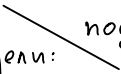


КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА, ЛЕКЦИЯ 5 / 03.11.2021

КОРЕКЦИИТЕ В ПРЕЗЕНТАЦИЯТА СА ОТРАЗЕНИ С ЛИЛАВ ЦВЯТ

МОЛЯ ОБЪРНЕТЕ ВНИМАНИЕ НА КОРЕКЦИЯТА НА СТР. "002.++", "004.01" И "004.++"

квантова информатика - част 1: аксиоми на квантовата теория

раздели:  подходи:

• логически подход

• алгебричен подход

• обща статистика

лекции 1-3

лекция 3-5

• статистика на
составни системи

лекции 5-6

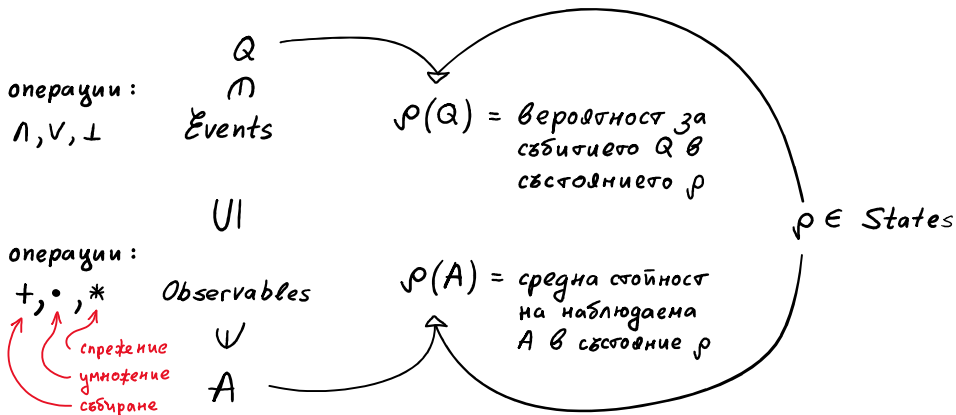
• трансформации

лекции 6-7

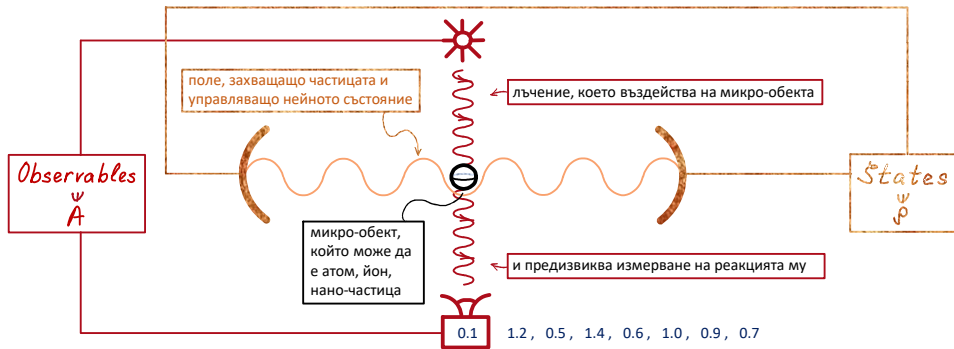
1. Съпоставка между логическия и алгебричния подход

Наблюдатели

Обекти



2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитията като наблюдаеми
 Наблюдаемата е експеримент, чийто резултати са числа.



