Анализ с безкрайно малки аксиоматичен подход

Анализ с безкрайно-малки: аксиоматичен подход

Николай Митов Николов (доцент, д-р; ИЯИЯЕ-БАН и ФМИ-СУ)

С благодарност към професор Тинко Тинчев за курса му по "Нестандартен анализ", който ме въведе и запали по тази област.

Анализ с безкрайно малки
Аксиоматичен подход

Безкрайно малките или още, инфинитезималните, са въведени от Лайбниц през 17 век. Те господстват в математическия анализ до края на 19 век. Тогава инфинитезималните биват окончателно заменени от операции върху крайни величини. С това математическият анализ достига нужната строгост. През 60те години на 20 век Абрахам Робинсън предлага строго построение на инфинитезималните и тяхното прилагане. Това е така наречения нестандартен анализ. През 70те години Едуард Нелсън предлага аксиоматичен подход към нестандартния анализ. Въпреки че инфинитезималните практически са премахнати в математическия анализ, те все още присъстват в по-физичните разглеждания. Тази традиция стои още от Лайблиц и Нютон, и се явява близка до интуицията на физиците. В тази лекция ще въведа аксиоматичните принципи за работа с безкрайно малките и по какъв начин физиците могат да ги използват напълно строго.

0. Увод и план на лекцията

0. Увод и план на лекцията

точка 1: Инфинитезималните от алгебрична гледна точка

0. Увод и план на лекцията

точка 1: Инфинитезималните от алгебрична гледна точка

↳ ще видим, че те са напълно допустими

0. Увод и план на лекцията

точка 1: Инфинитезималните от алгебрична гледна точка

↪ ще видим, че те са напълно допустими
и заедно с това,
че не са еднозначни / единствени / "уникални",
каквито са реалните числа без тях

0. Увод и план на лекцията

точка 1: Инфинитезималните от алгебрична гледна точка

↪ ще видим, че те са напълно допустими
и заедно с това,
че не са еднозначни / единствени / "уникални",
каквито са реалните числа без тях

На тази база ⟶

точка 2: Първи стъпки в анализ с безкрайно малки

точка 2 : Първи стъпки в анализ с безкрайно малки

точка 2 : Първи стъпки в анализ с безкрайно малки

→ Ще видим, че само, че само инфинитезималните не са достатъчни

точка 2 : Първи стъпки в анализ с безкрайно малки

→ Ще видим, че само, че само инфинитезималните не са достатъчни

→ Нужен е т.нар. "трансфер" (пренос), т.е. как например да прилагаме функции върху безкрайно малки

точка 2 : Първи стъпки в анализ с безкрайно малки

→ Ще видим, че само, че само инфинитезималните не са достатъчни

→ Нужен е т. нар. "трансфер" (пренос), т.е. как например да прилагаме функции върху безкрайно малки

↓ това е в

точка 3 : Проблем за трансфера

точка 3 : Проблем за трансфера

точка 3 : Проблем за трансфера

↓ това ще ни доведе до същината на проблема при построяването на нестандартния анализ

точка 4 : Робинсън срещу Нелсън

точка 4 : Робинсън срещу Нелсън

точка 4 : Робинсън срещу Нелсън

тук, заедно с кратък исторически преглед, ще дадем две основни стратегии

точка 4 : Робинсън срещу Нелсън

→ тук, заедно с кратък исторически преглед, ще дадем две основни стратегии

а) Робинсън : безкрайно малките се конструират

точка 4 : Робинсън срещу Нелсън

тук, заедно с кратък исторически преглед, ще дадем две основни стратегии

а) Робинсън : безкрайно малките се конструират

б) Нелсън : те са били винаги около нас, но ние не сме ги забелязвали и сега въвеждаме правилата/аксиомите за работа с тях

точка 4: Робинсън срещу Нелсън

тук, заедно с кратък исторически преглед, ще дадем две основни стратегии

а) Робинсън: безкрайно малките се конструират

б) Нелсън: те са били винаги около нас, но ние не сме ги забелязвали и сега въвеждаме правилата/аксиомите за работа с тях

Двете стратегии са "по същество" еквивалентни

точка 5 : Аксиоматичен подход на Нелсън

$\hookrightarrow$ избираме втория подход точка 5 : Аксиоматичен подход на Нелсън

↳ избираме втория подход

точка 6 : Първи приложения

↳ граница и производна ... формула на Стирлинг ...

точка 5 : Аксиоматичен подход на Нелсън

↳ избираме втория подход

точка 6 : Първи приложения

↳ граница и производна ... формула на Стирлинг ...

↳ това е плана

0. Увод и план на лекцията

точка 1 : Инфинитезималните от алгебрична гледна точка

точка 2 : Първи стъпки в анализ с безкрайно малки

точка 3 : Проблем за трансфера

точка 4 : Робинсън срещу Нелсън

точка 5 : Аксиоматичен подход на Нелсън

точка 6 : Първи приложения

→ това е плана

Но защо аксиоматичния (Нелсънов) подход,
а не оригиналния (Робинсонов) подход?

Но защо аксиоматичния (Нелсънов) подход,
а не оригиналния (Робинсонов) подход?

изисква по-дълга подготовка

Но защо аксиоматичния (Нелсънов) подход,
а не оригиналния (Робинсонов) подход?

изисква по-дълга подготовка

аксиоматичния подход ни дава
директно "правилата на играта" и
ги изважда като аксиоми

Освен това аксиоматичните принципи имат и самостоятелно философско и дори, практико-физично значение.

Освен това аксиоматичните принципи имат и самостоятелно философско и дори, практико-физично значение.

Всъщност, нестандартният анализ отива много по-далеч от въвеждането на безкрайно малки и безкрайно големи количества (числа).

Освен това аксиоматичните принципи имат и самостоятелно философско и дори, практико-физично значение.

Всъщност, нестандартният анализ отива много по-далеч от въвеждането на безкрайно малки и безкрайно големи количества (числа).

Това е подход въобще към безкрайността като цяло и нейното третиране като "крайна".

Но допустимо ли е това? Не е ли прекалено амбициозно? (По библейски казано: "нов вавилонски устрем"?)

Но допустимо ли е това? Не е ли прекалено амбициозно? (По библейски казано: "нов вавилонски устрем"?)

Всъщност, ситуацията е на практика противоположна: не, че хората "овладяваме" (постигаме) безкрайното, а напротив толкова сме нищожни, че често крайното ни се струва безкрайно.

Но допустимо ли е това? Не е ли прекалено амбициозно? (По библейски казано: "нов вавилонски устрем"?)

Всъщност, ситуацията е на практика противоположна: не, че хората "овладяваме" (постигаме) безкрайното, а напротив толкова сме нищожни, че често крайното ни се струва безкрайно.

Това е точната причина, поради която третираме безкрайността като крайна: това е нещо крайно, което "на практика" ни изглежда безкрайно.

В статистическата физика например, в един (мол) газ има $\sim 10^{23}$ на брой частици (числото на Авогадро).

В статистическата физика например, в един (мол) газ има $\sim 10^{23}$ на брой частици (числото на Авогадро).

Това е практически безкрайно число. Аксиоматичният нестандартен анализ ни учи как точно да работим с такива крайни, но "практически безкрайни" числа.

В статистическата физика например, в един (мол) газ има $\sim 10^{23}$ на брой частици (числото на Авогадро).

Това е практически безкрайно число. Аксиоматичният нестандартен анализ ни учи как точно да работим с такива крайни, но "практически безкрайни" числа.

Там те се наричат "нестандартни крайни" или още "хипер-крайни"

Затова и тези "нестандартни крайни" или още "хипер-крайни" са неконструктивни / нееднозначно построими / неуникални.

Затова и тези "нестандартни крайни" или още "хипер-крайни" са неконструктивни / нееднозначно построими / неуникални.

Те не могат да се "пипнат" реално, но ги има - целия ни опит го показва.

1. Инфинитезималните от алгебрична гледна точка

(изложението в тази точка е мотивирано от лекцията на Тодор Тодоров:
http://theo.inrne.bas.bg/th-seminar/Title_and_Abstract-Todor-D-Todorov.html)

1. Инфинитезималните от алгебрична гледна точка

(изложението в тази точка е мотивирано от лекцията на Тодор Тодоров:
http://theo.inrne.bas.bg/th-seminar/Title_and_Abstract-Todor-D-Todorov.html)

none / field

Определение наредена "числова система"

1. Инфинитезималните от алгебрична гледна точка

(изложението в тази точка е мотивирано от лекцията на Тодор Тодоров:
http://theo.inrne.bas.bg/th-seminar/Title_and_Abstract-Todor-D-Todorov.html)

<u>Определение</u> наредена "числова система" (none / field)

$\mathbb{K}$ - множество с : $\underbrace{+\,,\,\cdot}_{\text{бинарни операции}}\,,\,\underbrace{0\,,\,1}_{\in\,\mathbb{K}}\,,\,\underbrace{\leq}_{\text{бинарна релация}}$

1. Инфинитезималните от алгебрична гледна точка

(изложението в тази точка е мотивирано от лекцията на Тодор Тодоров:
http://theo.inrne.bas.bg/th-seminar/Title_and_Abstract-Todor-D-Todorov.html)

none / field

Определение наредена "числова система"

$\mathbb{K}$ - множество с : $\underbrace{+\,,\,\cdot}_{\text{бинарни операции}}\,,\,\underbrace{0\,,\,1}_{\in\,\mathbb{K}}\,,\,\underbrace{\leq}_{\text{бинарна релация}}$

така, че се изпълняват следните аксиоми (за всеки $a, b, c, d \in \mathbb{K}$)

- аксиоми за поле

- **аксиоми за поле**

(асоциативност) $a+(b+c) = (a+b)+c$ $(+ \longleftrightarrow \cdot)$

- **аксиоми за поле**

(асоциативност) $a+(b+c) = (a+b)+c$ $(+ \longleftrightarrow \cdot)$

(комутативност) $a+b = b+a$ $(+ \longleftrightarrow \cdot)$

• аксиоми за поле

(асоциативност) $a+(b+c) = (a+b)+c$ $\quad (+ \longleftrightarrow \cdot)$

(комутативност) $a+b = b+a$ $\quad (+ \longleftrightarrow \cdot)$

(0/1) $a+0 = a = 0+a \;,\; a\cdot 1 = a = 1\cdot a$

- **аксиоми за поле**

(асоциативност) $a+(b+c) = (a+b)+c$ $\quad (+ \longleftrightarrow \cdot)$

(комутативност) $a+b = b+a$ $\quad (+ \longleftrightarrow \cdot)$

(0/1) $a+0 = a = 0+a \; , \; a\cdot 1 = a = 1\cdot a$

(обратимост) $a+a' = 0 = a'+a \; , \; \overset{0\neq}{c}\cdot c'' = 1 = c''\cdot c$

● аксиоми за поле

(асоциативност) $a+(b+c) = (a+b)+c$ $\quad (+ \leftrightarrow \cdot)$

(комутативност) $a+b = b+a$ $\quad (+ \leftrightarrow \cdot)$

(0/1) $a+0 = a = 0+a$, $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$

(обратимост) $a + \underbrace{a'}_{-a} = 0 = a' + a$, $\overset{0\neq}{c} \cdot \underbrace{c''}_{c^{-1}} = 1 = c'' \cdot c$

единствени !

