A = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_s P_s. \quad (\text{П.2.19})$$

Доказателство. Започвайки с

(П.2.15), най-напред от реалността на α_j и

на $q_{A,j}(z)$, за всяко $j = 1, \dots, s$, следва и реалността на $p_{A,j}(z)$, а от там и $P_j^* = p_{A,j}(A)^* = \overline{p_{A,j}}(A) = p_{A,j}(A) = P_j$. По-нататък, съгласно (П.2.10) за $p(A) = q_{A,j}(A)$ имаме:

$$\begin{aligned} P_j^2 &= p_{A,j}(A)^2 = q_{A,j}(\alpha_j)^{-2} q_{A,j}(A)^2 = q_{A,j}(\alpha_j)^{-2} \\ & q_{A,j}(\alpha_j) q_{A,j}(A) \\ &= p_{A,j}(A) = P_j. \end{aligned}$$

Формула (П.2.16) следва от (П.2.9).

Преминавайки към ф-ла (П.2.17) имаме $P_j P_k = q_{A,j}(\alpha_j)^{-1} q_{A,k}(\alpha_k)^{-1} q_{A,j}(A) q_{A,k}(A)$. Ще покажем, че $q_{A,j}(A) q_{A,k}(A) = 0$ при $j \neq k$. За целта използваме, че съгласно (П.2.11), полиномът $q_{A,j}(z) q_{A,k}(z)$ се анулира за всеки корен на полинома $q_A(z)$ и следователно, ще се дели на $q_A(z)$. Така, $q_{A,j}(z) q_{A,k}(z) \in J_A$, от където следва, че $q_{A,j}(A) q_{A,k}(A) = 0$.

За да докажем ф-ла (П.2.18) нека да разгледаме полинома

$$1 - \sum_{j=1}^s \frac{q_{A,j}(z)}{q_{A,j}(\alpha_j)} \in \mathbb{C}[z]. \quad (\text{П.2.20})$$

Това е полином от степен $s - 1$, който се анулира за s различни стойности на z : $z = \alpha_1, \dots, \alpha_s$ (използвайки (П.2.11)). Следователно, полиномът (П.2.20) е тъждествено равен на

нула и тогава, замествайки в него $z = A$ получаваме (П.2.18).

И накрая, ф-ла (П.2.19) получаваме от равенството:

$$\begin{aligned} A &= \hat{1}.A.\hat{1} = \sum_{j,k=1}^s P_j A P_k \quad (\text{П.2.21}) \\ &= \sum_{j,k=1}^s \alpha_j P_j P_k = \sum_{j=1}^s \alpha_j P_j, \end{aligned}$$

където при второто равенство сме използвали (П.2.18), на следващата стъпка (П.2.16) и накрая, (П.2.15), и (П.2.17).

С това лема П.2.4 е доказана, а с нея приключва и доказателството на теорема П.0.2. $\square$

Напомниме, че множеството от числа $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ от разложението (П.2.19) се нарича *спектр* на A .

П.3 Положителност на елементи в крайно-мерни, положителни $*$ -алгебри

Теорема П.3.5. *Нека $\mathcal{A}$ е крайно-мерна, положителна $*$ -алгебра с единица и $C_1, \dots,$*

$C_m \in \mathcal{A}$. Тогава спектърът на $C_1^*C_1 + \cdots + C_m^*C_m$ се състои от неотрицателни числа.

Доказателство. Да приложим спектралната теорема П.0.2 за $A := C_1^*C_1 + \cdots + C_m^*C_m = A^*$ и да допуснем, че $\alpha_j = -\lambda^2$ за някое $j = 1, \dots, s$ и $\lambda > 0$. Полагайки $P := P_j$ имаме,

$$D_1^*D_1 + \cdots + D_m^*D_m + (\lambda P)^*(\lambda P) = 0,$$

за $D_k := C_k P$ при $k = 1, \dots, m$ (защо?). Съгласно условието за положителност на алгебрата, $\lambda P = 0$, което е невъзможно. $\square$

П.4 Събития в крайно-мерни $*$ -алгебри

Припомняме (лекция 5), че *събитие* в $*$ -алгебра е ортогонален проектор, т.е., такъв самоспрегнат елемент $P \in \mathcal{A}$, $P^* = P$, за който $P^2 = P$.

