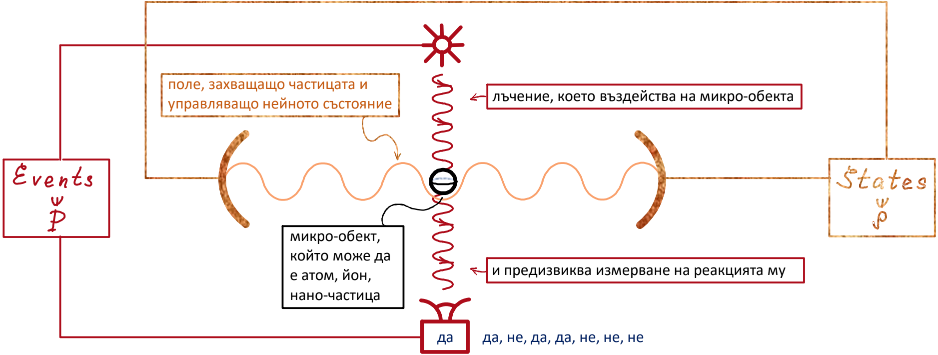
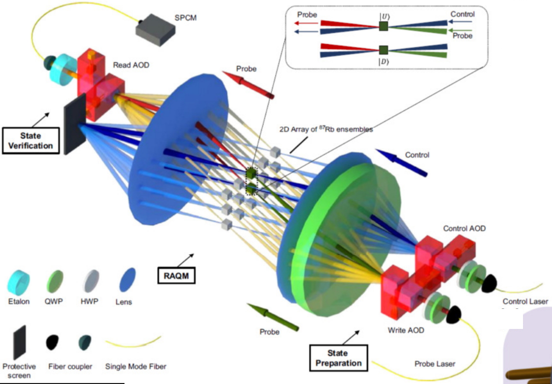
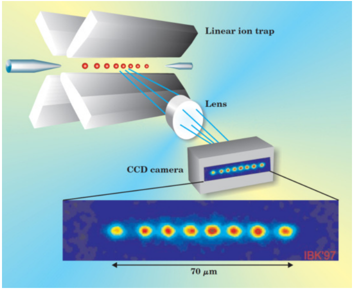
# КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА, ЛЕКЦИЯ 4 / 27.10.2021

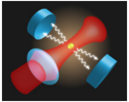
# Начална постановка:

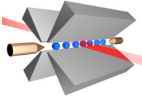


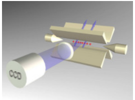

$$Prob_{\rho} P = \lim_{N \to \infty} \frac{\text{брой "да" в } N \text{ последователни опита}}{N}$$

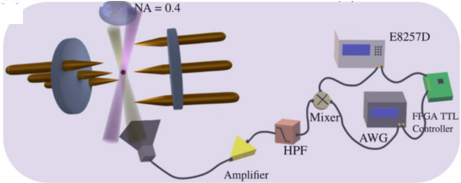

SPCM
Read AOD
Probe
State Verification
Probe
|U⟩
Control
Probe
|D⟩
2D Array of 87Rb ensembles
Control
Control AOD
RAQM
Etalon
QWP
HWP
Lens
Control Laser
Probe
Write AOD
State Preparation
Probe Laser
Protective screen
Fiber coupler
Single Mode Fiber


Linear ion trap
Lens
CCD camera
IBK'97
70 μm






CCD


NA = 0.4
E8257D
Mixer
FPGA TTL Controller
AWG
HPF
Amplifier

Начална постановка:

$$\mathcal{E}vents \times \mathcal{S}tates \longrightarrow [0,1] : (P, \rho) \longmapsto \mathrm{Prob}_\rho P =: \rho(P)$$

съгласно

първата аксиома за отделимост ние третираме състоянията, като функции от събитията

Втората аксиома за отделимост = множеството на състоянията, като функции върху множеството $\mathcal{E}vents$ разделя елементите му.

Две системи считаме тъждествени (изоморфни), ако има взаимно-еднозначни и обратими съответствия между множествата на събитията им и множествата на състоянията им, съответно, при което се получават еднакви вероятности при съответстващи си събития и състояния

Основна логическа релация:

За $P, Q \in \mathcal{E}vents$ : $P \preccurlyeq Q \iff \begin{cases} \rho(P) = 1 \implies \rho(Q) = 1 & (\forall \rho) \\ \rho(Q) = 0 \implies \rho(P) = 0 & (\forall \rho) \end{cases}$

Квантово логически операции "$\wedge$" и "$\vee$": изискваме да съществуват, т.че.

