3 Аксиоми на общите квантови системи. Част 2: логика на събитията

В предния параграф развихме в значителна степен структурата на множеството на състоянията и ни остана още само една аксиома в тази насока, която ще дадем в края на този параграф. Преди това, в настоящия параграф ще се концентрираме основно върху събитията. Едно от първите заключения ще бъде, че *множеството на всички събития е* (*пълна*) *орто-модуларна решетка*[36] (в края на точка 3.5). В хода на изложението ние ще обясним и мотивираме всички понятия, споменати в това изречение. Това представлява логическата структура на множеството от събития. Тя ще ни позволи да построим и определена геометрия върху множеството на събитията, която ще представим в следващия параграф и заед-

[36] ortho-modular lattice

но с това ще ни позволи докрай да фиксираме там и общата структура на квантовите системи. С този параграф ще изчерпим аксиомите на т.нар. *квантово-логически аксиоматичен подход*, от първата част на аксиоматиката на квантовата теория, като в по-следващия параграф ще се върнем отново към тях и ще ги изложим сумарно.

3.1 Частична наредба

Като начало, нека въведем следната основна бинарна релация в множеството на събитията: за $P, Q \in \boldsymbol{Events}$ нека

$$
\begin{aligned}
&P \preccurlyeq Q \quad \text{се определя чрез условието,}\\
&\text{че за всички състояния } \rho, \sigma \in \boldsymbol{States},\\
&\text{от } Prob_\rho(P) = 1 \text{ следва} Prob_\rho(Q) = 1\,,\\
&\text{от } Prob_\sigma(Q) = 0 \text{ следва} Prob_\sigma(P) = 0\,. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

Когато $P \preccurlyeq Q$ ще казваме, че събитието P **се мажорира от** събитието Q. Синонимни изрази за това ще бъдат също и: $Q \succcurlyeq P$, "Q *мажорира* P", "P *се съдържа в* Q", "Q *съдържа* P", "*от* P *следва* Q", "Q *следва от* P".

За да изразим определение (3.1) с думи, нека твърдението "$Prob_\rho(P) = 1$" изкажем, като: "**събитието** P ***почти сигурно*** **настъпва** (**се случва** / **се наблюдава**) **в състояние** ρ". Също така, когато "$Prob_\rho(P) = 0$" ще казваме, че "събитието P ***почти сигурно*** **не настъпва** (не се случва / не се наблюдава) в състояние ρ".[37] Тогава определение (3.1) може да се изкаже по следния начин: "P се мажорира от Q, ако при всяко състояние в което P се наблюдава (случва / настъпва) почти сигурно също и Q се наблюдава почти сигурно, както и за всяко състояние, в което Q почти сигурно не се наблюдава следва, че и P почти сигурно не се наблюдава". Малко по-кратко и по-свободно, определението за $P \preccurlyeq Q$ може да се изкаже и така: "винаги когато се наблюдава събитието P се наблюдава и събитието Q, както и винаги когато Q не се наблюдава, тогава и P не се

[37] Забележете, "$Prob_\rho(P) = 1$" и "$Prob_\rho(P) = 0$" са две *взаимно изключващи се*, но не и *взаимно допълнителни твърдения*, понеже за ситуациите с междинни вероятности нищо не се твърди. Затова е важно прилагателното "*почти сигурно*" да стои преди отрицанието.

наблюдава".[38]

От ф-ла (3.1) непосредствено следват (чисто логически) две основни свойства на релацията $\preccurlyeq$:

(рефлексивност) за всяко събитие P имаме:

$$P \preccurlyeq P\,, \tag{3.2}$$

(транзитивност) за всеки три събития P, Q и R имаме че:
от $P \preccurlyeq Q$ и $Q \preccurlyeq R$
следва $P \preccurlyeq R$. (3.3)

Като поредна *аксиома* налагаме следното свойство:

(антисиметрия) за всеки две събития P и Q имаме че:
от $P \preccurlyeq Q$ и $Q \preccurlyeq P$
следва $P = Q$. (3.4)

