

9 Теория на измерването и проекционния постулат на фон Нойман. Квантови трансформации

В тази лекция са включени две основни теми, които всъщност могат да се обединят и в една по-обща: трансформации на квантовите системи. Това също могат да се нарекат “квантови трансформации”, но като термин това собствено сме го отнесли към втората част на лекцията, докато в първата част е посветена на проблема, какво се случва след измерване. Това е също вид трансформация, но е необратима и затова има по-специален характер. Теорията на измерването се занимава именно с този въпрос.

9.1 Теория на измерването

9.1.1 Началната постановка в теория на измерването. Итерационна повтаряемост на измерванията

Измерването е драстичен акт върху квантова система, при който често системата престава да съществува (поне в първоначалната си форма). Например, един от първите измислени начини за регистрация на елементарни частици е като се постави на пътя им фотоплака и те оставят точка върху нея. С това ние фактически измерваме положението на частицата. След това измерване обаче частицата престава да съществува в първоначалния си вид или по-точно, тя се свързва в една обща система с останалите частици на фотоплакмата, където ние повече не можем да я отделим. Това е пример за т.нар. “разрушително измерване.” Има обаче и “неразрушителни измервания,” при които след измерването системата запазва своя първоначален смисъл и в частност, върху нея отново може да се извърши измерване. Това включва в частност и повтаряне на вече направеното измерване.

Тук ще възникне нов вид повтаряемост при измерванията, която ние ще наречем **итерационна повтаряемост**, но преди това нека започнем с точната формулировка на началната постановка в теорията на измерването и свързаната с това нова аксиома.

За целта, ние ще надградим началната постановка от втората лекция (точка 2.1). Да си припомним, че в квантово-логическия подход това включваше две съвкупности във всеки модел на квантова система: съвкупността **Events** на събитията на системата и съвкупността **States** на състоянията на системата и заедно с това, функцията

$Prob :$

$$Events \times States \rightarrow [0, 1],$$

$$(Q, \rho) \mapsto Prob_{\rho}(Q) \ (\equiv Prob_{\rho}(Q)),$$

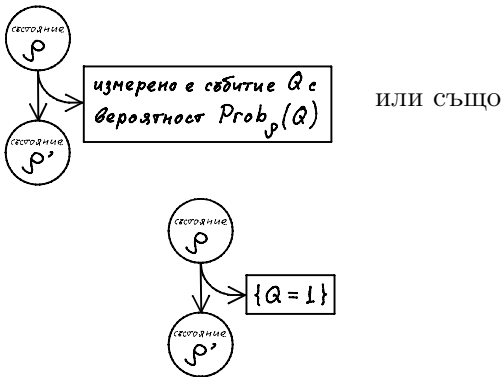
(ф-ла (2.1)), която задава вероятността $Prob_{\rho}(Q)$ за регистриране на събитието Q (т.е., измерване на “ $Q = 1$ ”) в състояние ρ . При неразрушителни измервания предполагахме, че след регистриране (измерване) на събитието Q системата преминава в ново състоя-

ние ρ' :

$$\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho'. \tag{9.1}$$

Какво е това състояние ρ' е предмет на нова аксиома, наречена проекционен постулат.

Ние ще формулираме този постулат след малко и ще поясним произхода на името му. Преди това ще дадем някои подготвителни пояснения. На следната фигура сме дали алтернативна схема на трансформацията (9.1):



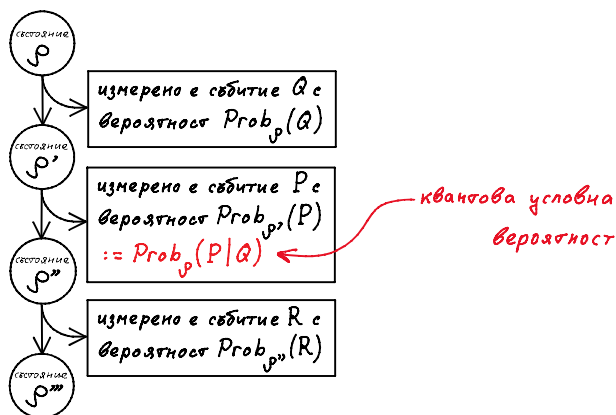
фиг. 57: Началната постановка на проекционния постулат надгражда постановката от първата аксиома от точка 2.1. На фигурата последната е изразена от стрелката “↘”, която завива в хоризонтална посока. Надграждането е представено на фигурата от вертикалната черта “↓”:

системата преминава в ново състояние ρ' след измерването.

Да си спомним от втората лекция (точка 2.5), че състоянията (и в частност, също и ρ') се определят напълно, като функции от събитията:

$$\rho'(P) \equiv \text{Prob}_{\rho'}(P) . \quad (9.2)$$

Затога, ние извършваме ново измерване (т.е., регистриране) на някакво друго събитие, да речем, P . Итерирайки схемата от фиг. 57 ние заключаваме, че системата отново преминава в евентуално ново състояние, ρ'' , което на свой ред можем да тестваме с измерването на поредно събитие R . Така, фиг. 57 се итерираща до следната схема:



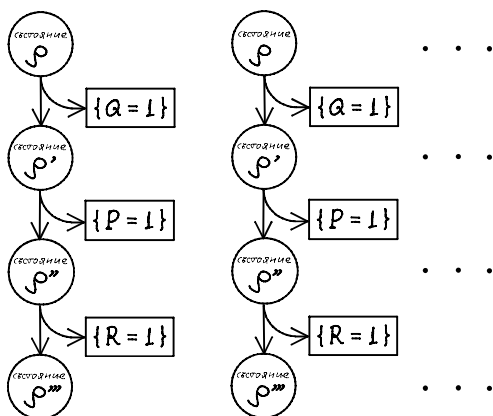
фиг. 58: Итериране на схемата от фиг. 57. В частност, вероятността след първата итерация е това, което в класическата теория на вероятностите се нарича условна вероятност.