(наредба) $P \preccurlyeq Q \iff P = P \wedge Q \iff Q = P \vee Q$

(асоциативност) $P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$

(комутативност) $P \wedge Q = Q \wedge P$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$

(поглъщане) $P \wedge (P \vee Q) = P$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$

(идемпотентност) $P \wedge P = P$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$

} Events е решетка

(нула и единица) $P \wedge \hat{0} = \hat{0}$, $P \vee \hat{0} = P$

$P \wedge \hat{1} = P$, $P \vee \hat{1} = \hat{1}$

} Events е решетка с 0 и 1

(отрицание) $(P^\perp)^\perp = P$

$P \wedge P^\perp = \hat{0}$, $P \vee P^\perp = \hat{1}$

$(P \wedge Q)^\perp = P^\perp \vee Q^\perp$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$

} Events е орто-решетка

– това са всички закони на класическото пропозиционално смятане без дистрибутивността:

$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $(\wedge \leftrightarrow \vee)$

Заключителни аксиоми:

**Закон за орто-модуларност:** Ако $P \preccurlyeq Q$, $P, Q \in Events$, то $Q = P \vee (Q \setminus P)$,
където $Q \setminus P := Q \wedge P^{\perp}$

**Закон за покриването:** Ако $P, Q \in Events$, $P$ е елементарно, то $P \vee Q$ покрива $Q$.

Където:
- събитието $T$ покрива събитието $S$, ако $S \preccurlyeq T$, $S \neq T$ и от $S \preccurlyeq R \preccurlyeq T$ следва, че $S = R$ или $R = T$
- събитието $P$ е елементарно, ако $P$ покрива $\hat{0}$.

**Атомарност:** Всяко ненулево събитие мажорира елементарно събитие.

**Крайност:** Съществува $N \in \mathbb{N}$, т.че за всяка верига $\hat{0} \preccurlyeq Q_1 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq Q_n \preccurlyeq \hat{1}$ имаме $n \leq N$.
$\hat{0} \neq Q_1 \neq \quad \neq Q_n \neq \hat{1}$

Състояния: $States = Prob.Dist.(Events)$.

Където: • $Prob.Dist.(Events) = \{\rho : Events \to [0,1] \mid \rho$ е вероятност $\}$;

• $\rho : Events \to [0,1]$ е вероятност, ако е нормирана: $\rho(\hat{1}) = 1$

и адитивна: $\rho(Q) = \rho(P) + \rho(Q \setminus P)$ за $P \preccurlyeq Q$

По такъв начин, една система се опреля напълно от задаването на Events, като орто-решетка.

С други думи: Всичко се определя от това, какви събития можем да наблюдаваме.

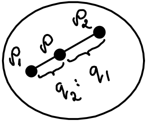
Пример: класическа система - определя се от крайно множество $\Omega$, така че

$$Events := \mathcal{P}(\Omega) \quad , \quad States := Prob.Dist.(\Omega) \; (\cong Prob.Dist.(\mathcal{P}(\Omega)))$$

Това, което в началото на курса бяхме сложили, като аксиома, сега може да се докаже:

<u>Теорема.</u> Множеството на състоянията е затворено изпъкнало подмножество на линейното пространство на всички функции $\mathcal{E}vents \to \mathbb{R}$.

Припомняме: $\mathcal{S}tates$ ще бъде изпъкнало подмножество на $\{\mathcal{E}vents \to \mathbb{R}\}$, ако за $\forall \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}tates$ и $\forall\, q_1, q_2 \in [0,1]$, $q_1 + q_2 = 1$




$$\Longrightarrow \rho = \underbrace{q_1\rho_1 + q_2\rho_2}_{\text{това се нарича:}} \in \mathcal{S}tates$$

- в геометрията – изпъкнала линейна комбинация с тегла $q_1, q_2$
- в квант. теория – смес на състояния с тегла $q_1, q_2$

Точките на изпъкнало множество, които не могат да се представят в нетривиална изпъкнала комбинация (т.е., с нетривиални тегла $q_1, q_2 \neq 0$ и $1$) се наричат в геометрията екстремални точки, а в квантовата теория – чисти състояния.