Основното следствие, от доказаната спектрална теорема П.0.2, което ще използваме по-нататък, е следното:

Следствие П.4.6. Ако $\mathcal{A}$ е крайно-мерна, положителна $*$ -алгебра с единица, която е неединична (т.е., $\mathcal{A} \neq \mathbb{C}\hat{1}$), тогава в $\mathcal{A}$

има нетривиално събитие, т.е., съществува ортогонален проектор $P \in \mathcal{A}$ ($P^* = P$, $P^2 = P$), който е отличен от 0 и $\hat{1}$.

По-нататък за настоящата подточка П.4 предположението за положителност на $*$ -алгебра не е необходимо. Тук ще определим релацията $\preceq$ на мажориране на събитията, изцяло залагайки на операцията произведение като:

$$\begin{aligned} P \preceq Q &\stackrel{\text{def}}{\iff} PQ = P \\ &\iff QP = P \end{aligned} \quad (\text{П.4.22})$$

(последната еквивалентност е понеже $P = P^* = (PQ)^* = QP$). Горното определение на релацията мажориране е еквивалентно на определенията от лекции 2–5, но ние тук няма да се занимаваме с тази еквивалентност и ще приемем (П.4.22), като изходно определение за целите на това приложение.

Лема П.4.7. *Определение (П.4.22) дефинира релация на частична наредба.*

Доказателство.

а) *Рефлексивност?*

$$P \preceq P \iff P^2 = P.$$

б) *Антисиметрия?* Ако $P \preceq Q$ и $Q \preceq P$, то $P = PQ = Q$.

в) *Транзитивност?* Ако $P \preceq Q$ и $Q \preceq R$, то $PR = (PQ)R = P(QR) = PQ = P$, т.е., $P \preceq R$. $\square$

Напомняме, че *елементарно събитие* P е такова събитие, за което от $0 \preceq Q \preceq P$ следва, че $Q = 0$ или $Q = P$, за всяко събитие Q . Еквивалентно, P е елементарно събитие, ако:

$$PQ = Q \Rightarrow Q = 0 \text{ или } Q = P. \quad (\text{П.4.23})$$

Други определения: **дизюнктивни събития** P и Q са такива *ненулеви* събития, за които

$$PQ = 0 \quad (\Leftrightarrow \quad QP = 0). \quad (\text{П.4.24})$$

Дизюнктивна система от събития $\{P_1, \dots, P_s\}$ е такова множество от събития, в което всеки две различни събития P_j и P_k са дизюнктивни. В този случай ще казваме също, че $P_1, \dots, P_s$ са дизюнктивни събития. По определение, всяка система от едно ненулево събитие е също дизюнктивна.

Лема П.4.8. *Всяка дизюнктивна система от събития е линейно независима.*

Доказателство. Нека събитията $P_1, \dots, P_s$ са дизюнктивни и $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_s P_s = 0$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$). Умножавайки двете страни на последното равенство по P_j получаваме, че $\lambda_j = 0$ (защо?). Следователно, $P_1, \dots, P_s$ са линейно независими. $\square$