Достигахме до много важна интерпретация: виждаме, че вероятността $Prob_{\rho'}(P)$ от (9.2) е аналога в квантовата теория на понятието **условна вероятност**, която ще означим с:

$$Prob_{\rho}(P|Q) := Prob_{\rho'}(P) \quad (9.3)$$

и ще наречем **вероятност за настъпване (регистриране) на събитието P при условие, че преди това е настъпило (регистрирано) събитието Q в състояние ρ .**

Така, както вече отбелязахме, теорията на измерването ни води до ново понятие за повтаряемост на измерванията: това е итерационната повтаряемост. Тя не бива да се смесва с повтаряемостта дискутирана във втората лекция (точка 2.3). Последната можем да изобразим на горните фигури, като “хоризонтална повтаряемост”:



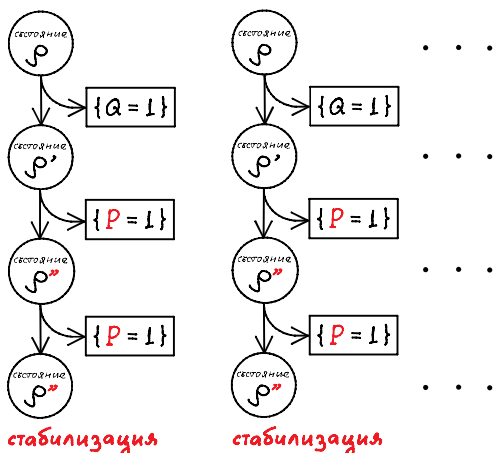
фиг. 59: “Хоризонтална” повтаряемост на измерванията:

това е повторение на опита “от начало”, т.е., приготвяме отново и отново системата в състояние ρ и в него повтаряме измерването на събитието Q .

Хоризонталната повтаряемост е фактически заложена в самото понятие за вероятност

$Prob_{\rho}(Q)$, посредством закона за големите числа (ф–ла (2.6)). Тук ние повтаряме измерванията едно след друго, като всеки път се връщаме от самото начало: приготвяме системата в началното състояние ρ и измерваме събитието Q .

При “вертикалната”, итерационна повтаряемост ние продължаваме измерването в новото състояние, което е получено в резултат на приключилото измерване. В една първоначална форма, проекционния постулат може да се изкаже и така: ако след регистриране на събитието P ние отново измерим същото събитие, но в новото състояние ρ'' , получено след предходното измерване, то събитието P ще настъпва вече с вероятност 1 и състоянието ще престане да се променя след измерване на P . Това може да наречем стабилизация при итериране на едно и също измерване, което е изобразено на долната фигура:



фиг. 60: “Вертикалната”, итерационна повтаряемост на измерванията (това е “измерване след измерване”) и стабилизация на резултатите при повтаряне на еднакви измервания.

9.1.2 Проекционния постулат

Споменатият по-горе принцип на стабилизация може да се приеме, като изходна аксиома на теорията на измерването, но ние ще приемем една по-силна форма и по-късно ще приведем нейна обосновка от по-общи аксиоматични предположения. Фон Нойман предлага следната закон за изменение на състоянието след измерване:

Проекционен постулат на фон Нойман.

След регистриране на събитие Q (т.е., измерването на $Q = 1$) в състояние ρ системата преминава със скок (т.е., “внезапно”) в ново състояние ρ' , определено по формулата:

$$\rho'(P) = \frac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}, \quad (9.4)$$

като функция на събитията P .

По такъв начин, използвайки означението (9.3), ф-ла (9.4) може да се презапише, като:

$$Prob_{\rho}(P|Q) = \frac{\rho(QPQ)}{Prob_{\rho}(Q)}, \quad (9.5)$$

за всеки две събития Q и P , и състояние ρ . Забележете, в числителя на ф-ла (9.5) QPQ не е събитие в общия случай, затова не можем да запишем $\rho(QPQ)$, като “ $Prob_{\rho}(QPQ)$ ” по принцип. Всъщност, QPQ е наблюдаема, която ще разгледаме по-специално малко по-късно в тази точка, така, че $\rho(QPQ)$ е средната стойност на QPQ в състоянието ρ . В точка 9.1.8 ние ще предадем на $\rho(QPQ)$ смисъл на вероятност, но все пак, това няма

да е вероятност на събитие, а ще я наречем “вероятност на ефект”. Въз основа на това ние ще обосновем там ф-ла (9.5) (и (9.4)) от първични аксиоматични предположения.

Нека да отбележим обаче, че и в първоначалния си вид проекционния постулат с формула (9.5) има известна “естественост”. Например, ако събитията Q и P са *съвместни*, т.е. комутират,

$$QP = PQ = Q \text{ и } P (\equiv P \text{ и } Q),$$

то ф-ла (9.5) приема вида

$$Prob_{\rho}(P|Q) = \frac{Prob_{\rho}(P \text{ и } Q)}{Prob_{\rho}(Q)}, \quad (9.6)$$

(понеже тогава $QPQ = Q^2P = QP$). Но ф-ла (9.6) е всъщност формулата на Бейс от теория на вероятностите, която въвежда класическата условна вероятност. Така, ф-лата на Фон Нойман (9.5) се явява квантовата формула на Бейс!