• аксиоми за поле

(асоциативност) $a+(b+c) = (a+b)+c$ $\quad (+ \longleftrightarrow \cdot)$

(комутативност) $a+b = b+a$ $\quad (+ \longleftrightarrow \cdot)$

(0/1) $a+0 = a = 0+a \;,\; a\cdot 1 = a = 1\cdot a$

(обратимост) $a + \underbrace{a'}_{-a} = 0 = a'+a \;,\; 0 \neq c$: $c\cdot \underbrace{c''}_{c^{-1}} = 1 = c''\cdot c$

единствени!

$$a-b := a+(-b) \qquad \frac{c}{d} := c\cdot d^{-1}$$

• аксиоми за поле

(асоциативност) $a+(b+c) = (a+b)+c$ $\quad (+ \longleftrightarrow \cdot)$

(комутативност) $a+b = b+a$ $\quad (+ \longleftrightarrow \cdot)$

(0/1) $a+0 = a = 0+a \;,\; a\cdot 1 = a = 1\cdot a$

(обратимост) $\underbrace{a+a'}_{-a} = 0 = a'+a \;,\; 0 \neq c\cdot \underbrace{c''}_{c^{-1}} = 1 = c''\cdot c$

единствени!

$$a-b := a+(-b) \qquad \frac{c}{d} := c\cdot d^{-1}$$

(дистрибутивност) $a\cdot(b+c) = ab+ac \;,\; (a+b)\cdot c = ac+bc$

• аксиоми за частично наредено множество (partially ordered set / poset)

(рефлексивност) $a \leq a$; (антисиметрия) $a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = b$; (транзитивност) $a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

- **аксиоми за частично наредено множество** (partially ordered set / poset)

(рефлексивност) $a \leq a$; (антисиметрия) $a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = b$; (транзитивност) $a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

- **аксиома за линейна наредба (дихотомия)** $a \leq b$ или $b \leq a$

- **аксиоми за частично наредено множество** (partially ordered set / poset)

(рефлексивност) $a \leq a$; (антисиметрия) $a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = b$; (транзитивност) $a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

- **аксиома за линейна наредба (дихотомия)** $a \leq b$ или $b \leq a$

- **аксиома за транслационност** $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

- **аксиоми за частично наредено множество** (partially ordered set / poset)

(рефлексивност) $a \leq a$; (антисиметрия) $a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = b$; (транзитивност) $a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

- **аксиома за линейна наредба (дихотомия)** $a \leq b$ или $b \leq a$

- **аксиома за транслационност** $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

<u>Следствие:</u> $a \leq b \iff 0 \leq b - a$ (записваме и: $b - a \geq 0$)

- **аксиоми за частично наредено множество** (partially ordered set / poset)

(рефлексивност) (антисиметрия) (транзитивност)

$a \leqslant a$; $a \leqslant b$ и $b \leqslant a \Rightarrow a = b$; $a \leqslant b$ и $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$

- **аксиома за линейна наредба (дихотомия)** $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$

- **аксиома за транслационност** $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$

<u>Следствие:</u> $a \leqslant b \iff 0 \leqslant b - a$ (записваме и: $b - a \geqslant 0$)

- $a, b \geqslant 0 \Rightarrow ab \geqslant 0$.

- Задачи: а) В поле : $a0 = 0$

- **Задачи:** а) В поле : $a0 = 0$, $(-1)^2 = 1$ ($a^2 := a \cdot a$)

- **Задачи:** а) В поле : $a0 = 0$, $(-1)^2 = 1$ $(a^2 := a \cdot a)$

  б) В наредено поле : $a^2 \geq 0$;

- **Задачи:** а) В поле: $a0 = 0$, $(-1)^2 = 1$ $(a^2 := a \cdot a)$

  б) В наредено поле: $a^2 \geq 0$;

  $a, b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$;

• **Задачи:** а) В поле: $a0 = 0$, $(-1)^2 = 1$ $(a^2 := a \cdot a)$

б) В наредено поле: $a^2 \geq 0$;

$a, b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$;

$\underbrace{a \geq 0 \text{ и } a \neq 0}_{a > 0} \Rightarrow a^{-1} > 0$;

- **Задачи:** а) В поле: $a0 = 0$, $(-1)^2 = 1$ $\left(a^2 := a \cdot a\right)$

  б) В наредено поле: $a^2 \geq 0$;

  $a, b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$;

  $\underbrace{a \geq 0 \text{ и } a \neq 0}_{a > 0} \Rightarrow a^{-1} > 0$;

  $0 < 1$;

- **Задачи:** а) В поле : $a0 = 0$, $(-1)^2 = 1$ $\left(a^2 := a \cdot a \right)$

  б) В наредено поле : $a^2 \geq 0$;

  $a, b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$;

  $\underbrace{a \geq 0 \text{ и } a \neq 0}_{a > 0} \Rightarrow a^{-1} > 0$;

  $0 < 1$; $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$

- **Задачи:** а) В поле: $a0 = 0$, $(-1)^2 = 1$ $(a^2 := a \cdot a)$

б) В наредено поле: $a^2 \geq 0$;

$a, b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$;

$\underbrace{a \geq 0 \text{ и } a \neq 0}_{a > 0} \Rightarrow a^{-1} > 0$;

$0 < 1$; $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$

в) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ са наредени полета (спрямо обичайните $+, \cdot, \leq$)

• **Задачи:** а) В поле: $a0 = 0$, $(-1)^2 = 1$ $(a^2 := a \cdot a)$

б) В наредено поле: $a^2 \geq 0$;

$a, b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$;

$\underbrace{a \geq 0 \text{ и } a \neq 0}_{a > 0} \Rightarrow a^{-1} > 0$;

$0 < 1$; $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$

в) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ са наредени полета (спрямо обичайните $+, \cdot, \leq$)

г) $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{C}$ не са (и не могат – защо?)

• Пример: $\mathbb{Z}_2 \equiv \mathbb{F}_2$ (най-простото поле във вселената)

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

проверете, че е поле

Забележка: математически по-неграмотните инженери, често предпочитат логическата интерпретация на $+$ в $\mathbb{Z}_2$: това е операцията "XOR" (изключващо или).

• Пример: $\mathbb{Z}_2 \equiv \mathbb{F}_2$ (най-простото поле във вселената)

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

проверете, че е поле

Забележка: математически по-неграмотните инженери, често предпочитат логическата интерпретация на $+$ в $\mathbb{Z}_2$: това е операцията "XOR" (изключващо или).

$\mathbb{Z}_2$ не може да се нареди: $0 \leq 1 \leq \boxed{1+1=0}$

• Пример: $\mathbb{Z}_2 \equiv \mathbb{F}_2$ (най-простото поле във вселената)

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

проверете, че е поле

Забележка: математически по-неграмотните инженери, често предпочитат логическата интерпретация на $+$ в $\mathbb{Z}_2$: това е операцията "XOR" (изключващо или).

$\mathbb{Z}_2$ не може да се нареди: $0 \leq 1 \leq \boxed{1+1=0}$

Поле с крайна характеристика: $1+1+\cdots+1=0$

• Пример: $\mathbb{Z}_2 \equiv \mathbb{F}_2$ (най-простото поле във вселената)

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

} проверете, че е поле

Забележка: математически по-неграмотните инженери, често предпочитат логическата интерпретация на + в $\mathbb{Z}_2$: това е операцията "XOR" (изключващо или).

$\mathbb{Z}_2$ не може да се нареди: $0 \leq 1 \leq \boxed{1+1=0}$

Поле с крайна характеристика: $1+1+\dots+1=0$

В противен случай: всички $n := 1+1+\dots+1 \neq 0$ - характерика 0.

(евентуално)
И така, само полетата с характеристика 0 могат да се наредят

(евентуално)
И така, само полетата с характеристика 0 могат да се наредят

Така, във всяко наредено поле имаме копие на $\mathbb{N}$

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

и $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$

(евентуално)
И така, само полетата с характеристика 0 могат да се наредят

Така, във всяко наредено поле имаме копие на $\mathbb{N}$

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

$$\text{и } \mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

За всяко $n \in \mathbb{N}$: $n = 1 + 1 + \cdots + 1 > 0$

(евентуално)
И така, само полетата с характеристика 0 могат да се наредят

Така, във всяко наредено поле имаме копие на $\mathbb{N}$

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

$$\text{и } \mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

За всяко $n \in \mathbb{N}$: $n = 1 + 1 + \cdots + 1 > 0$

$\mathbb{Q} \ni r > 0 \iff r = \dfrac{a}{b}$ за $a, b \in \mathbb{N}$

<u>Определение</u>: Архимедово (наредено) поле

Нека $\mathbb{K}$ е наредено поле ($\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{K} \supseteq \mathbb{N}}$);
$\mathbb{K}$ се нарича архимедово, ако
за всяко $a \in \mathbb{K}$, $a \geq 0$, $a \neq 0$ (т.е., $a > 0$), съществува $n \in \mathbb{N}$
така че $na \geq 1$ (т.е., $1/n \leq a$).