Теорема П.4.9. *Във всяка крайно-мерна $*$ -алгебра с единица съществува крайна, дизюнктивна система от елементарни събития, $P_1, \dots, P_n$, такива че*

$$P_1 + \dots + P_n = \hat{1}. \quad (\text{П.4.25})$$

Доказателство. Нека $Q_1 := \hat{1}$. Ако Q_1 е елементарно събитие, то доказателството приключва. В противен случай, съществува събитие $Q_{1,0} \neq Q_1$, такова че $Q_{1,0} \preceq Q_1$. Следователно, $Q_{1,1} := Q_1 - Q_{1,0}$ е ненулево събитие ($Q_{1,1}^2 = Q_1^2 + Q_{1,0}^2 - 2Q_{1,0}Q_1 = Q_1 - Q_{1,0} = Q_{1,1}$). Събитията $Q_{1,0}$ и $Q_{1,1}$ са дизюнктивни ($Q_{1,0}Q_{1,1} = Q_{1,0}(Q_1 - Q_{1,0}) = 0$) и $Q_{1,0} + Q_{1,1} = Q_1 = \hat{1}$. Следователно, ако $Q_{1,0}$ и $Q_{1,1}$ са елементарни събития, то доказателството приключва. В противен

случай, едно от събитията $Q_{1,0}$ и $Q_{1,1}$ не е елементарно и нека за определеност това е $Q_{1,0}$. Така, съществува събитие $Q_{1,0,1} \neq Q_{1,0}$, такова че $Q_{1,0,0} \preceq Q_{1,0}$. Следователно, аналогично $Q_{1,0,1} := Q_{1,0} - Q_{1,0,0}$ е ненулево събитие, което е дизюнктивно, както спрямо $Q_{1,0,0}$, така и спрямо $Q_{1,1}$. Така, по индукция построяваме редица от крайни дизюнктивни системи $\{Q_\xi\}_{\xi \in \Xi_n}$, където събитията Q_ξ са индексирани с редици ξ от 0 и 1 и имат свойствата

$$Q_{\xi,0} + Q_{\xi,1} = Q_\xi, \quad \sum_{\xi \in \Xi_n} Q_\xi = \hat{1}.$$

Тъй като на всяка стъпка броят на елементите в множеството $\{Q_\xi\}_{\xi \in \Xi_n}$ строго нараства, то съгласно лема П.4.8 този процес не може да продължава безкрайно дълго. Условието конструкцията да спре е всички събития в множеството $\{Q_\xi\}_{\xi \in \Xi_n}$ да бъдат елементарни. $\square$

Забележки (а) От доказателството на горната теорема следва, че построената дизюнктивна система е *максимална*, т.е., не може да се разшири или подразбие на повече събития.

(б) От резултатите в това приложение ще следва, че за крайно-мерна, положителна $*$ -

алгебра с единица броя на елементите n на построената дизюнктивна система в теорема П.4.9 е *инвариант на алгебрата*, т.е., е един и същи за всички подобни дизюнктивни системи. Това число n може да се нарече **ранг на алгебрата**. То обаче е различно от размерността на алгебрата, като векторно пространство, в общия случай.

(в) Формула (П.4.25) отговаря на формулата за разбиване на единицата в ортонормиран базис от лекция 7.

П.5 Квантова еквивалентност между елементарни събития

Лема П.5.10. *Нека $\mathcal{A}$ е крайно-мерна, положителна $*$ -алгебра с единица, P е събитие в $\mathcal{A}$ ($P \in \mathcal{A}$, $P^* = P$ и $P^2 = P$). Тогава множеството*

$$P\mathcal{A}P = \{PAP \mid A \in \mathcal{A}\}$$

е $$ -подалгебра на $\mathcal{A}$, която е също крайно-мерна, положителна $*$ -алгебра с единица.*

Доказателство.

Очевидно, ако $PAP \in P\mathcal{A}P$, $PBP \in P\mathcal{A}P$ и $\alpha \in \mathbb{C}$, то и елементите

- $\alpha PAP = P(\alpha A)P$,
- $PAP + PBP = P(A + B)P$,
- $(PAP).(PBP) = P(APB)P$ и
- $(PAP)^* = PA^*P$

принадлежат на $P\mathcal{A}P$. Това точно означава, че $P\mathcal{A}P$ е $*$ -подалгебра на $\mathcal{A}$. Свойството на положителност на $*$ -алгебра преминава към $*$ -подалгебри. Понеже $P(PAP) = PAP = (PAP)P$, то P е единица на алгебрата $P\mathcal{A}P$. $\square$

Следствие П.5.11. Нека $\mathcal{A}$ е крайно-мерна, положителна $*$ -алгебра с единица и P е елементарно събитие в $\mathcal{A}$. Тогава за всеки елемент $A \in \mathcal{A}$ е в сила равенството

$$PAP = \alpha_P P$$

за някакво число $\alpha_P \in \mathbb{C}$.