Еквивалентно,

$$P = Q \tag{3.5}$$

[38] в случая израза "винаги когато" предполага изказването "за всяко състояние, в което" и също така "(не) се наблюдава" предполага "почти сигурност"

$$\iff \begin{cases} Prob_\rho(P) = 1 \Leftrightarrow Prob_\rho(Q) = 1 \ (\forall \rho)\,, \\ Prob_\sigma(P) = 0 \Leftrightarrow Prob_\sigma(Q) = 0 \ (\forall \sigma)\,. \end{cases}$$

Изказана с думи горната аксиома гласи, че ако P, респективно, настъпва или не настъпва, тогава и само тогава, когато Q настъпва или не настъпва, то тогава P и Q са едно и също събитие.

По такъв начин, множеството $\boldsymbol{Events}$, снабдено с релацията $\preccurlyeq$, се превръща в *частично наредено множество*,[39] тъй като (нека припомним, че) свойствата (3.2), (3.3) и (3.4) се явяват дефиниционни за това.

Аксиомата (3.4) изглежда напълно естествено. Тя засилва обаче втората аксиома за отделимост както непосредствено се вижда от еквивалентната формулировка (3.5).

По-нататък (в точка 3.7), в следствие на допълнителните ни аксиоми ще получим следното свойство:

$$\begin{aligned} &P \preccurlyeq Q \quad \text{тогава и само тогава, когато} \\ &\text{за всяко състояние } \rho \in \boldsymbol{States}\text{:} \\ &Prob_\rho(P) \leqslant Prob_\rho(Q)\ . \end{aligned} \tag{3.6}$$

[39] partially ordered set = poset

За класическите системи от точка 2.11, въведената аксиома (3.4) се изпълнява и частичната наредба в множеството на събитията (2.27) за тези системи е просто релацията на включване на едно подмножество в друго (проверете!):

$$P \preccurlyeq Q \quad \Longleftrightarrow \quad P \subseteq Q \tag{3.7}$$

за всеки $P, Q \in \boldsymbol{Events} = \mathcal{P}(\Omega)$ (класическа система).

3.2 Нула и единица

Следваща *аксиома* ще бъде изискването, че:

> в частично наредената множество на всички събития съществуват *най-голям* и *най-малък елемент*.

Последните ще означаваме с $\mathbf{0}$ (**нула**) и $\mathbf{1}$ (**единица**), съответно. Написано с формули, това означа, че за всяко събитие $P \in \boldsymbol{Events}$ имаме:

$$\mathbf{0} \preccurlyeq P \preccurlyeq \mathbf{1}\,. \tag{3.8}$$

Изказано с думи, от събитието $\mathbf{0}$ следва всяко друго събитие, поради което то ще

има смисъл на *невъзможното събитие.*[40] Аналогично, събитието $\mathbf{1}$ следва от всяко друго събитие и поради това то придобива смисъл на *винаги изпълнено събитие.*[41] Като следствие на допълнителните ни аксиоми по-нататък ще докажем, че:

$$P = \mathbf{0} \quad \text{тогава и само тогава, когато за всяко състояние } \rho \in \mathbf{States}: \quad Prob_\rho(P) = 0\,. \tag{3.9}$$

и също, че

$$P = \mathbf{1} \quad \text{тогава и само тогава, когато за всяко състояние } \rho \in \mathbf{States}: \quad Prob_\rho(P) = 1\,. \tag{3.10}$$

Класическите системи (точка 2.11) притежават нула и единица – това са празното под-

[40] "невъзможно", понеже от него ще следват дори и "взаимно изключващи се" събития (каквото и да значи за момента това)

[41] "винаги изпълнено", понеже то ще следва, в частност и от "взаимно допълващи се" събития (което за момента също, както и в предната подлистна бележка, има само интуитивен и мотивационен смисъл)

множество и цялото множество, съответно:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)\ (= \boldsymbol{Events}), \\ \mathbf{1} &= \Omega \in \mathcal{P}(\Omega)\ (= \boldsymbol{Events}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

(защо?).

3.3 Логическите операции "*и*" и "*или*" за събития

Всяко частично наредено множество допуска формулирането на логическите операции "*и*" и "*или*" посредством понятията за *инфимум* (или още, *точна долна граница*) и *сюпремум* (*точна горна граница*), съответно.