Значение: 1) това са максимално изчистени от неопределеност състояния.

2) Те пораждат (по т.нар. теорема на Крейн-Милман) всички състояния при смесване.

# 1. Ниво на събитие. Етажна структура на събитията. Ранг на системата

- Събитието $Q$ има ниво $n$, ако за всяка верига $\hat{0} \precnsim Q_1 \precnsim \cdots \precnsim Q_{m-1} \precnsim Q$ имаме $m \le n$, $n = \max m$
- В орто-модуларни решетки, каквато е Events, нивата формират етажи: доказва се, че всяка верига $\hat{0} \precnsim Q_1 \precnsim \cdots \precnsim Q_{m-1} \precnsim Q$, която не може да се разшири, т.е., всеки нейн елемент покрива предходния, има една и съща дължина = нивото на $Q$.

(Нарича се свойство на Жордан-Хьолдер / Jordan-Hoelder)

Така: събитието $Q$ покрива събитието $P \iff$ нивото на $Q$ = 1 + нивото на $P$.

За $P \precsim Q$ : нивото на $Q \setminus P$ = нивото на $P$ − нивото на $\hat{Q}$

в частност : нивото на $Q^{\perp}$ = $\underbrace{\text{нивото на } \hat{1}}_{:= \text{ ранг на системата}}$ − нивото на $\hat{Q}$

(понеже $Q^{\perp} = \hat{1} \setminus Q$)

етаж $N$ :

етаж $N-1$ :

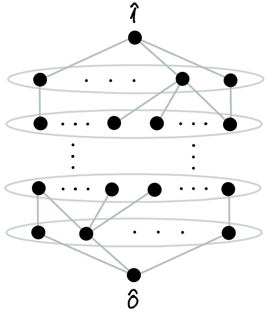
етаж $N-2$ .

⋮

етаж $2$ :

етаж $1$ :

етаж $0$ :

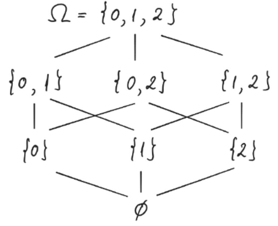



Нивото на $\hat{1}$ се нарича ранг на системата

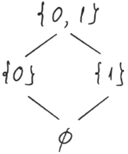
Диаграма на Хасе / Hasse : два елемента са съединени с вертикална черта, ако горния покрива долния

елементарни събития = атоми на Events

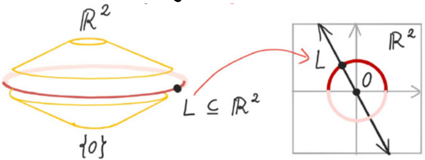
класическа система от ниво 3




класически бит:




квантов бит (над $\mathbb{R}$):



# 2. Подсистеми. Надсистеми

- Подсистема на система с орто-решетка на събитията Events се определя от нейна под-орто-решетка $Events' \subseteq Events$ (припомняме: орто-решетката на събитията определя цялата структура, в частност: $States' = Prob.Dist.(Events')$).
- Под-орто-решетка $Events' \subseteq Events$ е подмножество, което заедно с $\forall P, Q \in Events'$ съдържа и $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P^{\perp}$. В частност, $0 = P \wedge P^{\perp} \in Event'$ и $1 \in Events'$.
- Смисъл: подсистемата е подмножество от събития, но със старите логически операции. Това ще бъде изходна позиция при теорията на съставните системи. Но това не е всичко.
- Над-система на система е такава, за която последната е подсистема.

Това описва: $Events_1 \subseteq Events_2 \subseteq Events_3 \subseteq \cdots \subseteq Events_{\infty}$

— процеса на прецизиране на измерванията и също, процеса на "надграждане" на изчисленията.

# 2. Булеви алгебри и подалгебри. Експерименти на системата

- Булева алгебра е орто-решетка, в която се изпълняват дистрибутивните закони:

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

- Булева подалгебра на орто-решетка е под-орто-решетка, която сама по себе си е булева алгебра.

- Подсистема, определена от булева подалгебра на Events се нарича експеримент.

- Чрез теорията на булевите алгебри се доказва, че множеството от събитията на една (крайна) система е булева алгебра $\Longleftrightarrow$ системата е класическа.

- Всъщност, атомите на булевата алгебра $\mathcal{P}(\Omega)$ са синглетоните $\{\omega\}$ при $\omega \in \Omega$ и така те са 1-1 съответствие с $\Omega$.