Обратното, ако за всеки елемент $A \in \mathcal{A}$ се изпълнява горното равенство, то събитието P е елементарно.

Доказателство. Следствие П.5.11 може да се запише накратко като

P е елементарно събитие

$$\Leftrightarrow P \mathcal{A} P = \mathbb{C} P. \quad (\text{П.5.26})$$

В права посока това твърдение следва от лема П.5.10 и спектралната теорема П.0.2, понеже ако $P \mathcal{A} P$ има неединичен елемент, т.е., елемент който не е пропорционален на P , тогава ще съществува нетривиално събитие (съгласно следствие П.4.6). Ето защо, тогава P няма да е елементарно събитие. Обратното е още по-елементарно: ако $QP = P$ и $Q \neq P$, то $PQP = Q \neq \alpha P$ за каквото и да е било число $\alpha \in \mathbb{C}$. $\square$

Теорема П.5.12. *Нека P и Q са елементарни събития в крайно-мерна, положителна $*$ -алгебра $\mathcal{A}$ с единица. Тогава*

$$\dim(P \mathcal{A} Q) \leq 1.$$

Ако $\dim(P \mathcal{A} Q) = 1$, то и $\dim(Q \mathcal{A} P) = 1$, и съществуват елементи $E(P, Q) \in P \mathcal{A} Q$ и $E(Q, P) \in Q \mathcal{A} P$, такива че

$$E(P, Q)^* = E(Q, P), \quad (\text{П.5.27})$$

$$P E(P, Q) = E(P, Q),$$

$$E(P, Q) Q = E(P, Q), \quad (\text{П.5.28})$$

$$\begin{aligned}
Q E(Q, P) &= E(Q, P), \\
E(Q, P) P &= E(Q, P), \quad (\text{П.5.29})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(P, Q) E(Q, P) &= P, \\
E(Q, P) E(P, Q) &= Q. \quad (\text{П.5.30})
\end{aligned}$$

Доказателство. Най-напред ще конструираме елементите $E(P, Q) \in P\mathcal{A}Q$ и $E(Q, P) \in Q\mathcal{A}P$, които да изпълняват свойствата (П.5.27)–(П.5.30), при предположение, че съществува $A \in \mathcal{A}$, такъв че $PAQ \neq 0$. Съгласно следствие П.5.11 и теорема П.3.5:

$$\begin{aligned}
(PAQ)(PAQ)^* &\equiv P(AQA^*)P \\
&= \lambda^2 P.
\end{aligned}$$

Да положим:

$$\begin{aligned}
E &:= E(P, Q) := \lambda^{-1} PAQ, \\
E(Q, P) &:= E(P, Q)^* \\
&= \lambda^{-1} QA^*P. \quad (\text{П.5.31})
\end{aligned}$$

Тогава от построението непосредствено следват всички равенства от (П.5.27)–(П.5.30), без евентуално последното, $E^*E = Q$. За да докажем, че $E^*E = Q$, най-напред да отбележим, че съгласно следствие П.5.11 имаме $E^*E =$

$Q(\cdots)Q = \mu Q$ за някакво число μ . Вдигайки на квадрат последното равенство получаваме:
 $\mu^2 Q = (E^* E)(E^* E) =$
 $E^*(EE^*)E = E^*PE = E^*E = \mu Q$. Следователно, $\mu = 1$ и така, всички равенства (П.5.27)–(П.5.30) са доказани.