Нашата следваща *аксиома* е, че

> в множеството на всички събития съществуват инфимумите и сюпремумите на произволни подмножества от събития.

Нека припомним тези понятия от общата теория на частично наредените множества. Ако $(\mathcal{T}, \preccurlyeq)$ е едно частично наредено множество и $S \subseteq \mathcal{T}$, то **инфимум** на S се определя като:

$$\wedge S\ (\equiv \inf S) := a \tag{3.12}$$

$$\iff \quad \begin{cases} \forall x \in S : a \preccurlyeq x \\ \forall y \in \mathcal{T} : (\forall x \in S : y \preccurlyeq x) \Rightarrow y \preccurlyeq a\,. \end{cases}$$

Изказано с думи, a е най-големия елемент в множеството на всички елементи y, които са по-малки от всеки елемент x на S. *Дуално понятие*[42] е **сюпремума**:

$$\vee S\,(\equiv \sup S) := a \tag{3.13}$$
$$\iff \quad \begin{cases} \forall x \in S : x \preccurlyeq a \\ \forall y \in \mathcal{T} : (\forall x \in S : x \preccurlyeq y) \Rightarrow a \preccurlyeq y\,, \end{cases}$$

т.е., a е най-малкия елемент в множеството на всички елементи y, които са по-големи от всеки елемент x на S. Подчертаваме, че елементите $\wedge S$ и $\vee S$ не винаги съществуват. Доказва се обаче, че *ако съществуват* $\wedge S$ *или* $\vee S$, *то определенията по-горе ги дефинират еднозначно.*[43] Нека отбележим, че ако частично наредената множество $(\mathcal{T}, \preccurlyeq)$ има нула и единица, то

$$\wedge\emptyset = \mathbf{1}\,, \quad \vee\emptyset = \mathbf{0}\,, \quad \wedge\mathcal{T} = \mathbf{0}\,, \quad \vee\mathcal{T} = \mathbf{1}\,.$$

[42] Дуално понятие (респ., твърдение) в теорията на частично наредените множества се получава с обръщане на посоките на наредбената релация навсякъде в съответното определение (респ., твърдение).

[43] опитайте да го докажете сами, ако това не вие известно(!)

Важна теорема в теорията на инфимумите и сюпремумите гласи, че: (*i*) *ако в едно частично наредено множество* $(\mathcal{T}, \preccurlyeq)$, *в което има нула и единица, съществуват инфимумите на произволни подмножества* $S \subseteq \mathcal{T}$, *то тогава съществуват и сюпремумите на произволни подмножества, като при това е в сила:*

$$\vee S \;=\; \wedge\{y \in \mathcal{T} \,|\, \forall x \in S : x \preccurlyeq y\}\,; \qquad (3.14)$$

(*ii*) дуално, *ако в едно частично наредено множество* $(\mathcal{T}, \preccurlyeq)$, *в което има нула и единица, съществуват сюпремумите на произволни подмножества* $S \subseteq \mathcal{T}$, *то тогава съществуват и инфимумите на произволни подмножества, като при това е в сила:*

$$\wedge S \;=\; \vee\{y \in \mathcal{T} \,|\, \forall x \in S : y \preccurlyeq x\}\,. \qquad (3.15)$$

(Всъщност, ф-ли (3.14) и (3.15) са практически определенията за сюпремум и инфимум.)

В математиката, частично наредени множества, в които произволни, непразни, крайни подмножества от елементи имат сюпремум и инфимум, се наричат *решетки* (наредбени).[44] Ако в решетка съществуват сюп-

[44] lattice

ремумите и инфимумите на произволни подмножества, тогава решетката се нарича *пълна*.[45] По такъв начин, аксиомите формулирани до тук могат да се свият просто до формулировката, че *множеството на събитията* ***Events*** *е пълна решетка с нула и единица, спрямо операцията "$\preccurlyeq$"* (3.1)*, в качеството на частична наредба.*