<u>Определение</u>: Архимедово (наредено) поле

Нека $\mathbb{K}$ е наредено поле ($\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{K} \supseteq \mathbb{N}}$);
$\mathbb{K}$ се нарича архимедово, ако
за всяко $a \in \mathbb{K}$, $a \geq 0$, $a \neq 0$ (т.е., $a > 0$), съществува $n \in \mathbb{N}$
така че $na \geq 1$ (т.е., $1/n \leq a$).

Например: $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ са архимедови полета.

Определение: Архимедово (наредено) поле

Нека $\mathbb{K}$ е наредено поле ($\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{K} \supseteq \mathbb{N}}$);
$\mathbb{K}$ се нарича архимедово, ако
за всяко $a \in \mathbb{K}$, $a \geq 0$, $a \neq 0$ (т.е., $a > 0$), съществува $n \in \mathbb{N}$
така че $na \geq 1$ (т.е., $1/n \leq a$).

Например: $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ са архимедови полета.

Има важна теорема: $\mathbb{R}$ е максималното архимедово поле.
(в определен смисъл)

<u>Неархимедово</u> := не е архимедово

<u>Неархимедово</u> := не е архимедово (поле) – пример

$$\mathbb{R}(t) := \left\{ \frac{P(t)}{Q(t)} \,\middle|\, P(t), Q(t) \text{ – полиноми над } \mathbb{R},\ Q(t) \neq 0 \right\}$$

– поле на рационалните функции над $\mathbb{R}$ (с обичайните $+, \cdot$)

Неархимедово := не е архимедово (поле) – пример

$$\mathbb{R}(t) := \left\{ \frac{P(t)}{Q(t)} \;\middle|\; P(t),\, Q(t) \text{ – полиноми над } \mathbb{R},\ Q(t) \neq 0 \right\}$$

– поле на рационалните функции над $\mathbb{R}$ (с обичайните $+, \cdot$)

За всяка $f(t) \in \mathbb{R}(t)$ съществува единствено представяне

$f(t) = c\,t^k f_1(t)$, $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $f_1(t) \in \mathbb{R}(t)$ така, че $f_1(1) = 1$.

<u>Неархимедово</u> := не е архимедово (поле) – пример

$$\mathbb{R}(t) := \left\{ \frac{P(t)}{Q(t)} \;\middle|\; P(t), Q(t) \text{ – полиноми над } \mathbb{R},\ Q(t) \neq 0 \right\}$$

– поле на рационалните функции над $\mathbb{R}$ (с обичайните $+, \cdot$)

За всяка $f(t) \in \mathbb{R}(t)$ съществува единствено представяне

$f(t) = c\,t^k f_1(t)$, $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $f_1(t) \in \mathbb{R}(t)$ така, че $f_1(1) = 1$.

Полагаме: $f(t) \geq 0 \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} c \geq 0$

<u>Неархимедово</u> := не е архимедово (поле) – пример

$$\mathbb{R}(t) := \left\{ \frac{P(t)}{Q(t)} \;\middle|\; P(t), Q(t) \text{ – полиноми над } \mathbb{R},\ Q(t) \neq 0 \right\}$$

– поле на рационалните функции над $\mathbb{R}$ (с обичайните $+, \cdot$)

За всяка $f(t) \in \mathbb{R}(t)$ съществува единствено представяне

$f(t) = c\,t^k f_1(t)$, $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $f_1(t) \in \mathbb{R}(t)$ така, че $f_1(1) = 1$.

Полагаме: $f(t) \geq 0 \overset{\text{опр.}}{\Longleftrightarrow} c \geq 0$ – проверете всичко

2. Първи стъпки в анализ с безкрайно малки

(или още, анализ в неархимедови полета)

2. Първи стъпки в анализ с безкрайно малки

(или още, анализ в неархимедови полета)

Определение: Инфинитезимален елемент на наредено поле $\mathbb{K}$ е такъв ненулев елемент $a \in \mathbb{K}$, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ $(\subseteq \mathbb{K})$ имаме $-1/n \leq a \leq 1/n$

2. Първи стъпки в анализ с безкрайно малки

(или още, анализ в неархимедови полета)

<u>Определение</u>: Инфинитезимален елемент на наредено поле $\mathbb{K}$ е такъв ненулев елемент $a \in \mathbb{K}$, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ $(\subseteq \mathbb{K})$ имаме $-1/n \leq a \leq 1/n$

Обозначаваме: "a е инфинитезимален" с "$a \approx 0$".

2. Първи стъпки в анализ с безкрайно малки

(или още, анализ в неархимедови полета)

<u>Определение</u>: Инфинитезимален елемент на наредено поле $\mathbb{K}$ е такъв ненулев елемент $a \in \mathbb{K}$, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ $(\subseteq \mathbb{K})$ имаме $-1/n \leq a \leq 1/n$

Обозначаваме: "a е инфинитезимален" с "$a \approx 0$".

"$a \approx b$" $\iff$ "$a - b \approx 0$".

2. Първи стъпки в анализ с безкрайно малки

(или още, анализ в неархимедови полета)

Определение: Инфинитезимален елемент на наредено поле $\mathbb{K}$ е такъв ненулев елемент $a \in \mathbb{K}$, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ ($\subseteq \mathbb{K}$) имаме $-1/n \leq a \leq 1/n$

Обозначаваме: "a е инфинитезимален" с "$a \approx 0$".

"$a \approx b$" $\iff$ "$a - b \approx 0$".

Едно поле е архимедово $\iff$ то няма инфинитезимални (защо?)

2. Първи стъпки в анализ с безкрайно малки

(или още, анализ в неархимедови полета)

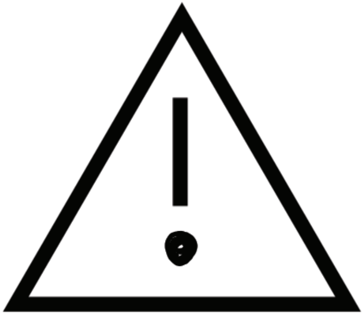
<u>Определение</u>: Инфинитезимален елемент на наредено поле $\mathbb{K}$ е такъв ненулев елемент $a \in \mathbb{K}$, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ $(\subseteq \mathbb{K})$ имаме $-1/n \leq a \leq 1/n$

Обозначаваме: "a е инфинитезимален" с "$a \approx 0$".

"$a \approx b$" $\Longleftrightarrow$ "$a - b \approx 0$".

Едно поле е архимедово $\Longleftrightarrow$ то няма инфинитезимални (защо?)

<u>Задача</u>: кои са инфинитезималните в $\mathbb{R}(t)$ (отговор - в края)



Горното определение за инфинитезимални ще бъде модифицирано

Горното определение за инфинитезимални ще бъде модифицирано

Това се налага, защото в подхода на Нелсън $\mathbb{R}$ ще придобие "инфинитезимални", оставайки "архимедово"

- виж. стр. 05.24

<u>Определение</u>: Нека $\mathbb{K}$ е неархимедово

<u>Определение</u>: Нека $\mathbb{K}$ е неархимедово, $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$

Определение: Нека $\mathbb{K}$ е неархимедово, $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$

Тогава f е непрекъсната в $c \in \mathbb{K}$,
(в смисъл на нестандартния анализ)

ако от $c \approx a$ следва, че $f(c+a) \approx f(c)$.

3. Проблем за трансфера

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}$$

3. Проблем за трансфера

$$\boxed{\text{тук няма инфинитезимални}} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}$$

3. Проблем за трансфера

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{тук няма инфинитезимални}} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & \mathbb{R} \arrow[rr, "f"] \arrow[d, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \mathbb{R} \arrow[d, phantom, sloped, "\subseteq"] \\
\boxed{\text{нужно е неархимедово разширение}} \arrow[r] & \mathbb{K} =: {}^*\mathbb{R} & & {}^*\mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

3. Проблем за трансфера

$\boxed{\text{тук няма инфинитезимални}} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{нужно е неархимедово разширение}} \longrightarrow \mathbb{K} =: {}^*\mathbb{R}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\subseteq$}"] & \mathbb{R} \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\subseteq$}"] \\
\mathbb{K} =: {}^*\mathbb{R} \arrow[r, "{}^*f"] & {}^*\mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

?

3. Проблем за трансфера

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{тук няма инфинитезимални}} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & \mathbb{R} \arrow[rr, "f"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & & \mathbb{R} \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
\boxed{\text{нужно е неархимедово разширение}} \arrow[r] & \mathbb{K} =: {}^*\mathbb{R} \arrow[rr, "{}^*f"] & & {}^*\mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

?

Например: $^*\sin = ?$

4. Робинсън срещу Нелсън

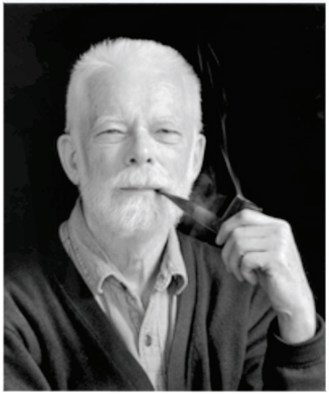
https://en.m.wikipedia.org/wiki/Abraham_Robinson

Абрахам Робинсън
(1918 - 1974)

- основателя на нестандартния анализ през 1966.

https://en.m.wikipedia.org/wiki/Nonstandard_analysis

https://en.m.wikipedia.org/wiki/Edward_Nelson



Едуард Нелсън
(1932 - 2014).
Професор в Принстън.