Средна стойност на A в $\rho =: \langle A \rangle_\rho =: \rho(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N}$

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитията като наблюдаеми

- Събитията ще бъдат разглеждани като наблюдаеми със стойности 1 (да) и 0 (не).
- Средната стойност на едно събитие, разглеждано, като наблюдаема е равна на неговата вероятност:

$$\text{Средна стойност на } P \text{ в } \rho =: \langle P \rangle_\rho =: \rho(P) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{a_1 + \dots + a_N}^{\#1(ga)}}{N} \equiv \text{Prob}_\rho P$$

тоест, $\rho: \text{Events} \longrightarrow [0, 1]$ се продължава, като функция

$$\begin{array}{ccc} \text{Events} & \longrightarrow & [0, 1] \\ \cap \downarrow & & \cap \downarrow \\ \text{Observables} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

(“диаграмата се затваря до комутативна”)

2. Понятие за наблюдаема (величина). Събитията като наблюдаеми

Моля обърнете внимание на поправката в диаграмата, която е оградена по-долу: в алгебричния подход състоянието ρ се разширяват, като функции не само в изходната (дефиниционната) им област:

$$\text{Events} \subseteq \text{Observables},$$

разширява се и областта на стойностите им: $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Това е така, понеже средните стойности, за разлика от вероятностите, могат да бъдат произволни реални числа.

$$\begin{array}{ccc} \rho: \text{Events} & \longrightarrow & [0, 1] \\ \cap \downarrow & & \cap \downarrow \\ \text{Observables} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

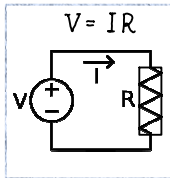
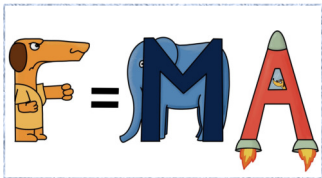
се продължава, като функция

(“диаграмата се затваря до комутативна”)

3. Исторически бележки

- Ние описваме света и неговите закономерности във физиката посредством физическите величини – това са именно наблюдаемите
- Физическите закони се формулират, като алгебрични соотношения между наблюдаемите

Например:



1900



Max Planck
1858 – 1947

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

1925



Werner Heisenberg
1901 – 1976

$$\Delta q \Delta p \geq \hbar$$

1925



1930

THE
PRINCIPLES
OF
QUANTUM MECHANICS

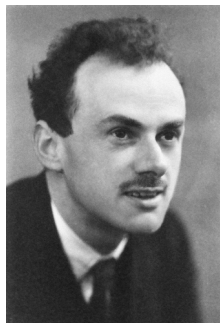
BY

P. A. M. DIRAC

LUCASIAN PROFESSOR OF MATHEMATICS
IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE

ST. JOHN'S COLLEGE, CAMBRIDGE

29 May 1930



Paul Dirac
1902 - 1984

1932

MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER QUANTENMECHANIK

VON

JOHANN V. NEUMANN

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1932



John von Neumann
1903 – 1957

1934



Pascual Jordan
1902 – 1980



John von Neumann
1903 – 1957



Eugene Wigner
1902 – 1995

**ON AN ALGEBRAIC GENERALIZATION OF THE QUANTUM
MECHANICAL FORMALISM**

BY P. JORDAN, J. V. NEUMANN, AND E. WIGNER

(Received November 10, 1933)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 35, No. 1, January, 1934

1936



Garrett Birkhoff
1911 – 1996



John von Neumann
1903 – 1957

THE LOGIC OF QUANTUM MECHANICS

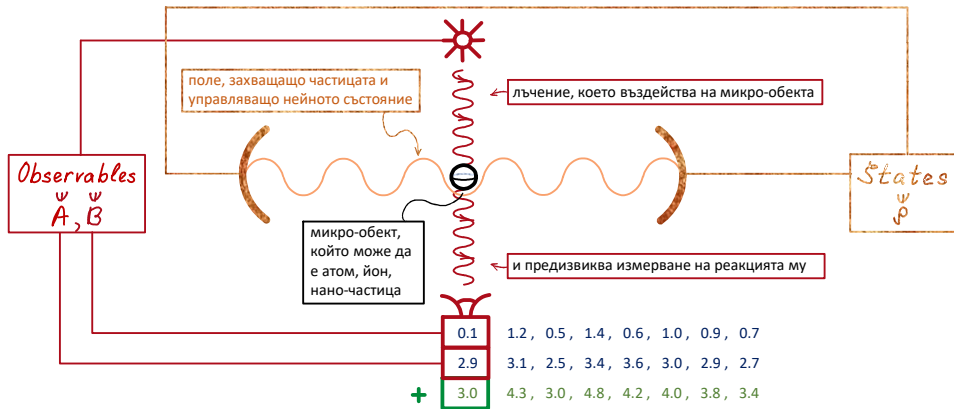
BY GARRETT BIRKHOFF AND JOHN VON NEUMANN

(Received April 4, 1936)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 37, No. 4, October, 1936