Особено важен случай е, когато имаме инфимум и сюпремум на множество от два елемента. Нека вече се концентрираме върху случая на частично нареденото множество на събитията. За две събития $P, Q \in \textbf{\textit{Events}}$ полагаме:

$$\begin{aligned} P \wedge Q \,(\equiv\ \ P \textbf{\textit{ и }} Q\ \ ) &:= \wedge\{P, Q\}\,, \\ P \vee Q \,(\equiv P \textbf{\textit{ или }} Q\,) &:= \vee\{P, Q\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

и по-нататък ние основно ще използваме означения "$\wedge$" и "$\vee$" за обозначаване на логическите операции "***и***" и "***или***" между събитията, съответно. В следващата точка специално ще разгледаме инфимума и сюпремума, "$\wedge$" и "$\vee$", като бинарни операции. По-нататък, операциите "$\wedge$" и "$\vee$" ще наричаме също **реше-**

[45] complete lattice

тъчни операции.

За класическите системи (точка 2.11) множеството на събитията, което е степенното множество (ф-ла (2.27)), е пълна решетка. В този случай решетъчните операции "$\wedge$" и "$\vee$" съвпадат с теоретико-множествените операции сечение "$\cap$" и обединение "$\cup$", съответно:

$$P \wedge Q \;=\; P \cap Q\,, \quad P \vee Q \;=\; P \cup Q \qquad (3.17)$$

за всеки $P, Q \in \boldsymbol{Events} = \mathcal{P}(\Omega)$ (класическа система).

Тази точка ще завършим с дискусия относно мотивацията и илюстрацията (т.е., "практическата реализация") на въведените логически операции "$\wedge$" и "$\vee$" между събитията. И така, възниква следния въпрос: доколко тези операции биха могли да се изпълнят в експерименти. Нека първо допуснем, че събитията P и Q могат да се определят в един общ експеримент, като подмножества от елементарни наблюдателни алтернативи. Тогава операциите "$\wedge$" и "$\vee$" ще преминат в операциите сечение и обединение на съответните подмножества от елементарни събития на експеримента.

В общия случай обаче може и да не съществува общ експеримент за P и Q. Тогава се предлага следния изход ([Pi76, Theorem 2.1]). Нека $\{P_\alpha\}_\alpha$ е произволна фамилия от събития, като индекса α е "името" на експеримента, на който P_α се измерва (проверява). Допускаме, че може да конструираме експеримент, който се извършва по следния начин: избираме напълно случайно произволен експеримент "α" и проверяваме (измерваме) в него събитието P_α. Тогава, в така конструирания експеримент почти сигурното изпълняване на измерваното събитие ще има смисъла точно на почти сигурното изпълняване на инфимума $\wedge\{P_\alpha\}_\alpha$. Това донякъде оправдава предположението, че в частично нареденото множество на събитията съществуват инфимумите на произволни подмножества.

И така, ако по една или друга причина допуснем съществуване на произволни инфимуми, то съгласно теоремата по го-горе (фла (3.14)) ще съществуват и сюпремумите на произволни множества от събития. Обръщаме внимание, че за целта е нужно съществуването на инфимум да се допусне за произвол-

ни подмножества от събития $\{P_\alpha\}_\alpha$, а не само на крайни. Това е така, защото в последствие във ф-ла (3.14) се налага конструирането на инфимуми по безкрайни множества, даже и когато изходното множество S е крайно.

3.4 Отрицанието

За да завършим въвеждането на основните логически релации и операции между събитията ни остава да въведем и операцията *отрицание*.

Ще предположим, като поредна *аксиома*, че

> за всяко събитие P съществува събитие Q такова, че Q се случва (наблюдава) тогава и само тогава, когато P не се случва, както и P се случва тогава и само тогава, когато Q не се случва.