Основател на аксиоматичния подход към нестандартния анализ през 1977.

https://en.m.wikipedia.org/wiki/Internal_set_theory

Робинсън срещу Нелсън

Робинсън срещу Нелсън

за всяко множество

S

Робинсън срещу Нелсън

за всяко множество	съгласувано конструираме	нестандартно разширение
S		${}^*S$

Робинсън срещу Нелсън

за всяко множество

S

съгласувано конструираме

$\subseteq$

нестандартно разширение

${}^*S$

Робинсън срещу Нелсън

за всяко множество	съгласувано конструираме	нестандартно разширение
S	$\subseteq$	$^{*}S$

^{st}S	$\subseteq$	S

Робинсън срещу Нелсън

Робинсън		
за всяко множество	съгласувано конструираме	нестандартно разширение
S	$\subseteq$	${}^{*}S$

Нелсън

Въвежда се ново първично свойство предикат / predicate

$${}^{st}S \subseteq S$$

$$\underbrace{\text{“a е стандартно”}}_{st(a)}$$

Робинсън срещу Нелсън

Робинсън

за всяко множество	съгласувано конструираме	нестандартно разширение
S	$\subseteq$	${}^{*}S$

Нелсън

Въвежда се ново първично свойство предикат / predicate

$$^{st}S \subseteq S$$

$$^{st}S = \{ a \in S \mid \underbrace{\text{“a е стандартно”}}_{st(a)} \}$$

Робинсън срещу Нелсън

за всяко множество	съгласувано конструираме	нестандартно разширение
S	$\subseteq$	${}^{*}S$

Така например

когато $n \in {}^{*}\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$

казваме, че n е

"хипер-крайно"

Въвежда се ново първично свойство предикат / predicate

$${}^{st}S \subseteq S$$

$$\| $$

$$\{ a \in S \mid \underbrace{\text{"a е стандартно"}}_{st(a)} \}$$

Робинсън срещу Нелсън

за всяко множество S $\subseteq$ съгласувано конструираме нестандартно разширение ${}^{*}S$

Въвежда се ново първично свойство предикат / predicate

$${}^{st}S \subseteq S$$

$${}^{st}S = \{ a \in S \mid \underbrace{\text{"a е стандартно"}}_{st(a)} \}$$

Така например

когато $n \in {}^{*}\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$

казваме, че n е "хипер-крайно" $\leftrightarrow$ n е нестандартно цяло число

При Робинсън: има теорема за преноса (трансфер)

$$A \in B \iff {}^*A \in {}^*B$$

При Робинсън: има теорема за преноса (трансфер)

$$A \in B \iff {}^*A \in {}^*B$$

и въобще

$$A \, R \, B \iff {}^*A \; {}^*R \; {}^*B$$

за всяка релация R като например $\in$, $\subseteq$, $\leq$

При Робинсън : има теорема за преноса (трансфер)

$$A \in B \iff {}^*A \in {}^*B$$

и въобще

$$A\,R\,B \iff {}^*A\ {}^*R\ {}^*B$$

за всяка релация R като например $\underset{{}^*\in}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{\in}}}$, $\underset{{}^*\subseteq}{\underset{\shortparallel}{\subseteq}}$, $\leq$

При Робинсън: има теорема за преноса (трансфер)

$$A \in B \iff {}^*A \in {}^*B$$

и въобще

$$A \, R \, B \iff {}^*A \; {}^*R \; {}^*B$$

за всяка релация R като например $\in$, $\subseteq$, $\leq$

$$\in = {}^*\in, \quad \subseteq = {}^*\subseteq$$

$$\phi = {}^*\phi = 0 = {}^*0, \quad 1 = {}^*1, \quad 2 = {}^*2, \ldots$$

При Робинсън: има теорема за преноса (трансфер)

$$A \in B \iff {}^*A \in {}^*B$$

и въобще

$$A \, R \, B \iff {}^*A \; {}^*R \; {}^*B$$

за всяка релация R като например $\underset{{}^*\in}{\overset{\parallel}{\in}}, \underset{{}^*\subseteq}{\overset{\parallel}{\subseteq}}, \leq$

$$\phi = {}^*\phi = 0 = {}^*0 \;, \quad 1 = {}^*1 \;, \quad 2 = {}^*2 \;, \ldots, \text{ но } \mathbb{N} \neq {}^*\mathbb{N}$$

При Робинсън :

$$B = F(A_1, A_2, \dots, A_n) \iff {}^*B = {}^*F({}^*A_1, {}^*A_2, \dots, {}^*A_n)$$

където $n = 1, 2, \dots, 10, \dots$ – конкретно, но произволно

При Робинсън :

$$B = F(A_1, A_2, \ldots, A_n) \iff {}^*B = {}^*F({}^*A_1, {}^*A_2, \ldots, {}^*A_n)$$

където $n = 1, 2, \ldots, 10, \ldots$ - конкретно, но произволно

Например : F може да е $+$, $\cdot$, степенуване и пр.

При Робинсън:

$$B = F(A_1, A_2, \dots, A_n) \iff {}^*B = {}^*F({}^*A_1, {}^*A_2, \dots, {}^*A_n)$$

където $n = 1, 2, \dots, 10, \dots$ – конкретно, но произволно

Например: F може да е $+$, $\cdot$, степенуване и пр.

Утвърдена монография в Робинсоновия подход:

https://www.gbv.de/dms/goettingen/244289204.pdf

https://www.semanticscholar.org/paper/Lectures-on-the-hyperreals-%3A-an-introduction-to-Goldblatt/5fcb4c28d883099888ec9a41c74ddc09d345ba9a29

И така, като цяло при подхода на Робисън пренасяме всяко разглеждане от стандартния в нестандартния анализ като поставим на всяко безкратно множество "*".

И така, като цяло при подхода на Робисън пренасяме всяко разглеждане от стандартния в нестандартния анализ като поставим на всяко безкратно множество "*".
Звездите "*" стават твърде много - една първа мотивация за подхода на Нелсън.

И така, като цяло при подхода на Робисън пренасяме всяко разглеждане от стандартния в нестандартния анализ като поставим на всяко безкратно множество "*".
Звездите "*" стават твърде много - една първа мотивация за подхода на Нелсън.
По-важен аргумент обаче е, че при подхода на Робинсън, заедно с ${}^*S$ остава и $S \subseteq {}^*S$.

И така, като цяло при подхода на Робисън пренасяме всяко разглеждане от стандартния в нестандартния анализ като поставим на всяко безкрайно множество "*".
Звездите "*" стават твърде много - една първа мотивация за подхода на Нелсън.
По-важен аргумент обаче е, че при подхода на Робинсън, заедно с $^*S$ остава и $S \subseteq {}^*S$. Но S се явява "лошо" множество (когато S е безкрайно): наричат се "външни" множества и за тях принципа на преноса не важи.

И така, като цяло при подхода на Робисън пренасяме всяко разглеждане от стандартния в нестандартния анализ като поставим на всяко безкрайно множество "*".
Звездите "*" стават твърде много - една първа мотивация за подхода на Нелсън.
По-важен аргумент обаче е, че при подхода на Робинсън, заедно с ${}^*S$ остава и $S \subseteq {}^*S$. Но S се явява "лошо" множество (когато S е безкрайно): наричат се "външни" множества и за тях принципа на преноса не важи.
При подхода на Нелсън последното е отправна точка.

5. Аксиоматичен подход на Нелсън

5. Аксиоматичен подход на Нелсън

И така: забравете означението $^*S$

5. Аксиоматичен подход на Нелсън

Има само S.

5. Аксиоматичен подход на Нелсън

Има само S.

При прехода към нестандартния анализ множествата (релациите, функциите) си запазват имената.

По детайлно: езикът на нестандартния анализ включва в себе си езика на стандартния анализ

По детайлно: езикът на нестандартния анализ включва в себе си езика на стандартния анализ
Заедно с това, включваме и всички аксиоми на стандартния анализ;

По детайлно: езикът на нестандартния анализ включва в себе си езика на стандартния анализ
Заедно с това, включваме и всички аксиоми на стандартния анализ; всички теореми на стандартния аналз са теореми и на нестандартния анализ.

По детайлно: езикът на нестандартния анализ включва в себе си езика на стандартния анализ
Заедно с това, включваме и всички аксиоми на стандартния анализ; всички теореми на стандартния аналз са теореми и на нестандартния анализ.
Към езика на стандартния анализ, в нестандартния добавяме едно ново първично свойство (предикат / predicate):

"да бъдеш стандартен"

По детайлно: езикът на нестандартния анализ включва в себе си езика на стандартния анализ
Заедно с това, включваме и всички аксиоми на стандартния анализ; всички теореми на стандартния аналз са теореми и на нестандартния анализ.
Към езика на стандартния анализ, в нестандартния добавяме едно ново първично свойство (предикат / predicate):

"да бъдеш стандартен" ≡ "st"

Към аксиомите на стандартния анализ в нестандартния добавяме три нови аксиоми.

Към аксиомите на стандартния анализ в нестандартния добавяме три нови аксиоми.

Те включват новия предикат (свойство) "st"

Към аксиомите на стандартния анализ в нестандартния добавяме три нови аксиоми.
Те включват новия предикат (свойство) "st" и ще ги наричаме:

A1. Трансфер

A2. Идеализация

A3. Стандартизация

Начинът, по който новите аксиоми обикновено се прилат е схематично следния :

Начинът, по който новите аксиоми обикновено се прилагат е схематично следния :

A1 ни казва кое е стандартно .

Начинът, по който новите аксиоми обикновено се прилагат е схематично следния:

A1 ни казва кое е стандартно.
A2 ни указва, се има нестандартни.

Начинът, по който новите аксиоми обикновено се прилат е схематично следния:

A1 ни казва кое е стандартно.
A2 ни указва, се има нестандартни.
A3 премахва ("изпира") предиката "st" от всички понятия, получени в следствие на A1 и A2.

При малко по-голяма прецизност по-горе вместо "стандартен анализ" следва да се каже "теория на множествата"

При малко по-голяма прецизност по-горе вместо "стандартен анализ" следва да се каже "теория на множествата"

И още по-прецизно: в подхода на Нелсън изходната теория, която се разширява е т. нар. "ZFC" ("теорията на Цермело-Френкел / Zermelo-Fraenkel с аксиомата за избора / Choice")

При малко по-голяма прецизност по-горе вместо "стандартен анализ" следва да се каже "теория на множествата"

И още по-прецизно: в подхода на Нелсън изходната теория, която се разширява е т. нар. "ZFC" ("теорията на Цермело-Френкел / Zermelo-Fraenkel с аксиомата за избора / Choice")

Всъщност, както е известно след Кантор: анализът, както и цялата математика се основава на теорията на множествата.