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

са експеримент, чи йто резултати са няколко числа



съвместни

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- n на брой едновременно измерими наблюдаеми са експеримент, чийто резултати са n на брой числа
- Измерените стойности на едновременно измерими наблюдаеми се получават заедно при всяко измерване и от тях вземаме функциите :

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$
A^2	a_1^2	a_2^2	a_3^2	a_4^2	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A^2 \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_N^2}{N}$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A+B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1+b_1) + \dots + (a_N+b_N)}{N}$
$A \cdot B$	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \cdot B \rangle_{\varrho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 \cdot b_1) + \dots + (a_N \cdot b_N)}{N}$

съвместни

4. Едновременно измерими наблюдаеми и функции от тях

- Всяка наблюдаема сама по себе си е съвместна и можем да определим функции от нея. В частност, можем да постулираме (т.е., да въведем аксиома), че в *Observables* има операции $A \mapsto A^n$ - вдигане на произволна степен $n = 1, 2, \dots$.

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
A^n	a_1^n	a_2^n	a_3^n	a_4^n	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A^n \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_N^n}{N}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N}$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle \lambda A \rangle_{\mathcal{P}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(\lambda a_1) + \dots + (\lambda a_N)}{N} = \lambda \langle A \rangle_{\mathcal{P}}$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\begin{aligned} \langle A+B \rangle_{\mathcal{P}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1+b_1) + \dots + (a_N+b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + \dots + a_N) + (b_1 + \dots + b_N)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_N}{N} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + \dots + b_N}{N} \\ &= \langle A \rangle_{\mathcal{P}} + \langle B \rangle_{\mathcal{P}} \end{aligned}$

5. Статистическа сума на произволни (дори и несъвместни) наблюдаеми

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
λA	λa_1	λa_2	λa_3	λa_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(\lambda A) = \lambda \rho(A)$
$A+B$	a_1+b_1	a_2+b_2	a_3+b_3	a_4+b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$

- Аксиома: $Observables$ е линейно пространство над числовата система,
 в която наблюдаемите приемат стойности, като при това, всяко състояние ρ
 става линейен функционал върху $Observables$ (т.е., линейна функция, чийто
 стойности са числа):

$$\rho(\lambda A + \mu B) = \lambda \rho(A) + \mu \rho(B)$$

числа
наблюдаеми

6. Проблемът с произведението

A	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle A \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N} =: \rho(A)$
B	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdot \cdot \cdot$	$\langle B \rangle_{\rho} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_N}{N} =: \rho(B)$
A.B	$a_1 \cdot b_1$	$a_2 \cdot b_2$	$a_3 \cdot b_3$	$a_4 \cdot b_4$	$\cdot \cdot \cdot$	$\rho(A.B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(a_1 \cdot b_1) + \dots + (a_N \cdot b_N)}{N}$ $\neq \rho(A) \rho(B)$

- Има проблем за определяне на произведение на наблюдаеми, които не са съвместни. Но квадратите са частни случаи на произведение – това предлага изход: поляризацията.