9.1.3 Квантови скокове

Преди да преминем към анализа на проекционния постулат и неговите следствия ще обър-

нем внимание на един детайл от формулировката му по-горе. Ние написахме, че трансформацията се извършва “със скок” (или още, “внезапно”). От математическа или аксиоматична гледна точка това няма значение за нашия курс. Това става от значение, когато се направи по-обща постановка на квантовата теория, в която се включи и непрекъснатото време. Все пак ние включихме този израз, защото това е една от физическите забележителности на квантовата теория. Трансформациите на състоянията със скок след измерване се наричат още “квантови скокове”. Едни от най-забележителните квантови скокове в природата са т.нар. “енергетични преходи” в атомите и молекулите, при които се излъчва фотон и електроните “прескачат” от едни енергетични нива на други. Други “квантови скокове” са разпадите на нестабилните атомни ядра. Разбира се, от “най-фундаментална” гледна точка може да се спори доколко това са наистина внезапни преходи, но от макроскопична гледна точка това са мигновени скокове в състоянието на системата след макроскопична регистрация на настъпилия ефект: излъч-

ване или разпад. По-късно в тази лекция ние ще се върнем отново върху феномена на “скока след измерване” и ще покажем някои от неговите парадоксално звучащи следствия.

9.1.4 Формулата за условните средни стойности и коректността на проекционния постулат

Да разгледаме въпроса дали ф-ла (9.4) наистина определя състояние, т.е., дали имаме *коректност* (*непротиворечивост*) на проекционния постулат.

Най-напред, ами ако знаменателя в (9.4) е нула, какво правим тогава? Отговор: знаменателя в (9.4) е $\rho(Q) = \text{Prob}_\rho(Q)$, т.е., това е вероятността за регистрация на Q в състояние ρ ; следователно, с вероятност нула ще ни се налага да делим на нула във ф-ла (9.4). Но това е само началото.

Според аксиомите на квантово-логическия подход, състоянията са определени функции на събитията, които трябва да се подчиняват на известни аксиоматични условия. Ние ще проверим това обаче в алгебричния подход, където както вече знаем, квантово-

логическия подход има интерпретация. Да припомним, че в алгебричния подход състоянията са отново функции, но на наблюдаемите, като те са продължение на съответните им функции в квантово–логическия подход, когато разглеждаме събитията, като наблюдаеми. Още най-първото условие върху състоянията, като функции на наблюдаемите – *линейността* – определя, какво е продължението на ф–ла (9.4), когато заменим P с произволна наблюдаема A . Наистина, спектралната теорема ни казва, че събитията пораждаат линейно алгебрата на наблюдаемите. Следователно, ρ' във ф–ла (9.4) има единствено продължение, като линеен функционал и то е:

$$\rho'(A) = \frac{\rho(QAQ)}{\rho(Q)} \quad (9.7)$$

за произволен елемент A на алгебрата на наблюдаемите $\mathcal{A}$ (оставяме, като упражнение детайлната обосновка на ф–ла (9.7) от (9.4)).

По-нататък, следва да проверим, че така получения линеен функционал ρ' (9.7) изпълнява аксиоматичните условия за състояние от алгебричния подход (аксима (a3) от точка 5.10). Това бяха условията, че

- ρ' е положителен линеен функционал: $\rho'(A^*A) \geq 0$ за всяко $A \in \mathcal{A}$? *Наистина:* това следва от това, че числителя и знаменателя в (9.7) са неотрицателни при замяната $A \mapsto A^*A$, понеже $\rho(QA^*AQ) = \rho((AQ)^*(AQ)) \geq 0$ (ρ е също положителен линеен функционал).
- ρ' е нормиран линеен функционал: $\rho'(\hat{1}) = 1$? Това е очевидно.

И така, линейният функционал ρ' , както е определен от проекционния постулат, наистина може да задава състояние на системата.

9.1.5 Защо постулатът на Фон Нойман се нарича проекционен? Матрицата на плътността след измерване. Трансформация на чистите състояния след измерване.

Най-общо казано, проекционния постулат е “проекционен”, защото от него следва принципа за стабилизация, който формулирахме по-горе в точка 9.1.1. *Наистина*, нека разгледаме верига от последователни измервания

$$\rho \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho' \xrightarrow{\{P=1\}} \rho'' \quad (9.8)$$

и нека $P := Q$, т.е., по след регистриране на Q отново сме измерили Q . Тогава имаме

$$\rho''(B) = \frac{\rho'(PBP)}{\rho'(P)}, \quad \rho'(A) = \frac{\rho(QAQ)}{\rho'(Q)} \quad (9.9)$$

(за всеки две наблюдаеми A и B) и след известни линейни манипулации, които оставяме за упражнение, отчитайки също, че $Q = P$ както и че $Q^2 = Q$, понеже Q е събитие то в крайна сметка получаваме, че

$$\rho''(A) = \rho'(A)$$

за всеки елемент $A \in \mathcal{A}$, т.е., ρ'' и ρ' са едни и същи функции и следователно, са едни и същи състояния.