5. Аксиоматичен подход на Нелсън

Всичко в математиката може да се изрази чрез множества:

Всичко в математиката може да се изрази чрез множества:

- в началото е празното множество $\phi =: 0$

Всичко в математиката може да се изрази чрез множества:

- в началото е празното множество $\phi =: 0$
- $1 := 0 \cup \{0\}$

Всичко в математиката може да се изрази чрез множества:

- в началото е празното множество $\emptyset =: 0$
- $1 := 0 \cup \{0\}$
- $2 := 1 \cup \{1\}$

Всичко в математиката може да се изрази чрез множества:

- в началото е празното множество $\emptyset =: 0$
- $1 := 0 \cup \{0\}$
- $2 := 1 \cup \{1\}$
- $\ldots \quad n \cup \{n\} =: \text{“}n+1\text{”}$

Всичко в математиката може да се изрази чрез множества:

- в началото е празното множество $\emptyset =: 0$
- $1 := 0 \cup \{0\}$
- $2 := 1 \cup \{1\}$
- $\ldots \quad n \cup \{n\} =: \text{“}n+1\text{”}$

виж.: "https://en.wikipedia.org/wiki/Set-theoretic_definition_of_natural_numbers#Definition_as_von_Neumann_ordinals"

Всичко в математиката може да се изрази чрез множества:

- в началото е празното множество $\phi =: 0$
- $1 := 0 \cup \{0\}$
- $2 := 1 \cup \{1\}$
- $\ldots \quad n \cup \{n\} =: \text{“}n+1\text{”}$
- Наредена двойка: $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (по Куратовски)

виж.: "https://en.wikipedia.org/wiki/Set-theoretic_definition_of_natural_numbers#Definition_as_von_Neumann_ordinals"

Всичко в математиката може да се изрази чрез множества:

- в началото е празното множество $\phi =: 0$
- $1 := 0 \cup \{0\}$
- $2 := 1 \cup \{1\}$
- $\ldots \quad n \cup \{n\} =: \text{“}n+1\text{”}$

виж.: "https://en.wikipedia.org/wiki/Set-theoretic_definition_of_natural_numbers#Definition_as_von_Neumann_ordinals"

- Наредена двойка: $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (по Куратовски)
- Функция $f : X \longrightarrow Y$ - това е подмножество $f \subseteq X \times Y$ със свойството, че за всяко $x \in X$ съществува единствено $y \in Y$, такова че $(x, y) \in f$; тогава пишем “$y = f(x)$”.

Всичко в математиката може да се изрази чрез множества:

- в началото е празното множество $\phi =: 0$
- $1 := 0 \cup \{0\}$
- $2 := 1 \cup \{1\}$
- $\dots \quad n \cup \{n\} =: \text{"}n+1\text{"}$

виж.: "https://en.wikipedia.org/wiki/Set-theoretic_definition_of_natural_numbers#Definition_as_von_Neumann_ordinals"

- Наредена двойка: $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (по Куратовски)
- Функция $f: X \longrightarrow Y$ - това е подмножество $f \subseteq X \times Y$ със свойството, че за всяко $x \in X$ съществува единствено $y \in Y$, такова че $(x, y) \in f$; тогава пишем "$y = f(x)$".

• • •

Терминология

- Всяко свойство $\Psi(x, y, \ldots, z)$ на един или няколко обекта (т.е., множества – нали всичко е множества!) $x, y, \ldots, z$, което не използва (дори неявно) предиката "st" ("да бъдеш стандартен"), се нарича

вътрешно свойство

Терминология

- Всяко свойство $\Psi(x, y, \ldots, z)$ на един или няколко обекта (т.е., множества – нали всичко е множества!) $x, y, \ldots, z$, което не използва (дори неявно) предиката "st" ("да бъдеш стандартен"), се нарича

вътрешно свойство

- В противен случай: $\Psi(x, y, \ldots, z)$ се нарича

външно свойство

Основна аксиома в теорията на множествата гласи, че за всяко свойство $\Psi(x)$ и всяко множество S съществува единствено множество X, такова че

$$x \in X \iff x \in S \text{ и } \Psi(x)$$

Основна аксиома в теорията на множествата гласи, че за всяко свойство $\Psi(x)$ и всяко множество S съществува единствено множество X, такова че

$$x \in X \iff x \in S \text{ и } \Psi(x)$$

Това се записва, като: $X = \{ x \in S \mid \Psi(x) \}$

В теорията на Нелсън така се позволява да се формират множества **само за вътрешни свойства Ψ.**

В теорията на Нелсън така се позволява да се формират множества **само за вътрешни свойства Ψ.**

В подхода на Робинсън на тези множества съответстват т.нар. "вътрешни множества"

В теорията на Нелсън така се позволява да се формират множества
само за вътрешни свойства Ψ.

В подхода на Робинсън на тези множества съответстват т.нар. „вътрешни множества"

Затова Нелсън нарича своята теория

теория на вътрешните множества

Internal Set Theory

В теорията на Нелсън така се позволява да се формират множества

само за вътрешни свойства Ψ.

В подхода на Робинсън на тези множества съответстват т.нар. "вътрешни множества"

Затова Нелсън нарича своята теория

теория на вътрешните множества

Internal Set Theory

https://projecteuclid.org/journals/bulletin-of-the-american-mathematical-society/volume-83/issue-6/Internal-set-theory-A-new-approach-to-nonstandard-analysis/bams/1183539849.full

Теория на вътрешните множества

Internal Set Theory

- аксиоми

ZFC
+
A1. Трансфер
A2. Идеализация
A3. Стандартизация

A1. Нека $\Psi(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$ е вътрешно свойство на две групи от обекти $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_m$ и нека втората група е фиксирана на някакви стандартни стойности $y_1 = b_1, \dots, y_m = b_m$.

A1. Нека $\Psi(x_1, \dots, x_n ; y_1, \dots, y_m)$ е вътрешно свойство на две групи от обекти $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_m$ и нека втората група е фиксирана на някакви стандартни стойности $y_1 = b_1, \dots, y_m = b_m$.

Тогава, ако съществуват $a'_1, \dots, a'_n$ (възможно нестандартни), такива, че е изпълнено свойството

$$\Psi(a'_1, \dots, a'_n ; b_1, \dots, b_m)$$

A1. Нека $\Psi(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m)$ е вътрешно свойство на две групи от обекти $x_1,\dots,x_n$ и $y_1,\dots,y_m$ и нека втората група е фиксирана на някакви стандартни стойности $y_1=b_1$, $\dots$, $y_m=b_m$.

Тогава, ако съществуват $a'_1,\dots,a'_n$ (възможно нестандартни), такива, че е изпълнено свойството

$$\Psi(a'_1,\dots,a'_n;b_1,\dots,b_m)$$

то съществуват и стандартни $a_1,\dots,a_n$, за които

$$\Psi(a_1,\dots,a_n;b_1,\dots,b_m)$$

<u>Задача</u> Открийте причината за парадокса: нека $\Psi(m,n)$ е изказването "$n, m \in \mathbb{N}$ и $2 < n < m < 2n$" - това е едно свойство на n и m. Нека n е избрано хипер-крайно, т.е., n е нестандартен елемент на $\mathbb{N}$. Ако приложим A1 към $\Psi(m,n)$, то понеже за всяко $n \in \mathbb{N}$ ще се намери $m \in \mathbb{N}$, за което $2 < n < m < 2n$, тогава би следвало, че за избраното хипер-крайно n ще се намери стандартно такова m. Но по-долу ще видим, че хипер-крайни $n \in \mathbb{N}$ съществуват и те са по-големи от всички стандартни $m \in \mathbb{N}$ - противоречие с прилагането на A1?

Следствие 1 Нека S е стандартно множество. Тогава, ако в S има нестандартен елемент $s' \in S$, то в S има и стандартен $s \in S$.

Следствие 1 Нека S е стандартно множество. Тогава, ако в S има нестандартен елемент $s' \in S$, то в S има и стандартен $s \in S$.

Следствие 2 Нека в допълнение на условието на A1 имаме, че съществуват единствени $a_1, \dots, a_n$, за които се изпълнява

$$\Psi(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m)$$

(т.е., от $\Psi(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m)$ и $\Psi(a_1', \dots, a_n'; b_1, \dots, b_m)$ следва, че $a_1 = a_1', \dots, a_n = a_n'$)

Тогава тези $a_1, \dots, a_n$ са стандартни.

<u>Следствие 3</u> а) Нека $\Theta(x)$ е свойството "x е празно"

<u>Следствие 3</u> а) Нека $\Theta(x)$ е свойството

„x е празно" $\equiv$ „x няма елементи"

<u>Следствие 3</u> а) Нека $\Theta(x)$ е свойството

"x е празно" $\equiv$ "x няма елементи" $\equiv$ "за всяко y : $y \notin x$"

<u>Следствие 3</u> а) Нека $\Theta(x)$ е свойството

"x е празно" $\equiv$ "x няма елементи" $\equiv$ "за всяко y : $y \notin x$"

Аксиомите на теорията на множествата (ZFC) осигуряват, че такова x, за което е в сила $\Theta(x)$ има едно - празното множество ϕ.

<u>Следствие 3</u> а) Нека $\Theta(x)$ е свойството

"x е празно" $\equiv$ "x няма елементи" $\equiv$ "за всяко y : $y \notin x$"

Аксиомите на теорията на множествата (ZFC) осигуряват, че такова x, за което е в сила $\Theta(x)$ има едно - празното множество ϕ.

Следователно : ϕ е стандартно.

<u>Следствие 3</u> а) Нека $\Theta(x)$ е свойството
"x е празно" $\equiv$ "x няма елементи" $\equiv$ "за всяко y : $y \notin x$"
Аксиомите на теорията на множествата (ZFC) осигуряват, че такова x, за което е в сила $\Theta(x)$ има едно - празното множество ϕ.
Следователно : ϕ е стандартно.