- Елементарни събития (алтернативи) на експеримет са атомите на булевата му подалгебра. Те може да не са елементарни събития на Events обаче!

# 2. Булеви алгебри и подалгебри. Експерименти на системата

- Примери на булеви подалгебри (експерименти):
  - във всяка орто-решетка (в т.ч. и Events) и всеки нейн елемент $P$ $\{\hat{0}, \hat{1}\}$ и $\{\hat{0}, P, P^{\perp}, \hat{1}\}$ са булеви подалгебри от ниво 1 и 2, съотв. Първата отговаря на тривиалния, най-малък експеримент, а втората отговаря на най-малкия експеримент, при който се тества събитието $P$.
  - за всяка орто-модуларна решетка (в т.ч. и Events) и всеки два елемента $P \lneq Q$ т.че $\hat{0} \neq P \neq Q \neq \hat{1}$, подмножеството $\{\hat{0}, P, Q, P^{\perp}, Q^{\perp}, Q \setminus P, P^{\perp} \setminus Q^{\perp}, \hat{1}\}$ е булева подалгебра от ниво 3.

# 3. Комутируемост на събития

- Събитията $P$ и $Q$ се наричат комутиращи или още съвместни, ако могат да участват в общ експеримент.
- Тоест, $P, Q \in \mathcal{E}vents$ комутират, ако се съдържат в обща булева подалгебра на $\mathcal{E}vents$.
- Доказва се, че $P$ и $Q$ комутират $\iff \begin{cases} P = (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q^{\perp}) \\ Q = (P \wedge Q) \vee (P^{\perp} \wedge Q) \end{cases}$

  $\boxed{\text{използва орто-модулярността}}$

- В частност, ако $P \preceq Q$, то $P$ и $Q$ комутират.
- Доказва се, че в орто-модулярни решетки: няколко елемента комутират, ако всеки два комутират.
- Внимание: релацията "комутируемост" е симетрична, но в общия случай не е транзитивна! (Контрапример - по-късно.)

# 4. Дизюнктивни събития. Дизюнктивни разбивания на събития и единицата

- Събитията $P$ и $Q$ се наричат дизюнктивни (още: взаимно изключващи се) $\iff \begin{cases} P \wedge Q = \hat{0} \\ P \text{ и } Q \text{ са съвместни (комутират)} \end{cases}$

  В класическия случай е достатъчно само $P \wedge Q = \hat{0}$, но не и в квантовия.
  За $n$ събития: $Q_1, \dots, Q_n$ са дизюнктивни, ако са две по две дизюнктивни.

- Ако за събития имаме $P = Q_1 \vee \cdots \vee Q_n$ и $Q_1, \dots, Q_n$ са ненулеви и дизюнктивни тогава пишем: $P = Q_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} Q_n$ и казваме, че имаме дизюнктивно разбиване на $P$.
  Ако $P = \hat{1}$, то казваме, че имаме (дизюнктивно) разбиване на $\hat{1}$.

- <u>Теорема.</u> Имаме 1-1 съответствие между експериментите (т.е., булевите подалгебри на $\mathcal{E}vents$) и разбиванията на $\hat{1}$, при което събитията в разбиването на $\hat{1}$ се явяват елементарните събития на експеримента.

# 5. Максимални експерименти

- При ситуация, когато за два експеримента имаме включване $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ за съответните булеви подалгебри, това означава, че експеримента $\mathcal{B}_1$ е по-груб от $\mathcal{B}_2$ или също, че $\mathcal{B}_2$ е по-фин експеримент от $\mathcal{B}_1$.

- Максимален експеримент: такъв, който не може да се прецизира (разшири) повече. Тоест, това е максимална булева подалгебра и съдържа максимална информация, която можем да получим в едно наблюдение за системата.
  Ако системата е класическа, то $\mathcal{E}$vents е булева алгебра и това е единствената максимална булева подалгебра. В противен случай - няма единствена максимална.
  Тоест, за некласически системи максималната информация никога не пълна!
  Тогава различните максимални наблюдения се явяват "взаимно допълващи се".