Забележете също, че при прехода $\rho \xrightarrow{\{Q=1\}} \rho'$ имаме

$$\rho'(Q) = 1,$$

което означава, че след регистриране на събитието Q системата преминава в собствено състояние за Q .

И така, “проекционността” преди всичко отговаря на “стабилизацията”. Но всъщност, да си спомним от по-предната лекция, че *събитията се представят от ортогонални про-*

ектори върху подпространства в хилбертовото пространство на състоянията на системата. Ние ще видим сега, как проекционни оператори действително “проектират при измерване”. За целта ще видим първо, как се трансформират матриците на плътността на състоянията след измерване и после ще приложим това за специалния случай на чисти състояния, които тогава имат вектори на състояние.

Да започнем с първия въпрос и да си припомним, че матрицата на плътността на състояние ρ е наблюдаема $\hat{\rho}$, която е еднозначно определена по формулата

$$\rho(A) = \text{Tr} \hat{\rho} A \quad (9.10)$$

за всеки елемент A на алгебрата на наблюдаемите $\mathcal{A}$. Твърдим, че ако матриците на плътността на състоянията ρ и ρ' са $\hat{\rho}$ и $\hat{\rho}'$, съответно, то ако това са състоянията на квантовия преход $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho'$, получен в следствие на измерването на събитието Q , то е в сила връзката

$$\hat{\rho}' = \frac{1}{\text{Tr} \hat{\rho} Q} Q \hat{\rho} Q. \quad (9.11)$$

Наистина, съгласно еднозначността на определяне на матрицата $\hat{\rho}'$ от аналога на ф–ла (9.10) достатъчно е да изведем равенството

$$Tr \hat{\rho}' A = \frac{Tr Q \hat{\rho} Q A}{Tr \hat{\rho} Q}, \quad (9.12)$$

но това е точно равенството (9.7) след представянето на функционалите ρ и ρ' с матриците им на плътността и отчитане на цикличното равенство на следата:

$$Tr \hat{\rho} Q A Q = Tr Q \hat{\rho} Q A.$$

След като установихме ф–ла (9.11) за трансформацията на матрицата на плътността на състояние след измерване, нека я приложим за случая, когато изходното състояние ρ е *чисто*. Последното, както знаем е еквивалентно на това, че матрицата на плътността $\hat{\rho}$ има вида

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad (9.13)$$

за *единичен* вектор Ψ на хилбертовото пространство на състоянията $\mathcal{H}$, наречен *вектор на състоянието*. Но от ф–ла (9.11) директно следва тогава, че и матрицата на плътността

$\hat{\rho}'$ ще изпълнява тогава аналогично равенство,

$$\hat{\rho}' = |\Psi'\rangle\langle\Psi'|, \quad (9.14)$$

ако положим

$$\Psi' := \frac{1}{\|Q\Psi\|} Q\Psi. \quad (9.15)$$

Наистина, ф-ла (9.14) ще се получи, ако заместим (9.13) в (9.11) и отчетем равенството

$$Q|\Psi\rangle\langle\Psi|Q = |Q\Psi\rangle\langle Q\Psi|,$$

съгласно правилата на бра-кет смятането от по-предишната лекция (препоръчваме тази проверка на всеки читател да я извърши докрай, като полезно упражнение на бра-кет смятането).

И така, ф-ли (9.13) и (9.14) имат много важно значение. Първо, те показват, че *след измерване на произволно събитие в чисто състояние трансформираното състояние е пак чисто!* Второ, векторът на състояние на трансформираното чисто състояние се получава с ортогонално проектиране $Q\Psi$ на изходния вектор Ψ на състояние върху линейното подпространство, съответстващо на регистрираното събитие Q и последващо премащабиране за да получим отново единичен вектор

на състояние. Това вече напълно мотивира наименованието “проекционен постулат.”

9.1.6 При настъпване на елементарни събития винаги състоянията се изчистват

Формулираното твърдение в заглавието на тази подточка е забележително и е изключително важно. То е пряко следствие от ф-ла (9.11) за трансформация на матрицата на плътността при измерване на събитие.

Нека формулираме пълното твърдение. *Да предположим, че изходното състояние ρ е общо, но регистрираното събитие Q е елементарно събитие. Съгласно по-предната лекция, Q има вида*

$$Q = |\Phi\rangle\langle\Phi|, \quad (9.16)$$

за единичен вектор Φ от хилбертовото пространство на състоянията $\mathcal{H}$. Тогава твърдим, че след настъпване на събитието Q системата в чистото състояние определено от вектора Φ .

За доказателство на това твърдение да

заместим във Φ -ла (9.11) вида (9.16) на Q :

$$\hat{\rho}' = \frac{1}{\text{Tr} \hat{\rho} |\Phi\rangle\langle\Phi|} |\Phi\rangle\langle\Phi| \hat{\rho} |\Phi\rangle\langle\Phi| .$$

С изразите в числителя и знаменателя вече сме имали опит: те дават следните резултати:

$$|\Phi\rangle\langle\Phi| \hat{\rho} |\Phi\rangle\langle\Phi| = (\langle\Phi| \hat{\rho} |\Phi\rangle) |\Phi\rangle\langle\Phi| ,$$

$$\text{Tr} \hat{\rho} |\Phi\rangle\langle\Phi| = \langle\Phi| \hat{\rho} |\Phi\rangle ,$$

откъдето получаваме:

$$\hat{\rho}' = |\Phi\rangle\langle\Phi| .$$

Последното на свой ред означава, че $\hat{\rho}'$ е чисто състояние с вектор Φ , което и се твърдеше.