б) Ако $a_1, \dots, a_n$ са стандартни, то и $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ е стандартно.

<u>Следствие 3</u> а) Нека $\Theta(x)$ е свойството

"x е празно" $\equiv$ "x няма елементи" $\equiv$ "за всяко y : $y \notin x$"

Аксиомите на теорията на множествата (ZFC) осигуряват, че такова x, за което е в сила $\Theta(x)$ има едно - празното множество ϕ.

Следователно : ϕ е стандартно.

б) Ако $a_1, \dots, a_n$ са стандартни, то и $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ е стандартно.

в) Въведените естествени числа (стр. 05.07) $0 = \phi$, $1 = 0 \cup \{0\}$, $2 = 1 \cup \{1\}$ и т.н. са стандартни.

Така: A1 ни казва кои обекти (т.е., множества) са стандартни:

стандартни са всички обекти на стандартния анализ, които са еднозначно построени

Така: A1 ни казва кои обекти (т.е., множества) са стандартни:

стандартни са всички обекти на стандартния анализ, които са еднозначно построени

В частност, стандартни са

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, L^2(\mathbb{R}^3)$ и др.

В математическата логика има еквивалентности
"от A следва B" е равносилно на "от не B следва не A"

В математическата логика има еквивалентности

"от A следва B" е равносилно на "от не B следва не A"

"не съществува x, че не $A(x)$" е равносилно на "за всяко x : $A(x)$"

В математическата логика има еквивалентности

"от A следва B" е равносилно на "от не B следва не A"

"не съществува x, че не $A(x)$" е равносилно на "за всяко x : $A(x)$"

Това води до следната еквивалентна, дуална форма на A1 :

В математическата логика има еквивалентности
"от A следва B" е равносилно на "от не B следва не A"
"не съществува x, че не $A(x)$" е равносилно на "за всяко x : $A(x)$"

Това води до следната еквивалентна, дуална форма на AI :
ако $\Psi(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m)$ е вътрешно свойство, то за всеки стандартни $y_1,\dots,y_m$, ако $\Psi(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m)$ е вярно за всички стандартни $x_1,\dots,x_n$, тогава $\Psi(x_1,\dots,x_n;y_1,\dots,y_m)$ е вярно и за всички $x_1,\dots,x_n$.

В математическата логика има еквивалентности

"от A следва B" е равносилно на "от не B следва не A"

"не съществува x, че не $A(x)$" е равносилно на "за всяко x : $A(x)$"

Това води до следната еквивалентна, дуална форма на AI :

ако $\Psi(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$ е вътрешно свойство, то за всеки стандартни $y_1, \dots, y_m$, ако $\Psi(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$ е вярно за всички стандартни $x_1, \dots, x_n$, тогава $\Psi(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$ е вярно и за всички $x_1, \dots, x_n$.

- това е най-явната форма на пренос/трансфер.

A2.^{w} (слаб/weak принцип на идеализацията)

Нека S е (вътрешно) множество. Тогава съществува (вътрешно) крайно подмножество $I \subseteq S$, което съдържа всички стандартни елементи на S.

A2.^{w} (слаб/weak принцип на идеализацията)

Нека S е (вътрешно) множество. Тогава съществува (вътрешно) крайно подмножество $I \subseteq S$, което съдържа всички стандартни елементи на S.

<u>Забележка</u> В теорията на Нелсън всички множества са вътрешни (някои от тях са стандартни, а други са нестандартни - но това е друго!). Ето защо указването, че едно множество е вътрешно е излишно в рамките на теорията на Нелсън (и дори е безсмислено). Въпреки това, то е полезно уточнение, тъй като има и други аксиоматични рамки, където се допускат външни множества. (виж. по-долу).

Забележка 2 Що крайно?

Забележка 2 Що крайно? Горната аксиома е тъй неочаквана, че този въпрос възниква непосредствено.

<u>Забележка 2</u> Що крайно? Горната аксиома е тъй неочаквана, че този въпрос възниква непосредствено.

Има две интерпретации на това в рамките на стандартната теория на множествата.

Забележка 2 Що крайно? Горната аксиома е тъй неочаквана, че този въпрос възниква непосредствено.

Има две интерпретации на това в рамките на стандартната теория на множествата. Те са еквивалентни, но имат различна сложност на записване

Забележка 2 Що крайно? Има две еквивалентни интерпретации

<u>Забележка 2</u> Що крайно? Има две еквивалентни интерпретации

а) "I е крайно", ако "$I = \phi$ или има биекция $I \cong \{0\}$
или има биекция $I \cong \{0,1\}$
или има биекция $I \cong \{0,1,2\}$
$\vdots$ "

<u>Забележка 2</u> Що крайно? Има две еквивалентни интерпретации

а) "I е крайно", ако "$I = \phi$ или има биекция $I \cong \{0\}$
или има биекция $I \cong \{0, 1\}$
или има биекция $I \cong \{0, 1, 2\}$
$\vdots$
"

– това е безкрайно изказване

<u>Забележка 2</u> Що крайно? Има две еквивалентни интерпретации

а) "I е крайно", ако "$I = \phi$ или има биекция $I \cong \{0\}$
или има биекция $I \cong \{0,1\}$
или има биекция $I \cong \{0,1,2\}$
$\vdots$ "

– това е безкрайно изказване, но ако е определено множеството $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, то може да се запише с краен запис като "съществува $n \in \mathbb{N}$ и биекция $I \cong \{0, 1, \dots, n-1\}$.

(забележете: "биекция" е вътрешно понятие, т.е., може да се определи с вътрешно свойство!)

<u>Забележка 2</u> Що крайно? Има две еквивалентни интерпретации

б) "I е крайно", ако "за всяко $i \in I$ не съществува биекция $I \setminus \{i\} \cong I$"

<u>Забележка 2</u> Що крайно? Има две еквивалентни интерпретации

б) "I е крайно", ако "за всяко $i \in I$ не съществува биекция

$$I \setminus \{i\} \cong I"$$

- това определение идва от Дедекинд. То е явно вътрешно и ние ще го приемем за основното определение за крайност.

Забележка 2 Що крайно? Има две еквивалентни интерпретации

б) "I е крайно", ако "за всяко $i \in I$ не съществува биекция

$$I \setminus \{i\} \cong I"$$

-това определение идва от Дедекинд. То е явно вътрешно и ние ще го приемем за основното определение за крайност.

Забележете: безкрайни множества има и в нестандартния анализ.

-това е аксиома в стандартния анализ и по A1 се пренася и в нестандартния

<u>Пример:</u> $\mathbb{N}$ е безкрайно множество (както в стандартния, така и в нестандартния анализ).

<u>Пример:</u> $\mathbb{N}$ е безкрайно множество (както в стандартния, така и в нестандартния анализ). Нека приложим $A2^{\omega}$ за $\mathbb{N}$.

<u>Пример:</u> $\mathbb{N}$ е безкрайно множество (както в стандартния, така и в нестандартния анализ). Нека приложим $A2^{w}$ за $\mathbb{N}$. Съществува крайно подмножество $I \subseteq \mathbb{N}$, такова че всяко стандартно $n \in \mathbb{N}$ е също и елемент на I.

<u>Пример:</u> $\mathbb{N}$ е безкрайно множество (както в стандартния, така и в нестандартния анализ). Нека приложим $A2^{\omega}$ за $\mathbb{N}$. Съществува крайно подмножество $I \subseteq \mathbb{N}$, такова че всяко стандартно $n \in \mathbb{N}$ е също и елемент на I. Но в стандартния анализ (т.е., в теорията на множествата) всяко крайно подмножество $I \subseteq \mathbb{N}$ има максимален елемен $i := \max I \in \mathbb{N}$.

<u>Пример:</u> $\mathbb{N}$ е безкрайно множество (както в стандартния, така и в нестандартния анализ). Нека приложим $A2^w$ за $\mathbb{N}$. Съществува крайно подмножество $I \subseteq \mathbb{N}$, такова че всяко стандартно $n \in \mathbb{N}$ е също и елемент на I. Но в стандартния анализ (т.е., в теорията на множествата) всяко крайно подмножество $I \subseteq \mathbb{N}$ има максимален елемен $i := \max I \in \mathbb{N}$. В частност, за всяко стандартно $n \in \mathbb{N}$ имаме $n < n+1 \leq i$ (!)

<u>Пример:</u> $\mathbb{N}$ е безкрайно множество (както в стандартния, така и в нестандартния анализ). Нека приложим $A2^{w}$ за $\mathbb{N}$. Съществува крайно подмножество $I \subseteq \mathbb{N}$, такова че всяко стандартно $n \in \mathbb{N}$ е също и елемент на I. Но в стандартния анализ (т.е., в теорията на множествата) всяко крайно подмножество $I \subseteq \mathbb{N}$ има максимален елемен $i := \max I \in \mathbb{N}$. В частност, за всяко стандартно $n \in \mathbb{N}$ имаме $n < n+1 \leq i$ (!) Следователно, i не е стандартно!

<u>Пример:</u> $\mathbb{N}$ е безкрайно множество (както в стандартния, така и в нестандартния анализ). Нека приложим $A2^w$ за $\mathbb{N}$. Съществува крайно подмножество $I \subseteq \mathbb{N}$, такова че всяко стандартно $n \in \mathbb{N}$ е също и елемент на I. Но в стандартния анализ (т.е., в теорията на множествата) всяко крайно подмножество $I \subseteq \mathbb{N}$ има максимален елемен $i := \max I \in \mathbb{N}$. В частност, за всяко стандартно $n \in \mathbb{N}$ имаме $n < n+1 \leq i$ (!) Следователно, i не е стандартно! Такива елементи на $\mathbb{N}$ нарекохме също хипер-крайни.