Остава да покажем, че в изследвания случай $P\mathcal{A}Q = \mathbb{C}E$. Нека $B \in \mathcal{A}$ е друг елемент, за който $PBQ \neq 0$. И нека E' е построен от B , аналогично както E (П.5.31) от A . Така, E' , заедно с E'^* , изпълняват всички равенства (П.5.27)–(П.5.30) заменяйки $E(P, Q)$ и $E(Q, P)$, съответно. Нашата цел е да покажем, че $E' = \zeta E$ за някакво число ζ . Най-напред, нека $E'E^* = P(\cdots)P = \zeta P$ за някакво число ζ (което ще се окаже и търсеното число). Следователно, $EE'^* = (E'E^*)^* = \bar{\zeta}P$. Използвайки установените равенства (П.5.27)–(П.5.30) (както за E, E^* така и за E', E'^*) пресмятаме: $|\zeta|^2 P = (E'E^*)(E'E^*)^* = E'(E^*E)E'^* = E'QE'^* = E'E'^* = P$. Следователно, $|\zeta|^2 = 1$. Тогава, $(E' - \zeta E)(E' - \zeta E)^* = E'E'^* + |\zeta|^2 EE^* - \zeta EE'^* - \bar{\zeta}E'E^* = P + P - P - P = 0$. Съгласно условието за положителност на алгебрата, $E' - \zeta E = 0$.

С това теорема П.5.12 е доказана. $\square$

Лема П.5.13. *Нека P , Q и R са елементарни събития, такива че $\dim(P \mathcal{A} Q) = 1$ и $\dim(Q \mathcal{A} R) = 1$. Тогава и $\dim(P \mathcal{A} R) = 1$. Нещо повече, ако $E(P, Q)$ и $E(Q, R)$ изпълняват свойствата (П.5.27)–(П.5.30), съответно за двойките събития (P, Q) и (Q, R) , то*

$$E(P, R) := E(P, Q) E(Q, R)$$

изпълнява тези свойства за двойката (P, R) . Доказателството, че $E(P, R) := E(P, Q) E(Q, R)$ изпълнява равенствата (П.5.27)–(П.5.30) по отношение на двойката събития P и R се извършва непосредствено. $\square$

За две елементарни събития P и Q в една $*$ -алгебра $\mathcal{A}$ ще казваме, че са **квантово еквивалентни** и ще пишем

$$P \sim_q Q \stackrel{\text{def}}{\iff} \dim(P \mathcal{A} Q) = 1. \quad (\text{П.5.32})$$

Следствие П.5.14. *Релацията $\sim_q$ е релация на еквивалентност в множеството на всички елементарни събития (на една крайномерна, положителна $*$ -алгебра с единица).*

Доказателство. Следва да покажем:

- а) *Рефлексивност*: защо $P \sim_q P$? Поради следствие П.5.11.
- б) *Симетрия*: защо от $P \sim_q Q$ следва $Q \sim_q P$? Поради теорема П.5.12 от $\dim(P \mathcal{A} Q) = 1$ следва и $\dim(Q \mathcal{A} P) = 1$.
- в) *Транзитивност*: защо от $P \sim_q Q$ и $Q \sim_q R$ следва $P \sim_q R$? Поради лема П.5.13. $\square$

П.6 Доказателство на теорема П.0.1

Нека $P_1, \dots, P_n$ е дизюнктивна система от елементарни събития в една крайномерна, положителна $*$ -алгебра $\mathcal{A}$ с единица, построена по теорема П.4.9. В частност е изпълнено $P_1 + \dots + P_n = 1$. Релацията $\sim_q$ подразбива множеството $\{P_1, \dots, P_n\}$ на *класове на еквивалентност*. Ще считаме, че номерацията на събитията P_j е такава, че класовете на еквивалентност се състоят от последователно номерирани събития,

$$\{P_1, \dots, P_{k_1}\}, \\ \{P_{k_1+1}, \dots, P_{k_1+k_2}\}, \dots$$

По такъв начин, класовете на еквивалентност в множеството $\{P_1, \dots, P_n\}$ имат съответно, $k_1, k_2, \dots, k_m$ на брой елементи. За удобство, по-нататък в тази подточка ще пишем

$$j_1 \sim_q j_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} P_{j_1} \sim_q P_{j_2}.$$