# 5. Максимални експерименти

- Конструиране на максимални експерименти: нека $P_1 \in$ Events е елементарно събитие. Ако $P_1 = \hat{1}$, то системата е от ниво 1, т.е., класически синглетон. В противен случай, $P_1^\perp \neq \hat{0}$ и $\Rightarrow$ $\exists$ елементарно събитие $P_2 \precsim P_1^\perp$ (аксиома). Ако $P_1 \vee P_2 = \hat{1}$, то системата е от ниво 2. В противен случай $(P_1 \vee P_2)^\perp \neq \hat{0}$ и $\exists$ елементарно събитие $P_3 \precsim (P_1 \wedge P_2)^\perp$. И т.н., получаваме елементарни събития $P_1, P_2, \ldots, P_N$, за които $P_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} P_n = \hat{1}$. Показва се, че това са елементарните събития на максимален експеримент.

- По-нататък ще покажем, че в нашите основни модели на квантови системи, определени от хилбертови пространства, максимален експеримент се определя от ортонормиран базис (оттам идва израза "измерване в базис").

# 6. Център на системата и централно разбиване

- Център на Events (и аналогично, на всяка орто-решетка) е множеството

$$\mathcal{Z}(\text{Events}) = \{ P \in \text{Events} \mid P \text{ комутира с } Q \text{ за } \forall Q \in \text{Events} \}$$

Събитията от центъра се наричат централни събития.

- Доказва се, че $\mathcal{Z}(\text{Events})$ е булева подалгебра на Events (както и при всяка орто-модуларна решетка)

- Нека $E_1, \dots, E_r$ са атомите на булевата подалгебра $\mathcal{Z}(\text{Events})$. Тогава,

$$\hat{1} = E_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} E_r \quad \text{- централно разбиване на } \hat{1}$$

и за всяко събитие $P = P \wedge \hat{1} = P \wedge (E_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} E_r)$

$$= (P \wedge E_1) \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} (P \wedge E_1) \quad \text{- централно разбиване на } P.$$

# 7. Неприводими системи. Разлагане на неприводими / irreducible

- Една система е неприводима, ако има тривиален център, т.е.,

$$\mathcal{Z}(\mathcal{E}vents) = \{\hat{0}, \hat{1}\}$$

- За произволна система: ако $E_j \in \mathcal{Z}(\mathcal{E}vents)$ е атом,

$$\mathcal{E}vents_j := \{P \in \mathcal{E}vents \mid \hat{0} \preccurlyeq P \preccurlyeq E_j\} =: [\hat{0}, E_j]$$ – нарича се сегмент в решетка

е неприводима орто-модуларна решетка и $\Rightarrow$ определя неприводима система

- Внимание: $\mathcal{E}vents_j$ не е под-орто-решетка на $\mathcal{E}vents$ и следователно, не е подсистема! Това е така, понеже единица на $\mathcal{E}vents_j$ е $E_j$, а не $\hat{1} \notin \mathcal{E}vents_j$ !!!

# 7. Неприводими системи. Разлагане на неприводими / irreducible

- Внимание: по-нататък, при съставните системи ще се окаже, че при комбиниране на няколко неприводими подсистеми в една обща система, то резултата ще бъде отново неприводима система.

- <u>Централна структурна теорема</u> $\mathcal{E}vents = \mathcal{E}vents_1 \times \cdots \times \mathcal{E}vents_r$
  – разбиване в т.нар. пряко произведение

  То следва от централното разбиване: $P = P_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} P_n \leftrightarrow (P_1, \ldots, P_r)$

  Оказва се, че за $P' \leftrightarrow (P_1', \ldots, P_r')$ и $P'' \leftrightarrow (P_1'', \ldots, P_r'')$

  имаме: $P' \precsim P'' \iff P_1' \precsim P_1'', \ldots, P_r' \precsim P_r''$.

- За класическа система $\mathcal{E}vent_j$ са отделните синглетони.

# 8. Структура на неприводимите системи – геометризация

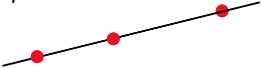
- Неприводимте системи са градивните логически и структурни блокове на всяка система. За класическите системи – това са синглетоните.