<u>Задача</u> Обяснете парадокса, който възниква от предния пример.
Нека ${}^{st}\mathbb{N}$ е подмножеството на всички стандартни елементи на $\mathbb{N}$.
Тогава ${}^{st}\mathbb{N} \subseteq I$, т.е., ${}^{st}\mathbb{N}$ е подмножество на крайно множество.
В стандартния анализ има теорема: всяко подмножество на крайно множество е също крайно. Според принципа на преноса A1 това ще е вярно и в нестандартния анализ. Следователно ${}^{st}\mathbb{N}$ е крайно. Пак според A1: в ${}^{st}\mathbb{N}$ ще има най-голям елемент: т.е., ще съществува най-голямо стандартно $n_0 \in \mathbb{N}$. Но n_0+1 ще е също стандартно (защо?) и $n_0+1 > n_0$ – противоречие.

Забележете:

Понятията "архимедово поле" и "инфинитезимални" от т. 2 (ср. 02.01) са вътрешни понятия.

Забележете:

Понятията "архимедово поле" и "инфинитезимални" от т. 2 (стр. 02.01) са вътрешни понятия.

Следователно, те биха се пренесли и в нестандартния анализ, където $\mathbb{R}$ ще продължи да бъде архимедово и да няма инфинитезимални – нежелана перспектива!

Забележете:

Понятията "архимедово поле" и "инфинитезимални" от т. 2 (стр. 02.01) са вътрешни понятия.

Следователно, те биха се пренесли и в нестандартния анализ, където $\mathbb{R}$ ще продължи да бъде архимедово и да няма инфинитезимални – нежелана перспектива!

Изход: правим следната лека, но съществена модификация на понятието за инфинитезимален, в следствие на което това понятие ще стане **външно**!

Ново определение за инфинитезимален елемент на наредено поле $\mathbb{K}$:

$a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ е такъв, ако за всяко **стандартно** $n \in \mathbb{N} (\subseteq \mathbb{K})$ имаме

$$-1/n \leq a \leq 1/n$$

Ново определение за инфинитезимален елемент на наредено поле $\mathbb{K}$:

$a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ е такъв, ако за всяко **стандартно** $n \in \mathbb{N}$ $(\subseteq \mathbb{K})$ имаме

$$-1/n \leq a \leq 1/n$$

Например: ако $i \in \mathbb{N}$ е нестандартен елемент на $\mathbb{N}$ (т.е. е хипер-крайно), то $1/i$ е инфинитезимален (защо?)

A2 (принцип за идеализацията в пълна форма)

Нека $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ е вътрешна релация (когато $(x,y) \in \mathcal{R}$ пишем $x\mathcal{R}y$ и казваме, че "x е в релация $\mathcal{R}$ към y"). Нека за всяко стандартно крайно подмножество $X' \subseteq X$ съществува $y' \in Y$ такова, че $x'\mathcal{R}y'$ за всяко $x' \in X'$. Тогава съществува $y \in Y$ такова, че $x\mathcal{R}y$ за всяко стандартно $x \in X$.

A2 (принцип за идеализацията в пълна форма)

Нека $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ е вътрешна релация (когато $(x,y) \in \mathcal{R}$ пишем $x\mathcal{R}y$ и казваме, че "x е в релация $\mathcal{R}$ към y"). Нека за всяко стандартно крайно подмножество $X' \subseteq X$ съществува $y' \in Y$ такова, че $x'\mathcal{R}y'$ за всяко $x' \in X'$. Тогава съществува $y \in Y$ такова, че $x\mathcal{R}y$ за всяко стандартно $x \in X$.

<u>Задача</u> Изведете $A2^w$ от A2 като приложите A2 към релацията $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$, за $X = \mathcal{S}$ и $x\mathcal{R}y :\equiv$ "$x \in y$ и $y \subseteq X$ е крайно".

Еквивалентна форма на A2

Нека $X \ni x \longmapsto U_x \subseteq Y$ е вътрешно съответствие, такова че за всяки стандартни $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, \dots, x_n \in X$ имаме

$$U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n} \neq \emptyset$$

Тогава съществува $y \in Y$ такова, че $y \in U_x$, за всяко стандартно $x \in X$

Еквивалентна форма на А2

Нека $X \ni x \mapsto U_x \subseteq Y$ е вътрешно съответствие, такова че за всяки стандартни $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, \dots, x_n \in X$ имаме

$$U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n} \neq \phi$$

Тогава съществува $y \in Y$ такова, че $y \in U_x$, за всяко стандартно $x \in X$

Задача Покажете еквивалентността.

A3. (Принцип на стандартизацията)

Нека $\mathcal{E}(x, y_1, \dots, y_n)$ някакво произволно (евентуално външно) свойство на група обекти $x, y_1, \dots, y_n$.

Тогава за всяко стандартно множество S съществува (единствено) стандартно множество T така, че за всяко стандартно $x \in S$:

$$x \in T \iff \mathcal{E}(x, y_1, \dots, y_n) \text{ се изпълнява}$$

Заключителни коментари:

1. В сайта https://web.math.princeton.edu/~nelson/ на Нелсън може да се намери първа глава от незавършената му книга по "теория на вътрешните множества" https://web.math.princeton.edu/~nelson/books/1.pdf

Заключителни коментари:

1. В сайта https://web.math.princeton.edu/~nelson/ на Нелсън може да се намери първа глава от незавършената му книга по "теория на вътрешните множества" https://web.math.princeton.edu/~nelson/books/1.pdf

2. Понякога е удобно да се въведат "външни множества" дори в рамките на Нелсъновия подход, просто като съкращение на външни свойства.

Заключителни коментари:

1. В сайта https://web.math.princeton.edu/~nelson/ на Нелсън може да се намери първа глава от незавършената му книга по "теория на вътрешните множества" https://web.math.princeton.edu/~nelson/books/1.pdf

2. Понякога е удобно да се въведат "външни множества" дори в рамките на Нелсъновия подход, просто като съкращение на външни свойства. Например, да се въведе външното множество

$$\mathrm{E} := \{x \in \mathrm{S} \mid \mathscr{E}(x) \text{ е изпълнено}\}, \quad \text{за външно свойство } \mathscr{E}(x)$$

означава винаги когато пишем "$x \in \mathrm{E}$" да подразбираме "$x \in \mathrm{S}$ и $\mathscr{E}(x)$ е изпълнено".

Заключителни коментари:

1. В сайта https://web.math.princeton.edu/~nelson/ на Нелсън може да се намери първа глава от незавършената му книга по "теория на вътрешните множества" https://web.math.princeton.edu/~nelson/books/1.pdf

2. Понякога е удобно да се въведат "външни множества" дори в рамките на Нелсъновия подход, просто като съкращение на външни свойства. Например, да се въведе външното множество

$$\mathrm{E} := \{x \in \mathrm{S} \mid \mathscr{E}(x) \text{ е изпълнено}\}, \quad \text{за външно свойство } \mathscr{E}(x)$$

означава винаги когато пишем "$x \in \mathrm{E}$" да подразбираме "$x \in \mathrm{S}$ и $\mathscr{E}(x)$ е изпълнено". По такъв начин част от операциите върху множества могат да се пренесат и върху външните, понеже те са са равносилни на логически операции над външни свойства.

Заключителни коментари:

1. В сайта https://web.math.princeton.edu/~nelson/ на Нелсън може да се намери първа глава от незавършената му книга по "теория на вътрешните множества" https://web.math.princeton.edu/~nelson/books/1.pdf

2. Понякога е удобно да се въведат "външни множества" дори в рамките на Нелсъновия подход, просто като съкращение на външни свойства. Например, да се въведе външното множество

$$\mathrm{E} := \{x \in \mathrm{S} \mid \mathscr{E}(x) \text{ е изпълнено}\}, \quad \text{за външно свойство } \mathscr{E}(x)$$

означава винаги когато пишем "$x \in \mathrm{E}$" да подразбираме "$x \in \mathrm{S}$ и $\mathscr{E}(x)$ е изпълнено". По такъв начин част от операциите върху множества могат да се пренесат и върху външните, понеже те са са равносилни на логически операции над външни свойства. Ние обаче не можем да използваме в рамките на теорията на Нелсън пълния арсенал на теория на множествата за нуждите на външните множества. Има разработени и по-общи теории на външните множества.

Заключителни коментари:

1. В сайта https://web.math.princeton.edu/~nelson/ на Нелсън може да се намери първа глава от незавършената му книга по "теория на вътрешните множества" https://web.math.princeton.edu/~nelson/books/1.pdf

2. Понякога е удобно да се въведат "външни множества" дори в рамките на Нелсъновия подход, просто като съкращение на външни свойства. Например, да се въведе външното множество

$$\mathrm{E} := \{x \in \mathrm{S} \mid \mathscr{E}(x) \text{ е изпълнено}\}, \quad \text{за външно свойство } \mathscr{E}(x)$$

означава винаги когато пишем "$x \in \mathrm{E}$" да подразбираме "$x \in \mathrm{S}$ и $\mathscr{E}(x)$ е изпълнено". По такъв начин част от операциите върху множества могат да се пренесат и върху външните, понеже те са са равносилни на логически операции над външни свойства. Ние обаче не можем да използваме в рамките на теорията на Нелсън пълния арсенал на теория на множествата за нуждите на външните множества. Има разработени и по-общи теории на външните множества.

3.Неслсън формулира задачата и негов ученик я решава: да се покаже, че теорията на вътрешните множества се явява т.нар. "консервативно разширение" на теорията ZFC. Понятието една теория $\mathscr{T}$ да бъде консервативно разширение на друга теория $\mathscr{S}$ е въведено от Хилберт (виж статията му "Върху безкрайното" в

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/577ro245421/Hilbert1.pdf

5. Аксиоматичен подход на Нелсън

Пояснение: консервативни разширения

5. Аксиоматичен подход на Нелсън

Пояснение: консервативни разширения

Една математическа теория, да я означим $\mathscr{S}$, съдържа преди всичко език и заедно с него, едно алгоритмично породено множество Statements($\mathscr{S}$) на правилно формирани "изказвания" на теорията. В множеството Statements($\mathscr{S}$) има отделено подмножество Theorems($\mathscr{S}$) на теоремите на теорията. Множеството Theorems($\mathscr{S}$) е също алгоритмично породено и алгоритмите, които пораждат елементите на множеството се наричат доказателства (на тези елементи). Обикновено, алгоритъмът за пораждне на Theorems($\mathscr{S}$) е универсален за повечето теории като се базира на правила на извод и стартира от едно подмножество на Theorems($\mathscr{S}$), наречено Axioms($\mathscr{S}$) - аксиомите на теорията.