Нека сега да коментираме по-детайлно значението на доказаното твърдение. А то е, че получаваме практически метод за конструиране на чисти състояния. Наистина, ако подложим произволно състояние на измерване в елементарно събитие, то полученото състояние ще е винаги едно и също чисто състояние. Така, измерването служи като “филтър” или, “филтрация на състоянието”. Именно такава е ситуацията в експеримента с поляризаторите

от първата ни лекция: там поляризаторите са филтри, които правят измерване на елементарно събитие. Затова, макар преди поляризаторите фотоните да са в произволно (всъщност, смесено) състояние на поляризация, то след преминаване през поляризатор става измерване на елементарно събитие и поляризационното състояние се изчиства.⁶⁸

9.1.7 Комутируемост при последователни измервания

Както изтъкнахме още в уводната лекция, една от новите, изключителни черти на квантовата теория, непозната преди нея при описанието на природните феномени е зависимостта от реда на наблюденията или още, измерванията. Количествено, това се

⁶⁸Както читателя може би е забелязал, ние се изразихме само за “поляризационното състояние” на фотона. Пълното състояние на фотона е като на съставна система от различни т.нар. “степени на свобода” и математически се дава от тензорно произведение (т.е., съчетаването на няколко степени на свобода е образуване на съставна система и се описва от теорията от миналата лекция).

изразява в нарушаването на закона на Бейс:

$$\begin{aligned} & Prob_{\rho}(Q) Prob_{\rho}(P|Q) \\ & \neq Prob_{\rho}(P) Prob_{\rho}(Q|P) \end{aligned} \quad (9.17)$$

при някои събития Q , P и състояние ρ .

Ако събитията Q и P комутират, $QP = PQ$, то както отбелязахме по-горе в точка 9.1.2 и ф-ла (9.6), то двете страни на ф-ла (9.17) са равни на

$$Prob_{\rho}(P \text{ и } Q) \equiv Prob_{\rho}(Q \text{ и } P)$$

и това става при всяко състояние ρ . С други думи, тогава закона на Бейс се изпълнява. Вярно е и обратното: ако за две събития Q и P при всяко състояние ρ във ф-ла (9.17) се изпълнява равенство вместо неравенство, то тогава събитията Q и P комутират ($QP = PQ$).

Ще дадем *доказателството* на това твърдение схематично, като детайлите оставяме за упражнение (незадължително за настоящия курс).

- Най-напред, ако във ф-ла (9.17) се изпълнява равенство вместо неравенство, то имаме

$$\rho(QPQ) = \rho(PQP) \quad (9.18)$$

и това се изпълнява за всяко състояние ρ по допускане.

- Формула (9.18) ни дава, че

$$\text{Tr} \hat{\rho} Q P Q) = \text{Tr} \hat{\rho} P Q P \quad (9.19)$$

при всяка матрица на плътността $\hat{\rho}$.

- Множеството на всички възможни матрици на плътността поражда линейно алгебрата на наблюдаемите $\mathcal{A}$ (защо? – указание: използвайте, че за всеки ортогонален проектор, т.е., събитие R следва, че $\frac{1}{\text{Tr} R} R$ е възможна матрица на плътността). Следователно, равенство (9.19) ще продължава да се изпълнява, ако заменим $\hat{\rho}$ с произволен елемент A на алгебрата на наблюдаемите $\mathcal{A}$, в частност, ако заменим $\hat{\rho}$ с $|\Psi\rangle\langle\Phi|$ за произволни два вектора Ψ и Φ на хилбертовото пространство на състоянията $\mathcal{H}$. Последното на свой ред ни дава

$$\langle\Phi| Q P Q |\Psi\rangle = \langle\Phi| P Q P |\Psi\rangle \quad (9.20)$$

за всеки Ψ и Φ , в частност и за ортонормиран базис (например, стандартния) на $\mathcal{H}$. Следователно, $Q P Q$ и $P Q P$ са една и

съща матрица (един и същи елемент на $\mathcal{A}$),

$$QPQ = PQR. \quad (9.21)$$

- Оттук нататък, работата продължава изцяло в алгебрата $\mathcal{A}$: от (9.21) получаваме, че

$$\begin{aligned} - (i(QP - PQ))^2 &\equiv (QP - PQ)^2 \\ &= QPQP + PQQP - QPPQ - PQQP = 0 \end{aligned}$$

(защо; а за какво са ни минуса и имагинерната единица в началото?) и тогава спектралната теорема ни дава, че

$$QP - PQ = 0,$$

което и трябваше да се докаже.

Така, установихме допълнителния аспект при съвместната измеримост на събития, който анонсирахме още от първата лекция. Това беше еквивалентността на комутируемостта на събития и изпълнението на закона на Бейс. Има обаче още един допълнителен аспект на комутируемостта. Това е факта, че *при последователна регистрация на комутиращи събития крайното състояние не зависи от реда на регистрация, както и обратното,*