Написано с формула това условие изглежда така: за всяко състояние $\rho \in \boldsymbol{States}$ имаме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned} Prob_\rho(P) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad Prob_\rho(Q) = 0\,, \\ Prob_\rho(P) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad Prob_\rho(Q) = 1\,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Съгласно аксиома (3.5) за равенство на две събития следва, че събитието Q е еднозначно определено от събитието P. Ще казваме, че Q **е отрицание на събитието** P и ще пишем:

$$Q \;=:\; P^{\perp}\,(\equiv \textit{не}\, P)\,. \tag{3.19}$$

Друго следствие, което получаваме от определенията и аксиомите ни до тук е твърдението, че всички събития P_1 и P_2 имаме:

$$P_1 \preccurlyeq P_2 \quad\Longrightarrow\quad P_2^{\perp} \;=\; P_1^{\perp}\,. \tag{3.20}$$

По-нататък, като следствие на останалите ни аксиоми ще покажем, че

$$\mathit{Prob}_{\rho}\left(P^{\perp}\right) \;=\; 1 - \mathit{Prob}_{\rho}(P) \tag{3.21}$$

за всички $P \in \boldsymbol{Events}$ и $\rho \in \boldsymbol{States}$.

За класическите системи (точка 2.11) отрицанието е теоретико-множественото допълнение (защо?):

$$P^{\perp} \;=\; \Omega \setminus P \tag{3.22}$$

за всеки $P, Q \in \boldsymbol{Events} = \mathcal{P}(\Omega)$ (класическа система).

3.5 Общи закони на съждителното (пропозиционалното) смятане за събития

Нека изброим основните свойства на въведените до тук логически операции и релации върху събитията, които следват от въведените до сега аксиоми:

$$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R\,,$$
$$P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R\,, \tag{3.23}$$
$$P \wedge Q = Q \wedge P\,, \quad P \vee Q = Q \vee P\,, \tag{3.24}$$
$$P \vee (P \wedge Q) = P\,,\ P \wedge (P \vee Q) = P\,, \tag{3.25}$$
$$P \wedge P = P = P \vee P\,, \tag{3.26}$$
$$P \wedge Q = P \quad \Leftrightarrow \quad Q \preccurlyeq P\,,$$
$$P \vee Q = Q \quad \Leftrightarrow \quad P \preccurlyeq Q\,. \tag{3.27}$$
$$\left(P^{\perp}\right)^{\perp} = P\,, \tag{3.28}$$
$$P \vee P^{\perp} = \mathbf{1}\,,\ P \wedge P^{\perp} = \mathbf{0}\,,\ \mathbf{1}^{\perp} = \mathbf{0}\,, \tag{3.29}$$
$$\left(P \wedge Q\right)^{\perp} = P^{\perp} \vee Q^{\perp}\,,$$
$$\left(P \vee Q\right)^{\perp} = P^{\perp} \wedge Q^{\perp} \tag{3.30}$$

(за всеки $P, Q, R \in \boldsymbol{Events}$). Поименно:

- (3.23) са тъждествата за *асоциативност*;

- (3.24) са тъждествата за *комутативност*;
- (3.25) се наричат тъждества за "*поглъщането*";[46]
- (3.26) са тъждествата за *идемпотентност*;
- (3.27) дават обратна характеризация на релацията на частична наредба $\preccurlyeq$ посредством операциите $\wedge$ или $\vee$;
- (3.28) е *идемпотентността на отрицанието*;
- (3.29) започва със *закона за изключеното трето*;
- и накрая, (3.30) са *законите на де Морган*.[47]

Доказателството на горните тъждества се състои просто в пряко следване на дадените до тук в този параграф определения и аксиоми, и затова ще го пропуснем.

[46] absorption laws
[47] de Morgan's laws

Тъждествата (3.23)–(3.30) съставляват законите за класическото съждително смятане, от които са изпуснати само *законите за дистрибутивност*:

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \vee R) &= (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)\,, \\ P \vee (Q \wedge R) &= (P \vee Q) \wedge (P \vee R)\,. \end{aligned} \quad (3.31)$$

В общия случай, това което следва вместо тъждествата (3.31) са неравенствата

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \vee R) &\succcurlyeq (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)\,, \\ P \vee (Q \wedge R) &\preccurlyeq (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \end{aligned} \quad (3.32)$$

(докажете ги(!) – упражнението е много полезно).