$$A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$$

- нарича се Йорданово произведение
Jordan's product



Pascual Jordan
1902 – 1980

6. Проблемът с произведението

- Йордановото произведение $A \bullet B := \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2)$ е дефинирано от досега постулираните операции над наблюдаеми - степенуване и линейни комбинации: $\exists A^2, \exists B^2, \exists (A+B), \exists (A+B)^2, \exists \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2) =: A \bullet B$.
- Йордановото произведение е комутативно, $A \bullet B = B \bullet A$ и възпроизвежда квадратите: $A^2 = A \bullet A$.
- Ако $\exists$ дистрибутивно произведение " $\cdot$ " (т.е., за което могат да се разкриват скоби), така че $A^2 = A \cdot A$, тогава

$$\begin{aligned} A \bullet B &= \frac{1}{2} ((A+B)^2 - A^2 - B^2) = \frac{1}{2} ((A+B) \cdot (A+B) - A \cdot A - B \cdot B) \\ &= \frac{1}{2} (\cancel{A \cdot A} + A \cdot B + B \cdot A + \cancel{B \cdot B} - \cancel{A \cdot A} - \cancel{B \cdot B}) = \frac{1}{2} (A \cdot B + B \cdot A) \end{aligned}$$

В частност: $A \cdot B = B \cdot A \iff A \bullet B = A \cdot B$

6. Проблемът с произведението

- В последния случай, Йордановото произведение " $\bullet$ " е дистрибутивно (т.е., за него могат да се разкриват скоби), но ако $A \cdot B \neq B \cdot A$ и $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (т.е., второто произведение е асоциативно), то Йордановото произведение не е асоциативно. Наистина, в сила е тъждеството

$$(A \bullet B) \bullet C - A \bullet (B \bullet C) = \frac{1}{4} [B, [A, C]] \quad , \quad \text{където: } \overbrace{[A, B] := A \cdot B - B \cdot A}^{\text{комутатор}}$$

$$2 A \bullet B = \underbrace{A \cdot B + B \cdot A}_{\text{антикомутатор}}$$

Проверка:

||

||

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left((\cancel{A \cdot B} + \underline{B \cdot A}) \cdot C + C \cdot (\underline{A \cdot B} + \cancel{B \cdot A}) \right) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(A \cdot (\cancel{B \cdot C} + \underline{C \cdot B}) + (\underline{B \cdot C} + \cancel{C \cdot B}) \cdot A \right) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{4} \left(B \cdot (\underline{A \cdot C} - \underline{C \cdot A}) - (\underline{A \cdot C} - \underline{C \cdot A}) \cdot B \right)$$

6. Проблемът с произведението

1925 - 1927

- Аксиома (постулат за квантовото произведение - Хайзенберг - Борн - Дирак)

За всеки две наблюдаеми A и B е определено дистрибутивно и асоциативно произведение $A \cdot B$, което поражда степените: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A^2$, $A^4 = A \cdot A^3$, ...

Нарича се квантово произведение. След малко ще видим, че то извежда от класа на наблюдаемите.

Допълн. коментар: Квантовото произведение е в общия случай на наблюдаеми некомутативно, т.е. комутатора $A \cdot B - B \cdot A =: [A, B] \neq 0$ и Дирак е първия, който го свързва с формулата $[A, B] = i\hbar \{A, B\}$, където $\{A, B\}$ според Дирак $\{A, B\}$ е наблюдаема отразяваща инфинитезималния ефект от измерването на наблюдаемата A върху B . Тя пренася т.нар. "скобка на Пуасон" (Poisson's bracket) от класическата механика в квантовата теория и носи името "скобка на Дирак".

6. Проблемът с производението. Исторически бележки

- От формулите до тук следва, че: $A \cdot B = A \bullet B + i\hbar \frac{1}{2} \{A, B\}$

квантовото произведение	Йордановото произведение	имагинерна динамична квантова добавка
----------------------------	-----------------------------	--

- Дирак нарича наблюдаемите "q-числа" (q-quantum), а класическите наблюдаеми "c-числа" (c-classical/commuting). Така, Дирак първи въвежда "q-терминологията" от където по-късно идва и q-бита.