- Забелязана е следната връзка с геометрията:
  - нека обявим за "точка" всяко елементарно събитие $P$ (т.е., от ниво 1);
  - нека обявим за "линия" (права) всяко събитие $Q$ от ниво 2;
  - нека обявим, че една точка $P$ "лежи на" линията $Q \iff P \preceq Q$;
  - оттук идват и изразите "линия съдържа точка", "пресечни точки на линии" и др.;
  - тогава, ако Events е неприводима, то се изпълняват т.нар. аксиоми на Уайтхед (Whitehead) https://en.wikipedia.org/wiki/Projective_geometry#Axioms_of_projective_geometry

# 8. Структура на неприводимите системи – геометризация

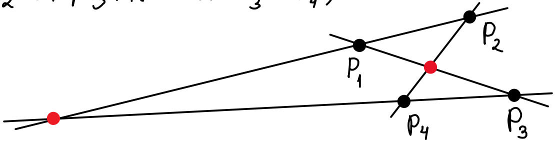
- Аксиоми на Уайтхед на **проективната** геометрия :

(G1) Всяка линия съдържа поне три точки.



(G2) Всеки две различни точки $P_1$ и $P_2$ лежат на точно една линия $Q =: \overline{P_1 P_2}$

(G3) Ако линии $\overline{P_1 P_2}$ и $\overline{P_3 P_4}$ се пресичат, то също и $\overline{P_1 P_3}$ и $\overline{P_2 P_4}$ се пресичат (предполагайки, че $P_1$ и $P_2$ са различни от $P_3$ и $P_4$).



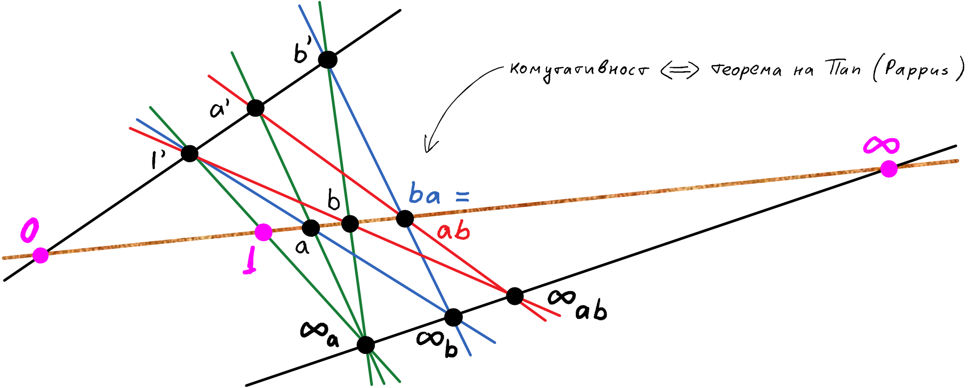
# 8. Структура на неприводимите системи – геометризация

- На базата на тези аксиоми могат да се построят т.нар. "проективни пространства" и тяхната размерност се оказва
  $$= \text{на } \underbrace{\text{рангът на Events}}_{\text{нивото на } \hat{1}} - 1$$
  Така, квантовият бит се оказва "проективна права" (т.е., dim = 1)

- Ако размерността на проективното пространство е $\geq 2$, то те съдържат в себе си числова система (пръстен с деление), с която могат да се координатизират.

# 8. Структура на неприводимите системи – геометризация

- Например, умножението:



# 8. Структура на неприводимите системи - геометризация

- Основни геометрични факти
  - Системите от ниво 2, т.е. "бит" имат геометрична (проективна) размерност 1, т.е. са проективни линии. Те нямат обаче достатъчна геометрична свобода, за да бъдат класифицирани
  - Системите от ниво 3 са двумерни проективни геометрии. Те имат достатъчно геометрично пространство за да се конструира числова система. В непрекъснатия случай възможностите са:

$\mathbb{R}$ - реални числа

$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}.i$ - комплексни числа

} комутативни, асоциативни

$\mathbb{H} = \mathbb{C} + \mathbb{C}.j = \mathbb{R} + \mathbb{R}.i + \mathbb{R}.j + \mathbb{R}.ij$ - кватерниони / quaternions, некомутативни, асоц.

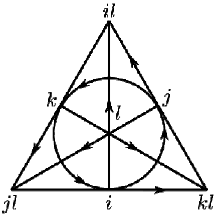
$\mathbb{O} = \mathbb{H} + \mathbb{H}.\ell = \mathbb{R} + \mathbb{R}.i + \mathbb{R}.j + \mathbb{R}.\ell + \cdots + \mathbb{R}.ij\ell$ - октониони / octonions, неасоц.

  - Системите от ниво $\geq 4$ имат винаги асоциативни числови системи.
  - В информатиката обаче ние се интересуваме и от изчислими числови сист.