В алгебрата, множество с бинарни операции "$\wedge$" и "$\vee$" и едноместна операция "$\perp$", в което изпълняват тъждествата (3.23)–(3.30) се нарича **орто-решетка**.[48] Така, аксиомите до тук от настоящия параграф 3 могат на кратко да се изкажат така: *множеството* ***Events*** *на квантовите събития е орторешетка* (*спрямо релацията* (3.1) *и операциите* (3.16) *и* (3.19)).

[48] ortho-lattice

3.6 Орто-модуларност и допълнения

Структурата на орто-решетка е сравнително силна и съдържателна, но не достатъчно. Допълнително усилване идва от т.нар.[49]

закон за орто-модуларност:

$$\text{ако} \quad P \preccurlyeq Q \quad \text{тогава} \quad P \vee (P^{\perp} \wedge Q) = Q \tag{3.33}$$

за всеки две събития $P, Q \in \boldsymbol{Events}$,

който приемаме като *аксиома*. Условието (3.33) може да се разглежда, като специален случай на дистрибутивност понеже

$$P \vee (P^{\perp} \wedge Q) = (P \vee P^{\perp}) \wedge (P \wedge Q) = \mathbf{1} \wedge Q = Q\,,$$

където във второто равенство сме използвали закони (3.29) и (3.27).

В алгебрата, орто-решетки, в които се изпълнява орто-модуларния закон се наричат **орто-модуларни решетки**.[50]

Забележете, че за събития P, Q в една класическа система (точка 2.11), ако $P \preccurlyeq Q$,

[49] ortho-modularity law

[50] ortho-modular lattices

то събитието $Q \wedge P^{\perp}$ е допълнението на P в Q,

$$Q \setminus P \;:=\; P^{\perp} \wedge Q\,, \tag{3.34}$$

понятие което по-нататък ще пренесем и в общи орто-модулари решетки. Така, закона за орто-модуларност приема вида:

$$\text{ако } P \preccurlyeq Q \text{ тогава } P \vee (Q \setminus P) \;=\; Q\,. \tag{3.35}$$

3.7 Състоянията като вероятности върху орто-решетката на събитията

Сигаме до мястото, където едва естествения завършек на аксиомите за състоянията в общите системи. Досега искахме те да са само изпъкнало подмножество в линейното пространство на функциите върху събитията. В следващата *аксиома* ще поискаме те да имат свойствата на естественото обобщение на понятието за вероятност:

> Всяко състояние $\rho \in \boldsymbol{States}$ изпълнява свойствата:
>
> адитивност
>
> $$\rho(Q) \;=\; \rho(P) + \rho(Q \setminus P)\,, \tag{3.36}$$

за всеки две събития P, $Q \in \boldsymbol{Events}$, за които $P \preccurlyeq Q$;

нормираност

$$\rho(\mathbf{1}) \,=\, 1\,. \tag{3.37}$$

Да припомним, че в случая на ситуацията $P \preccurlyeq Q$ при събития P, $Q \in \boldsymbol{Events}$ е в сила орто-модуларния закон (3.35).

От математическа гледна точка: за произволна орто-решетка $\mathcal{T}$ можем да въведем понятието за **вероятност върху** $\mathcal{T}$, като такава функция

$$\varphi : \mathcal{T} \to [0,1] \tag{3.38}$$

която изпълнява горните две условия (3.36) и (3.37). Тогава, ако означим с

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Prob.Func.}(\mathcal{T}) \\ &:= \left\{ \varphi : \mathcal{T} \to \mathbb{R} \,\middle|\, \varphi \text{ е вероятност върху } \mathcal{T} \right\}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

то горните аксиоматични условия (3.36) и (3.37) се записват кратко, като

$$\boldsymbol{States} \subseteq \boldsymbol{Prob.Func.}(\boldsymbol{Events})\,. \tag{3.40}$$

Също, лесно се проверява, че за всяка ортомрежетка $\mathcal{T}$ множеството $\boldsymbol{Prob.Func.}(\mathcal{T})$ е изпъкнало подмножество в линейното пространство на всички функции $\varphi : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ (упражнение).