Фиксирайки, като представители на отделните класове на еквивалентност, събитията с най-малки номера от всеки клас:

$$\{1, k_1 + 1, k_1 + k_2 + 1, \dots\}$$

нека да изберем система от елементи

$$E_{j,j_1} := E(P_j, P_{j_1}), \quad (\text{П.6.33})$$

$$E_{j_1,j} := E_{j,j_1}^* \equiv E(P_{j_1}, P_j),$$

където

$$j \in \{1, k_1 + 1, k_1 + k_2 + 1, \dots\} \text{ и } j' \sim_q j.$$

В останалите случаи на $j_1 \sim_q j_2$ полагаме

$$E_{j_1,j_2} := E_{j_1,j} E_{j,j_2}, \quad (\text{П.6.34})$$

където $j_1 \sim_q j \sim_q j_2$. Полагайки още

$$E_{j,j} = P_j$$

за $j = 1, \dots, n$ достигахме до:

Лема П.6.15. *Получената система от елементи на $\mathcal{A}$,*

$$\{E_{j_1, j_2} \mid j_1 \sim_q j_2\} \quad (\text{П.6.35})$$

е линеен базис на $\mathcal{A}$. Разлагайки в този базис произволен елемент $A \in \mathcal{A}$,

$$A = \sum_{j_1 \sim_q j_2} a_{j_1, j_2} E_{j_1, j_2} \quad (\text{П.6.36})$$

получаваме 1-1 съответствие

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \ni A &\longleftrightarrow \\ (a_{j_1, j_2}) &\in \text{Mat}_{k_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \\ &\oplus \text{Mat}_{k_m}(\mathbb{C}), \end{aligned} \quad (\text{П.6.37})$$

което е изоморфизъм на $$ -алгебри.*

Доказателство. За $j_1 \sim_q j_2$ полагаме

$$P_{j_1} A P_{j_2} =: a_{j_1, j_2} E_{j_1, j_2} \quad (\text{П.6.38})$$

(на основание теорема П.5.12). Използвайки, че $P_1 + \dots + P_n = 1$ имаме също:

$$\begin{aligned} A &= \hat{1} A \hat{1} \\ &= \left(\sum_{j_1=1}^n P_{j_1} \right) A \left(\sum_{j_2=1}^n P_{j_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j_1 \cdot j_2 = 1}^n P_{j_1} A P_{j_2} \\
&= \sum_{j_1 \sim_q j_2} a_{j_1, j_2} E_{j_1, j_2}, \quad (\text{П.6.39})
\end{aligned}$$

тъй като, ако $j_1 \not\sim_q j_2$, то $P_{j_1} A P_{j_2} = 0$, съгласно (П.5.32). Равенства (П.6.38) и (П.6.39) доказват, че системата (П.6.35) е линейен базис на $\mathcal{A}$, заедно с разложението (П.6.36). Това, че съответствието (П.6.37) е изоморфизъм на $*$ -алгебри се гарантира от тъждествата

$$E_{j_1, j_2}^* = E_{j_2, j_1}, \quad (\text{П.6.40})$$

$$\begin{aligned}
&E_{j_1, j_2} E_{j_3, j_4} \\
&= \begin{cases} E_{j_1, j_4} & \text{ако } j_2 = j_3 \\ 0 & \text{ако } j_2 \neq j_3 \end{cases} \quad (\text{П.6.41})
\end{aligned}$$