ако за всяко състояние при последователна регистрация на събитията Q и P системата преминава в едно и също крайно състояние, независимо от реда на регистрация, то Q и P комутират. Схематично, последното твърдение е изобразено в първата еквивалентност на следната формула:

$$\begin{aligned}
 PQ = QP & \iff \begin{array}{c} \text{Diagram showing state transitions:} \\ \text{Initial state } \rho \text{ branches into } \rho' \text{ (labeled } \{Q=1\}) \text{ and } \rho_1' \text{ (labeled } \{P=1\}). \\ \text{From } \rho', \text{ a transition labeled } \{P=1\} \text{ leads to } \rho''. \\ \text{From } \rho_1', \text{ a transition labeled } \{Q=1\} \text{ leads to } \rho''. \\ \text{The final state is } \rho'' \text{, with a label } (\forall \rho) \text{ at the bottom right.} \end{array} \\
 & \iff \begin{array}{l} \text{Prob}_{\rho}(Q) \cdot \text{Prob}_{\rho}(P|Q) \\ = \text{Prob}_{\rho}(P) \cdot \text{Prob}_{\rho}(Q|P) \end{array} \quad (\forall \rho)
 \end{aligned}
 \tag{9.22}$$

а втората еквивалентност е от предходното твърдение (така, ф-ла (9.22) съдържа сумарно резултатите на тази подточка).

Доказателството на последното твърдение (т.е., първата еквивалентност във ф-ла (9.22)) ще оставим, като упражнение, надхвърлящо очакваните умения в този курс.

9.1.8 Вероятност за следване на едно събитие след друго

Ние видяхме в предходната подточка, че за некомутиращи събития Q и P закона на Бейс се нарушава и дава неравенство (9.17). Нека означим лявата и дясната страни там с

$$\begin{aligned} Prob_{\rho}(P \text{ след } Q) &:= Prob_{\rho}(Q) Prob_{\rho}(P|Q) \\ &\equiv \rho(QPQ), \end{aligned} \quad (9.23)$$

$$\begin{aligned} Prob_{\rho}(Q \text{ след } P) &:= Prob_{\rho}(P) Prob_{\rho}(Q|P) \\ &\equiv \rho(PQP) \end{aligned} \quad (9.24)$$

и да ги наречем, съответно:

- вероятност за настъпване първо на Q и след това P ;
- вероятност за настъпване първо на P и след това Q .

Забележете, че в общия случай:

$$\begin{array}{ccc} Prob_{\rho}(P \text{ след } Q) & \neq & Prob_{\rho}(Q \text{ след } P) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ Prob_{\rho}(P \text{ и } Q) & = & Prob_{\rho}(Q \text{ и } P) \end{array}$$

като равенствата настъпват, ако Q и P комутират. Забележете също, че ако въведем

още означението

$$P \text{ след } Q := QPQ, \quad (9.25)$$

то в общия случай това няма да е събитие, но ще бъде наблюдаема, която ще изпълнява специалното *операторно* неравенство:

$$\hat{0} \leq QPQ \leq \hat{1} \quad (9.26)$$

(без доказателство). Наблюдаеми, които изпълняват неравенството (9.26) се наричат понякога **ефекти** и благодарение на това неравенство ще следва, че

$$0 \leq \rho(QPQ) \leq 1, \quad (9.27)$$

от където пък следва, че числата $Prob_{\rho}(P \text{ след } Q)$ и $Prob_{\rho}(Q \text{ след } P)$, които по-горе нарекохме вероятности, наистина могат да се нарекат така.

9.1.9 Обосноваване на проекционния постулат от принципа за стабилизация

Проекционният постулат от точка 9.1.2 има своята “естественост”, като “квантова формула на Бейс”, но за аксиоматична пълнота ще

дискутираме сега една възможност той да се обоснове от по-обща аксиома. Началната постановка остава, както в точка 9.1.1: предполагаме, че след регистрация на събитие Q в състояние ρ системата преминава (“със скок”) в ново състояние ρ' , което изразяваме с: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho'$ и означаваме, както преди $Prob_{\rho}(P|Q) := \rho'(P)$ (ф-ла (9.2)), както и въвеждаме означението $Prob_{\rho}(P \text{ след } Q) := Prob_{\rho}(Q) Prob_{\rho}(P|Q)$. Въпросът е какво е състоянието ρ' или с други думи, как се определя квантовата условна вероятност $Prob_{\rho}(P|Q) = ?$ (еквивалентно, $Prob_{\rho}(P \text{ след } Q) = ?$).

За целта, нека да разгледаме четири по-обща аксиоматични принципа.

(Принцип на стабилизацията.)

Ако след регистриране на събитие Q в състояние ρ се е установило състояние ρ' и ако тогава отново измерим Q в ρ' , то Q ще настъпи с вероятност 1 и състоянието повече няма да се промени (т.е., ще остане ρ'). Схематично, този принцип може да се изрази с импликацията:

$$\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' \quad (9.28)$$

$$\implies \text{Prob}_{\rho'}(Q) = 1 \quad \text{и} \quad \rho' \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho'.$$

(Принцип на потвърждението.)

Ако събитието Q настъпва в състоянието ρ с вероятност 1, то след измерване на Q състоянието остава същото. Схематично, този принцип може да се изрази с импликацията:

$$\text{Prob}_{\rho}(Q) = 1 \quad \implies \quad \rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho. \quad (9.29)$$

(Всъщност, частта “и ...” в дясната страна на импликацията (9.28) не е необходима, защото следва от (9.29).)

(Принцип: “формулата на Бейс е вярна за комутиращи събития”.)

Подробно: ако събитията Q и P комутират, то $\text{Prob}_{\rho}(P|Q) = \frac{\text{Prob}_{\rho}(P \text{ и } Q)}{\text{Prob}_{\rho}(Q)}$.

(Принцип на смесването.)