Все още не сме сигурни, че системите, които аксиоматизираме ще имат достатъчно много състояния. Това ще следва от следната *аксиома*:

> За всяко *ненулево* събитие $P \in \boldsymbol{Events}$ съществува състояние $\rho \in \sigma$, в което P настъпва почти сигурно, т.е., $Prob_\rho(P) = 1$.

По-нататък ще покажем, че от аксиомите ни следва, че:

$$\boldsymbol{States} = \boldsymbol{Prob.Func.}(\boldsymbol{Events}), \tag{3.41}$$

т.е., в (3.40) всъщност имаме равенство.

Преди да продължим със заключителните аксиоми на квантово-логическия подход, нека дадем някои непосредствени следствия от горните аксиоми за състоянията, като вероятности върху орто-решетката на събитията. Най-напред, забележете, че от (3.36) и (3.37)

следва

$$\rho(\mathbf{0}) \;=\; 0\,, \tag{3.42}$$

понеже $1 = \rho(\mathbf{1}) = \rho(\mathbf{1} \vee (\mathbf{1} \backslash \mathbf{1})) = \rho(\mathbf{1}) + \rho(\mathbf{1} \backslash \mathbf{1})$ $= 1 \,+\, \rho(\mathbf{1} \backslash \mathbf{1})$ и $\mathbf{1} \backslash \mathbf{1} \;=\; \mathbf{1}^{\perp} \wedge \mathbf{1} \;=\; \mathbf{0}$. Друго следствие е, че

$$P \preccurlyeq Q \quad \Longrightarrow \quad \rho(P) \leqslant \rho(Q)\,, \tag{3.43}$$

от където следва и вече анонсираната в (3.6) вероятностна характеризация на релацията мажориране.

3.8 Елементарни събития. Ниво на събитие. Ранг на системата

По определение, **елементарно събитие** е събитие $P \in \boldsymbol{Events}$, такова, че за всяко друго събитие $Q \in \boldsymbol{Events}$ следва, че:

$$Q \preccurlyeq P \quad \Longrightarrow \quad Q \;=\; \mathbf{0} \text{ или } Q \;=\; P\,. \tag{3.44}$$

В теорията на частично наредените множества с *най-малък елемент* (и в частност, решетките с нула и единица) свойство (3.44) определя понятието **атом в частично наредено**

множество. Така, *елементарните събития – това са атомите на решетката на събитията.*

По определение, една решетка се нарича **атомарна**,[51] ако всеки ненулев елемент мажорира поне един атом. Нашата ***поредна аксиома*** гласи, че решетката на всички събития ***Events*** е атомарна. Подробно,

> всяко ненулево събитие мажорира поне едно елементарно събитие.

Обобщение на понятието за атом в решетка е понятието за *ниво*. Нека за определеност говорим конкретно за решетката на събитията ***Events***. По определение, нулевото събитие и само то има **ниво нула**. За едно *ненулево* събитие P, казваме че има **крайно ниво**, ако всяка верига

$$\begin{array}{c} 0 = P_0 \preccurlyeq P_1 \preccurlyeq P_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq P_r = P \\ P_0 \neq P_1 \neq P_2 \neq \cdots \neq P_r \end{array} \tag{3.45}$$

е *крайна* и в множеството на тези вериги има такива с *най-голяма дължина* r. Числото $r \geqslant 1$ се нарича **ниво на ненулевото събитие** P.

[51] atomic lattce

Ясно е, че *елементарните събития са тези и само тези събития, които са от ниво* 1.

Системата наричаме от **система от крайно ниво** или още **крайна система**, ако *единицата* **1** *има крайно ниво*. Тогава нивото на единицата ще наричаме **ранг на системата**.

Ще приемем, като *аксиоматично предположение* в нашия курс, че:

> Всички системи на квантовата информатика са крайни.

Това е равносилно на твърдението, че *всички събития имат крайно ниво*.