(това са структурните съотношения в матричната $*$ -алгебра). На свой ред, ф-ла (П.6.40) следва от полаганията (П.6.34) и (П.6.33). Първото от равенствата (П.6.41) следва, подобно на лема П.5.13, от тъждествата (П.5.27)–(П.5.30) между E_{j, j_1} и $E_{j_1, j}$ от (П.6.33). Второто от равенствата (П.6.41) е

следствие от дизюнктивността на P_{j_2} и P_{j_3} при $j_2 \neq j_3$, понеже тогава $(P_{j_1} A P_{j_2}) (P_{j_3} A P_{j_4}) = P_{j_1} A (P_{j_2} P_{j_3}) A P_{j_4} = 0$

С това лема П.6.15 е доказана, а с нея приключва и доказателството на теорема П.0.1. $\square$

П.7 Нужно ли е предположението за единица в една крайно-мерна, положителна $*$ -алгебра

Предположението за наличието на единица в една крайно-мерна положителна $*$ -алгебра не е необходимо, понеже то е следствие. За простота ние обаче до тук постоянно го допускахме. Сега ще скицираме накратко аргументите, защо това предположение е излишно.

Теорема П.7.16. *Нека $\mathcal{A}$ е крайно-мерна, положителна $*$ -алгебра. Тогава $\mathcal{A}$ притежава единица.*

Ще дадем *доказателството* схематично. Идеята е да се приложи една естествена

конструкция, наречена “присъединяване на единица”. Ако $\mathcal{A}$ е алгебра (най-обща, дори неасоциативна), то полагаме:

$$\widehat{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \oplus \mathbb{K} = \{(A, \alpha) | A \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{K}\}, \quad (\text{П.7.42})$$

като линейно пространство, а като алгебра в $\widehat{\mathcal{A}}$ въвеждаме умножение

$$\begin{aligned} (A_1, \alpha_1)(A_2, \alpha_2) \\ := (A_1 A_2 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1, \alpha_1 \alpha_2), \end{aligned} \quad (\text{П.7.43})$$

което е различно от произведението на пряката сума на алгебрите $\mathcal{A}$ и $\mathbb{K}$. Веднага се вижда, че $\widehat{\mathcal{A}}$ има единица: $(0, 1)$.

Също така, непосредствената проверка дава, че ако $\mathcal{A}$ е асоциативна алгебра, то и $\widehat{\mathcal{A}}$ е асоциативна алгебра.

Ако $\mathcal{A}$ е $*$ -алгебра, то $\widehat{\mathcal{A}}$ става $*$ -алгебра спрямо операцията:

$$(A, \alpha)^* := (A^*, \bar{\alpha}). \quad (\text{П.7.44})$$

Твърдим, че ако $\mathcal{A}$ е положителна, то и $\widehat{\mathcal{A}}$ е такава. Наистина, ако

$$\sum_{j=1}^n (A_j, \alpha_j)^* (A_j, \alpha_j) = 0,$$

то най-напред заключаваме, че $|\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = 0$ и затова $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$; тогава и $A_2^* A_1 + \dots + A_n^* A_n = 0$, и следователно $A_1 = \dots = A_m = 0$.

Очевидно, ако $\mathcal{A}$ е крайно-мерна, такава е и $\widehat{\mathcal{A}}$, така че ние можем да приложим за $\widehat{\mathcal{A}}$ основната структурна теорема и да заключим, че

$$\widehat{\mathcal{A}} \cong \text{Mat}_{k_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus \text{Mat}_{k_{m+1}}(\mathbb{C}) \quad (\text{П.7.45})$$

за някакви естествени числа $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m \geq k_{m+1} \geq 1$

Целта по-нататък е да се покаже, че $k_{m+1} = 1$ и

$$\mathcal{A} \cong \text{Mat}_{k_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus \text{Mat}_{k_m}(\mathbb{C}) \quad (\text{П.7.46})$$

(в последните две формули вече имаме пряка сума на алгебри в отличие от (П.7.43)). В частност, $\mathcal{A}$ има единица. Детайлите оставяме за упражнение.