Ако имаме смес на състояния, $\rho = q_1\rho_1 + q_2\rho_2$ и имаме

$$\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho', \quad \rho_j \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho'_j,$$

за $j = 1, 2$, то е в сила формулата за вероятностна смес:

$$\begin{aligned} & Prob_{\rho}(P \text{ след } Q) \\ &= q_1 Prob_{\rho_1}(P \text{ след } Q) + q_2 Prob_{\rho_2}(P \text{ след } Q) . \end{aligned} \quad (9.30)$$

Първо, всичките четири принципа по-горе следват от проекционния постулат от точка 9.1.2: някои от тези твърдения вече установихме в предните подточки, а останалото го оставяме без доказателство, като незадължително за курса упражнение.

Вярно е и обратното: от горните четири принципа следва проекционния постулат: това също ще изложим схематично, като пропуснем някои по-технически детайли.

Преди всичко, това което трябва да се изведе е формулата $Prob_{\rho}(P \text{ след } Q) = \rho(QPQ)$ (второто равенство на ф-ла (9.24)). Поради принципа на смесването, достатъчно е да се установи това равенство само за чисти състояния, $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. Така, нужно е да покажем, че ако ρ е чисто състояние с вектор Ψ , то имаме

$$Prob_{\rho}(P \text{ след } Q) = \langle\Psi| QPQ |\Psi\rangle$$

(съгласно формулата на Дирак за средните стойности). Последното на свой ред означава да докажем, че след регистриране на Q в чисто състояние с вектор Ψ , то системата преминава отново в чисто състояние и то има вектор Φ , който е пропорционален на проекцията $Q\Psi$. Това е нещо, което вече установихме в точка 9.1.6, като следствие на проекционния постулат, а сега трябва да изведем същите тези заключения само от горните четири принципа.

9.1.10 Вероятността за преход от гледна точка на теорията на измерването

Нека сега видим, как въведената по-рано вероятност за преход наистина съответства на преход от гледна точка на теория на измерването. Наистина, да предположим, че в състояние Ψ е направено измерване и е регистрирано събитие Q . Ние вече знаем от по-предната лекция, че вероятността за това е

$$Prob_{\Psi}(Q) = \|Q\Psi\|^2. \quad (9.31)$$

От друга страна, съгласно точка 9.1.5 по-горе, системата преминава след измерване отново в чисто състояние с вектор $\frac{1}{\|Q\Psi\|} Q\Psi$ (ф-ла (9.15)), който нека сега да означим с Φ . Така, имаме преход при регистриране на Q :

$$\Psi \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \Phi = \frac{1}{\|Q\Psi\|} Q\Psi \quad (9.32)$$

и този преход се извършва с вероятност (9.31), която лесно може да се изрази само чрез векторите Ψ и Φ :

$$Prob_{\Psi}(Q) = |\langle \Psi | \Phi \rangle|^2, \quad (9.33)$$

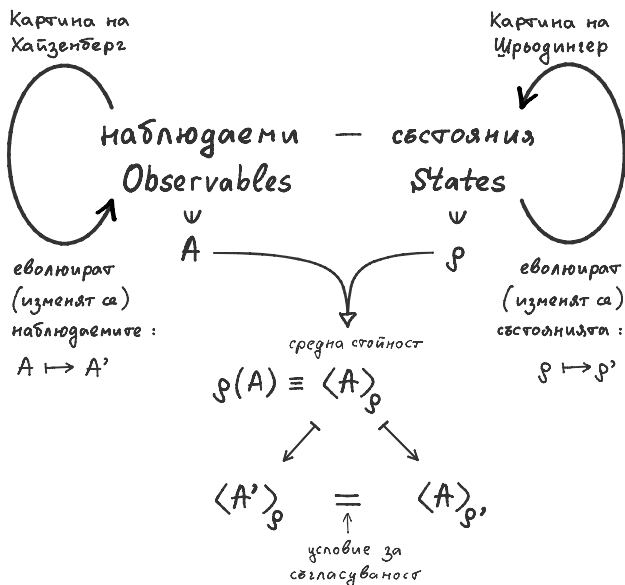
което следва, като заместим $\Phi = \frac{1}{\|Q\Psi\|} Q\Psi$ в последната формула и сведем израза до дясната страна на (9.31). Забележете, че в случая няма значение дали Q е елементарно събитие, а само че става преход $\Psi \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \Phi$. От друга страна, този преход е гарантиран, ако Q е елементарното събитие $Q = |\Phi\rangle\langle\Phi|$ (сгласно точка 9.1.6).

9.1.11 Проекционния постулат формулиран за измерване на наблюдаеми

Ако A е наблюдаема със спектрално разлагане $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_m Q_m$, то ако при измерване на A в чисто състояние с вектор Ψ е измерена стойност α_k , то системата преминава отново в чисто състояние с вектор $\Phi = \frac{1}{\|Q\Psi\|} Q\Psi$.

9.2 Квантови трансформации

9.2.1 Две картини: на Хайзенберг и на Шрьодингер



фиг. 61: Двете картини на квантовите трансформации.

Квантови трансформации в картината на Шрьодингер: аксиоматични условия

- “чисто състояние” $\mapsto$ “чисто състояние”;
- смес на състояние $\mapsto$ смес на състояние със същите тегла;

- вероятностите за преход се запазват:
ако
 - чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^n$ и
 - чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^n$, то

$$p_{\Psi \mapsto \Phi} = p_{\Psi' \mapsto \Phi'} . \quad (9.34)$$

Теорема на Вигнер / Wigner.