Едни от най-фундаменталните системи на квантовата информатика са системите от ниво 2: това е **системата на един бит**. По-нататък в този курс ще покажем, че *в следствие на аксиомите ни, има* по същество[52] *точно две системи от ниво две*: *това са* класическия *и* квантовия *бит*. Последния се нарича също ***q*-бит**.[53]

[52]или, по-точно казано, има "с точност до изоморфизъм"

[53]q-bit

За класическите системи от точка 2.11 (с множество на състоянията $\boldsymbol{Events} = \mathcal{P}(\Omega)$ по ф-ла (2.27)) елементарните събития, в смисъла на горното определение, са точно едноелементните подмножества, както и бяха наричани там. Също така, *степенните множества $\mathcal{P}(\Omega)$ са винаги атомарни решетки.* Друго просто твърдение, което получаваме е, че: *едно събитие на класическа система е от крайно ниво, тогава и само тогава, когато е крайно подмножество* (*на* Ω); *при това, неговото ниво е равно точно на броя на елементите това подмножество.* В частност, *всяка крайна класическа система* (а ние определихме само крайни), *е крайна в горния смисъл*, т.е., множеството Ω е крайно.

Забележка: Така, *крайните класически системи имат крайни множества от събития* $\boldsymbol{Events}$. Същевременно обаче, в *общия случай, крайните квантови системи няма да имат крайно много събития*(!). Даже квантовия бит ще има безкрайно много събития – и всичките, които са различни от $\mathbf{0}$ или $\mathbf{1}$, ще са елементарни.

В заключение на тази точка, ще дадем още

някои математически понятия и твърдения от теория на решетките, които ще играят важна роля в квантовата теория.

В едно частично наредено множество $\mathcal{T}$ и два негови елемента $a, b \in \mathcal{T}$ казваме, че

b **покрива** a,
ако $a \preccurlyeq b$, $a \neq b$ и за всеки елемент $c \in \mathcal{T}$,
$$a \preccurlyeq c \preccurlyeq b \quad \Longrightarrow \quad a = c \text{ или } b = c\,. \quad (3.46)$$

Така, твърдението, че a е атом на частично наредено множество $\mathcal{T}$ с най-малък елемент $\mathbf{0} \in \mathcal{T}$ е равносилно на изказването, че a покрива $\mathbf{0}$.

Разбира се, в квантовата теория ние ще използваме горното определение (3.46) главно за събития от орто-решетката ***Events*** (която преди всичко е и частично наредено множество). Затова следващото определение направо ще приведем за ***Events***. За едно събитие от крайно ниво $P \in$ ***Events***[54] ще казваме, че веригата (3.45) е **максимална верига**, ако в нея за всяко $j = 1, \ldots, r-1$

[54] а съгласно аксиомата по-горе в тази точка всички събития са от крайно ниво

имаме, че P_{j+1} *покрива* P_j. Еквивалентно, последното означава, че веригата (3.45) не може да се разшири с добавяне на междинни елементи.

Важна теорема *за орто-модуларни решетки* гласи, че *всяка максимална верига от нулата до елемент от крайно ниво има една и съща дължина* (*и следователно, това е и максималната дължина за дадения елемент*). Последното условие (теорема) в математиката е известно също като *условие* (*теорема*) *на Жордан – Хъолдер*.[55]

3.9 Закон за покриването

В тази точка ние ще дадем последната аксиома на квантово-логическия подход отнасяща се до събитията. За пълното завършване на аксиоматиката ще останат още две аксиоми, които вече се отнасят до състоянията и които ще въведем по-нататък.

Новата ни **аксиома** е известна също, като **закон за покриването** ([Pi76, (2.12): Axiom (A_2)]) и гласи следното:

[55] Jordan-Hölder chain condition

> Ако P е елементарно събитие, а Q е събитие, такова че $P \wedge Q = \mathbf{0}$, тогава $P \vee Q$ *покрива* Q.

Еквивалентно, *ако* P *е елементарно събитие, а* Q *е събитие, такова че* $P \wedge Q = \mathbf{0}$, *тогава* $(P \vee Q) \wedge P^{\perp}$ *е елементарно събитие*. Последната еквивалентност оставяме без доказателство.

В заключение на тази точка ще отбележим, че горната аксиома за покриването няма да играе никаква роля в следващите няколко точки, където ние ще въведем доста ключови понятия от квантовата теория. Аксиомата за покриването ще се използва съществено при описанието на геометричната структура на събитията в следващия параграф.