7. Математическото понятие за алгебра

- Нека K е числово поле. В квантовата теория основна роля играят случаите $K = \mathbb{R}$ (реалните числа) и $K = \mathbb{C}$ (комплексните числа).
- Алгебра над полето K или още, K -алгебра, това е линейно пространство $\mathcal{A}$ над K , което е снабдено с допълнителна бинарна операция, обикновено наричана произведение и което в случая ще отбележим с "малка точка": " $\cdot$ ". Произведението " $\cdot$ " е дистрибутивно: за $\forall \alpha, \beta, \mu, \nu \in K$ и $\forall A, B, C, D \in \mathcal{A}$:

$$(\alpha A + \beta B) \cdot (\mu C + \nu D) = \alpha \mu A \cdot C + \alpha \nu A \cdot D + \beta \mu B \cdot C + \beta \nu B \cdot D$$
 - т.е., можем да разкриваме скоби и да изнасяме числата отпред; нарича се също билинейност (т.е., разделна линейност по двата аргумента).
- $\mathbb{R}$ -алгебрите се наричат още реални алгебри.
- $\mathbb{C}$ -алгебрите се наричат още комплексни алгебри.

7. Математическото понятие за алгебра

- Основни типове алгебри

- $\mathcal{A}$ е комутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = B \cdot A$.
- $\mathcal{A}$ е асоциативна алгебра, ако $\forall A, B, C \in \mathcal{A} : (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $\mathcal{A}$ е алгебра с единица, ако $\exists \hat{1} \in \mathcal{A}$, т.е. за $\forall A \in \mathcal{A} : \hat{1} \cdot A = A = A \cdot \hat{1}$.
- Горните типове могат независимо да се комбинират, например:
 - комутативни и асоциативни алгебри;
 - асоциативни алгебри с единица;
 - комутативни и асоциативни алгебри с единица.
- Отделно, изброените до тук алгебри могат да се реални или комплексни.

7. Математическото понятие за алгебра

- Допълнителни типове алгебри (играят роля в квант. теория, но не и в курса)

- $\mathcal{A}$ е антикоммутативна алгебра, ако $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cdot B = -B \cdot A$.

- $\mathcal{A}$ е степенно асоциативна, ако за $\forall A \in \mathcal{A}$ и $\forall n, m \in \mathbb{N} : A^n A^m = A^{n+m}$,
където : $A^n := A \cdot A^{n-1}$ (по индукция за $n > 1$).

- $\mathcal{A}$ е Йорданова алгебра, ако е комутативна и степенно асоциативна.

- $\mathcal{A}$ е алгебра на Ли, ако е антикомутативна и изпълнява т.нар. твърждество на Якоби

$$\forall A, B, C \in \mathcal{A} : [A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]], \text{ където в този случай е}$$

прието дистрибутивната операция да се бележи с " $[\cdot, \cdot]$ " и да се нарича скобка на Ли.

7. Математическото понятие за алгебра

- Конвенция :

Оттук нататък в курса , когато имаме асоциативна алгебра ще изпускаме точката "." за произведение :

$$A.B \equiv AB$$

Елементите на алгебрата обикновено ще бележим с големи "печатни" латински букви, а алгебрата: $\mathcal{A}$.

8. Спрежение

- Квантовото произведение е асоциативно, но в общия случай е некомутативно. Оказва се, че това важи ако A и B са наблюдаеми, то $A.B (\equiv AB)$ не е наблюдаема. Така, асоциативната алгебра $\mathcal{A}$, в която се умножават наблюдаемите е по-широка от Observables : $\mathcal{A} \not\subseteq \text{Observables}$
- Възниква проблем: как да се отделият наблюдаемите. За тази цел се постулира, че в $\mathcal{A}$ има допълнителна операция, спре~~же~~ние:

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto A^* \in \mathcal{A}$$

$$\text{т.е: } A^{**} = A \quad (\forall A \in \mathcal{A}), \quad (AB)^* = B^* A^* \quad (\forall A, B \in \mathcal{A}) \quad \text{и}$$

$$A \in \text{Observables} \iff A = A^* \quad (\text{самоспрежнатост})$$

selfadjoint

8. Спрежение

- Така, $Observables$ се оказва винаги реално линейно пространство (понеже $\alpha^* \equiv \bar{\alpha} = \alpha$ е в сила само за реални числа α).
- Също така, ако $A, B \in Observables$ (наблюдаеми), то $(AB)^* = B^* A^* = BA$.
Следователно, ако A и B са наблюдаеми ($A, B \in Observables$), то:
 - $(A \bullet B)^* = A \bullet B$ (Йордановото произведение на наблюдаеми е пак наблюдаемо)
 - $(i[A, B])^* = i[A, B]$ (скобката на Дирак на наблюдаеми е пак наблюдаема)
 - AB е наблюдаема $\iff AB = BA$ (A и B комутират)

9. $\ast$ -Алгебри (*Star algebras / involutive algebras*).

- $\ast$ -Алгебра е асоциативна алгебра $\mathcal{A}$ над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, която допълнително снабдена с операция $\ast: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, която е:

(инволютивна / *involutive*) $A^{\ast\ast} = A \quad (\forall A \in \mathcal{A})$;

(антилинейна / *antilinear*) $(\alpha A + \beta B)^{\ast} = \bar{\alpha} A^{\ast} + \bar{\beta} B^{\ast} \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{A})$;

(антиморфизъм / *antimorphism*) $(AB)^{\ast} = B^{\ast} A^{\ast} \quad (\forall A, B \in \mathcal{A})$.

- $\ast$ -алгебрата $\mathcal{A}$ се нарича положителна (още, формално положителна / *formally real* или също, евклидова / *Euclidean*), ако $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$:

$$A_1^{\ast} A_1 + \dots + A_n^{\ast} A_n = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \dots = A_n = 0.$$

10. Аксиоми на алгебричния подход

- Съществува комплексна, асоциативна, $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$ с единица, която е положителна, така, че $A \in \text{Observables} \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$ и $A = A^*$.
 $\mathcal{A}$ се нарича алгебра на наблюдаемите (макар, че не всички нейни елементи са наблюдаеми).
- Крайност: $\mathcal{A}$ е крайно-мерно линейно пространство.
- $\rho \in \text{States} \Leftrightarrow \rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ е линейен функционал, който изпълнява свойствата:
 (нормираност) $\rho(\hat{1}) = 1$;
 (положителност) $\rho(A^*A) \geq 0$ за $\forall A \in \mathcal{A}$.
- За наблюдаема A : $\rho(A) =: \langle A \rangle_\rho$ се интерпретира, като средна стойност на A в ρ .

11. Някои предстоящи въпроси

- Защо за състоянията ни е достатъчно да задаваме само средните стойности на наблюдаемите? За целта ще преговорим някои начални въпроси от теория на вероятностите за случайни величини и ще споменем допълнително т. нар. "теорема на Хамбургер за момените" (Hamburger's moment theorem).
- Към теорията на класическите случайни величини ще добавим и теоремата на Бохнер (Bochner's theorem), което ще покаже, защо за състоянията са необходими и достатъчни условията за нормираност и положителност.
- Ще коментираме защо алгебрата на наблюдаемите е комплексна, а пространството на наблюдаемите е реално.
- Защо трябва да има асоциативно квантово произведение? Има ли по-обща ситуация? На това ще ни отговори подхода на Йордановите алгебри.
- Как квантово-логическият подход се интерпретира в алгебричния? Еквивалентни ли са?

12. Най-важното от лекцията

- Понятието за комплексна, асоциативна, $*$ -алгебра с $\hat{1}$ – такава е алгебрата на наблюдаемите
- Наблюдаемите са точно всички самоспрегнати елементи на алгебрата на наблюдаемите (т.е., $A \in \mathcal{A}$ и $A = A^*$).
- Състояние ρ е (комплексен) линеен функционал върху алгебрата на наблюдаемите, който е нормиран ($\rho(\hat{1}) = 1$) и е положителен ($\rho(A^*A) \geq 0$ за $\forall A \in \mathcal{A}$).
- За наблюдаема A : $\rho(A) =: \langle A \rangle_\rho$ се интерпретира, като средна стойност на A в ρ .