За всяка квантова трансформация съществува единствена трансформация $U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, такава че векторът Ψ' е пропорционален на $U\Psi$ при всяко трансформиране $\Psi \mapsto \Psi'$, като се случва една от следните две възможности:

- U е линейна и

$$\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle , \quad (9.35)$$

за всеки $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$;

- U е анти-линейна и

$$\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle} , \quad (9.36)$$

за всеки $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$.

U е единствена с точност до пропорционалност.

Вярна е и обратната посока.

9.2.2 Унитарни трансформации и матрици (математическа теория)

- Нека $U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n'}$ е линейна трансформация. Тогава

$$\left. \begin{aligned} \underbrace{\langle U\Psi | U\Phi \rangle} &= \underbrace{\langle \Psi | \Phi \rangle} \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n) \\ \langle \Psi | U^*U\Phi \rangle &= \langle \Psi | \hat{1}\Phi \rangle \end{aligned} \right\} \\ \iff U^*U = \hat{1}, \quad (9.37)$$

като казваме, че U е **унитарна трансформация**.

- Ако U е квадратна матрица и $U^*U = \hat{1}$, то U е обратима, понеже

$$\begin{aligned} 1 &= \deg \hat{1} = \det U^*U = \det U^* \det U \\ &= |\det U|^2. \end{aligned}$$

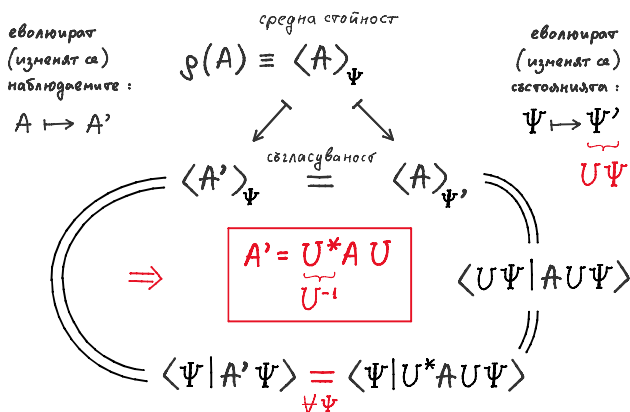
Тогава:

$$U^{-1} = U^* \quad (9.38)$$

и такива матрици наричаме **унитарни матрици**.

Извод: унитарните матрици задават обратими квантови трансформации.

9.2.3 Условие за съгласуваност между двете картини



фиг. 62: Съгласуваността между двете картини на квантовите трансформации.

9.2.4 Квантови трансформации в картината на Хайзенберг

- Трансформацията $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : A \mapsto U^* A U$ за $U^* = U^{-1}$ има свойствата:

- $U^{-1}(AB)U = (U^{-1}AU) (U^{-1}BU),$
- $U^{-1}\hat{1}U = \hat{1},$

$$- (U^{-1}AU)^* = U^*A^*U^{-1*},$$

които означават, че това е морфизъм на $*$ -алгебри с единица.

- Горният вид изоморфизми се наричат “**вътрешни**” / “inner”.
- Математически резултат: *всички $*$ -изоморфизми на $Mat_n(\mathbb{C})$ в себе си са вътрешни.*
- Това показва, че за крайни, чисто квантови системи, двете картини на описание на квантовите трансформации са еквивалентни.

9.2.5 Връзка между унитарните матрици и орто-нормираните базиси

Матрицата U е унитарна, тогава и само тогава, когато колоните ѝ (или редовете) са

орто-нормиран базис:

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\begin{pmatrix} \overline{u}_{11} & \overline{u}_{21} & \overline{u}_{31} & \cdots & \overline{u}_{n1} \\ \overline{u}_{12} & \overline{u}_{22} & \overline{u}_{32} & \cdots & \overline{u}_{n2} \\ \overline{u}_{13} & \overline{u}_{23} & \overline{u}_{33} & \cdots & \overline{u}_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{u}_{1n} & \overline{u}_{2n} & \overline{u}_{3n} & \cdots & \overline{u}_{nn} \end{pmatrix}}^{U^*} \quad \overbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}}^U \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \cdots \quad \downarrow \\
 u_{\cdot 1} \quad u_{\cdot 2} \quad u_{\cdot 3} \quad \cdots \quad u_{\cdot n}
 \end{array}$$

$$= \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}^{\hat{1}}$$

като при това, като оператор $U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$,

$$e_j \xrightarrow{U} u_j$$

за $j = 1, \dots, n$, където e_j е стандартния орто-нормиран базис на $\mathbb{C}^n$.

Наистина, имаме:

$$U^*U = \hat{1} \iff \langle u_j | u_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases} \quad (9.39)$$

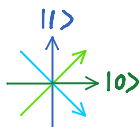
и също така,

$$UU^* = \hat{1} \quad (9.40)$$

$$\iff |u_1\rangle\langle u_1| + \dots + |u_n\rangle\langle u_n| = \hat{1}.$$

9.2.6 Гейт на Адамар

$$\begin{Bmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{Bmatrix} \xrightarrow{H} \begin{Bmatrix} 2^{-1/2} |0\rangle + 2^{-1/2} |1\rangle \\ 2^{-1/2} |0\rangle - 2^{-1/2} |1\rangle \end{Bmatrix}$$



фиг. 63: Гейт на Адамар