5. Аксиоматичен подход на Нелсън

Пояснение: консервативни разширения

Една математическа теория, да я означим $\mathscr{S}$, съдържа преди всичко език и заедно с него, едно алгоритмично породено множество Statements($\mathscr{S}$) на правилно формирани "изказвания" на теорията. В множеството Statements($\mathscr{S}$) има отделено подмножество Theorems($\mathscr{S}$) на теоремите на теорията. Множеството Theorems($\mathscr{S}$) е също алгоритмично породено и алгоритмите, които пораждат елементите на множеството се наричат доказателства (на тези елементи). Обикновено, алгоритъмът за пораждне на Theorems($\mathscr{S}$) е универсален за повечето теории като се базира на правила на извод и стартира от едно подмножество на Theorems($\mathscr{S}$), наречено Axioms($\mathscr{S}$) - аксиомите на теорията.

Теорията $\mathscr{T}$ е разширение на $\mathscr{S}$, ако първо, езика на $\mathscr{T}$ включва езика на $\mathscr{S}$ и фактически, Statements($\mathscr{S}$) е подмножество на Statements($\mathscr{T}$). Второ, сечението на Theorems($\mathscr{S}$) и Theorems($\mathscr{T}$) е Theorems($\mathscr{S}$), т.е., всяка теорема, която се доказва в голямата теория $\mathscr{T}$, но се формулира на езика на малката $\mathscr{S}$, се доказва и в малката.

5. Аксиоматичен подход на Нелсън

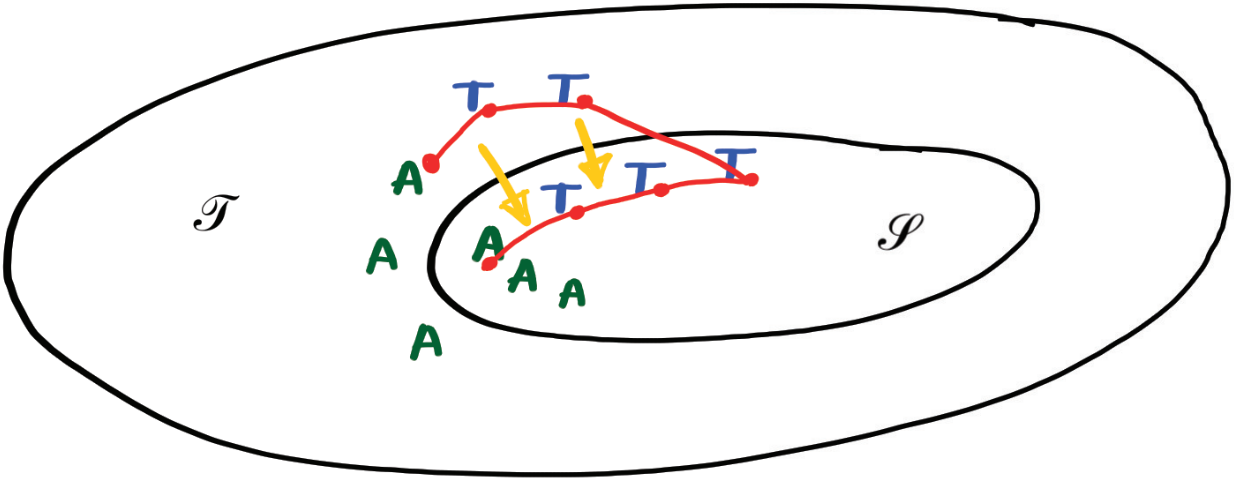
Пояснение: консервативни разширения

Една математическа теория, да я означим $\mathscr{S}$, съдържа преди всичко език и заедно с него, едно алгоритмично породено множество Statements($\mathscr{S}$) на правилно формирани "изказвания" на теорията. В множеството Statements($\mathscr{S}$) има отделено подмножество Theorems($\mathscr{S}$) на теоремите на теорията. Множеството Theorems($\mathscr{S}$) е също алгоритмично породено и алгоритмите, които пораждат елементите на множеството се наричат доказателства (на тези елементи). Обикновено, алгоритъмът за пораждне на Theorems($\mathscr{S}$) е универсален за повечето теории като се базира на правила на извод и стартира от едно подмножество на Theorems($\mathscr{S}$), наречено Axioms($\mathscr{S}$) - аксиомите на теорията.

Теорията $\mathscr{T}$ е разширение на $\mathscr{S}$, ако първо, езика на $\mathscr{T}$ включва езика на $\mathscr{S}$ и фактически, Statements($\mathscr{S}$) е подмножество на Statements($\mathscr{T}$). Второ, сечението на Theorems($\mathscr{S}$) и Theorems($\mathscr{T}$) е Theorems($\mathscr{S}$), т.е., всяка теорема, която се доказва в голямата теория $\mathscr{T}$, но се формулира на езика на малката $\mathscr{S}$, се доказва и в малката.

Така, смисъла на такова разширение е, че то опростява доказателствата, но не добавя нови теореми в малката теория.

Пояснение: консервативни разширения



6. Първи приложения

- Непрекъснатост на функция в нестандартния анализ
- Производна на функция в нестандартния анализ

<u>Опр.</u> $c \in \mathbb{R}$, $c \approx 0$ (инфинитез.)

$\Longleftrightarrow$ вс. станд. $n \in \mathbb{N}$: $-\frac{1}{n} \leq x \leq 1/n$

<u>Опр.</u> $c \in \mathbb{R}$, $c \approx 0$ (инфинитез.)

$\iff$ вс. станд. $n \in \mathbb{N}$: $-\frac{1}{n} \leq x \leq 1/n$

<u>Т.</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непр. в $a \in \mathbb{R}$ (a – станд.)

$\iff$ За вс. $c \approx 0$: $f(a+c) - f(x) \approx 0$

$\approx$

<u>Опр.</u> $c \in \mathbb{R}$, $c \approx 0$ (инфинитез.)

$\iff$ вс. станд. $n \in \mathbb{N}$: $-\frac{1}{n} \leq x \leq 1/n$

<u>Т.</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непр. в $a \in \mathbb{R}$ (a – станд.)

$\iff$ За вс. $c \approx 0$: $f(a+c) - f(x) \approx 0$

<u>Док.</u> $\Rightarrow$) Нека $c \approx 0$ и

нека $n \in \mathbb{N}$, n – станд.

Защо: $|f(a+c)-f(a)| \leq 1/n$?

Защо: $|f(a+c)-f(a)| \leq 1/n$?

Същ. $\delta > 0$ т.че за вс. c' : $|c'| \leq \delta$

$|f(a+c')-f(a)| \leq 1/n$

Защо: $|f(a+c)-f(a)| \leq 1/n$?

Същ. $\delta > 0$ т.че за вс. c': $|c'| \leq \delta$

$|f(a+c')-f(a)| \leq 1/n$

Но $c \approx 0$ и $\Rightarrow$ $|c| \leq 1/m < \delta$

$(\Leftarrow)$ Нека $\varepsilon > 0$, ε - станд.

$\Leftarrow$) Нека $\varepsilon > 0$, ε - станд.

Нека $S = \{ \delta > 0 \mid |f(a+c') - f(c')| \leq \varepsilon$

когато $|c'| \leq \delta \}$

- стандартно множество

$\Leftarrow$) Нека $\varepsilon > 0$, ε - станд.

Нека $S = \{ \delta > 0 \mid |f(a+c') - f(c')| \leq \varepsilon$

когато $|c'| \leq \delta \}$

- стандартно множество

Но ако $c > 0$, c - инфинитез., то $c \in S$

- наистина, ако $|c'| \leq c$, то и

c' - инфинитез.;

$$\Rightarrow 0 \approx |f(a+c') - f(c')| \leq \varepsilon$$

И така $\underset{\substack{| \\ \text{станд.}}}{S} \neq \phi$ в нестанд. свят

$$\Rightarrow 0 \approx |f(a+c') - f(c')| \leq \varepsilon$$

И така $\underset{\text{станд.}}{S} \neq \phi$ в нестанд. свят

$\underset{\text{по A1}}{\Longrightarrow}$ S има станд. ел-т $\delta \in S$

$\square$

Нестанд. опр. за производна

Нестанд. опр. за производна

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е диф. в $a \in \mathbb{R}$ - станд станд.

ако същ. $v \in \mathbb{R}$ - станд., т.че

$$\frac{f(a+c)-f(a)}{c} \approx v \quad \text{за вс. } c \approx 0$$

Нестанд. опр. за производна

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е диф. в $a \in \mathbb{R}$ - станд станд.

ако същ. $v \in \mathbb{R}$ - станд., т.че

$$\frac{f(a+c)-f(a)}{c} \approx v \quad \text{за вс. } c \approx 0$$

Получаваме <u>външно</u> съответств.

$$\mathbb{R} \ni \underset{\text{станд.}}{a} \longmapsto \underset{\text{станд.}}{v} \in \mathbb{R}$$

Нестанд. опр. за производна

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е диф. в $\underset{\text{станд.}}{a} \in \mathbb{R}$ - станд

ако същ. $v \in \mathbb{R}$ - станд., т.че

$$\frac{f(a+c)-f(a)}{c} \approx v \quad \text{за вс. } c \approx 0$$

Получаваме външно съответств.

$$\mathbb{R} \ni \underset{\text{станд.}}{a} \longmapsto \underset{\text{станд.}}{v} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ по АЗ определяме $f' : \mathbb{R} \to \overset{\text{станд.}}{\mathbb{R}}$

5. Аксиоматичен подход на Нелсън

Заключителен коментар:

Ето книга

https://www.rug.nl/research/som-ri/publications/ponstein.pdf

в която е представен Робинсоновия подход и в края доказателството на формулата на Стирлинг (аз намерих преформулировка на това в Нелсоновия подход).