# 8. Структура на неприводимите системи - геометризация

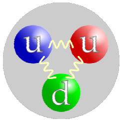
- Една от научните моди в последните години:

Octonions




Fano plane

Quarks, Leptons and The Standard Model




A proton is composed of two up quarks, one down quark, and the gluons that mediate the forces "binding" them together.

# 9. Допълнителна литература

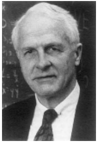
- http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/Talk_on_Quantum_Logic/Birkhoff_G.,_von%20Neumann_J.,_The_Logic_of_Quantum_Mechanics,_Ann_Math_2nd_Ser_v37_No4_(1936)_pp823-843_cropped.pdf

**THE LOGIC OF QUANTUM MECHANICS**

BY GARRETT BIRKHOFF AND JOHN VON NEUMANN

(Received April 4, 1936)

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 37, No. 4, October, 1936

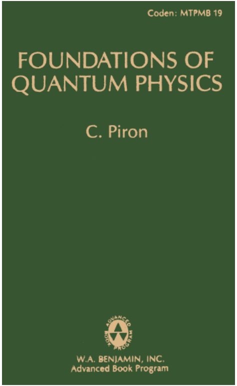


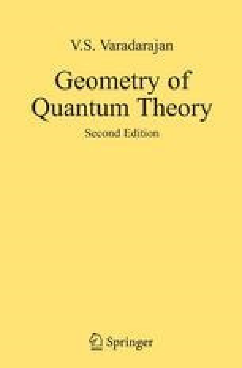
Garrett Birkhoff
(1911 – 1996)

John von Neumann
(1903 – 1957)

# 9. Допълнителна литература

- http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/literature/Piron_C.,_Foundations_Of_Quantum_Physics_cropped.pdf



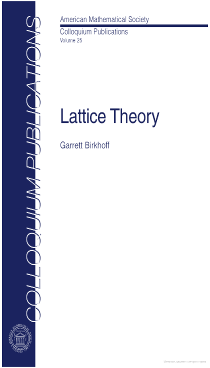




http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/literature/Varadarajan_V.S.,_Geometry_of_Quantum_Theory_cropped.pdf

# 9. Допълнителна литература

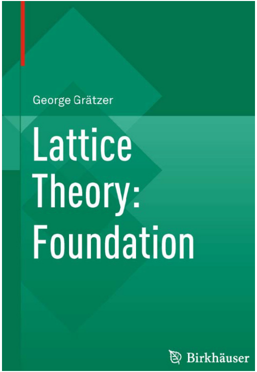
- Теория на решетките

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/literature/Birkhoff_G.,_Lattice_Theory_cropped.pdf




1st ed – 1940
2nd ed - 1948
3d ed – 1973

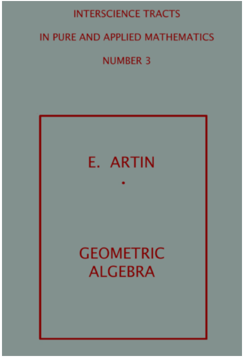
1st ed – 1978
.......................
2010




http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/literature/Gratzer_G.,_Lattice_theory_Foundation_cropped.pdf

# 9. Допълнителна литература

- Проективна геометрия



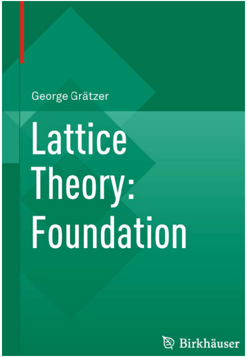

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/Talk_on_Quantum_Logic/Artin_E.,_Geometric_Algebra_cropped.pd

## CHAPTER II

## Affine and Projective Geometry

# 9. Допълнителна литература

- Проективна геометрия




http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/Talk_on_Quantum_Logic/Gratzer_G.,_Lattice_theory_Foundation_cropped.pdf

10. Най-важното от квантово-логическия подход

- Events е орто-решетка ($\wedge, \vee, \perp$ - без дистрибутивност)
- Състоянията $\rho$ ($\in$ States) са вероятностни функции върху събитията $P \in$ Events
  $\rho(\hat{1}) = 1$, $\rho(Q) = \rho(P) + \rho(Q \setminus P)$, за $P \leq Q$ $\left(Q \setminus P := Q \wedge P^{\perp}\right)$
- Смес на състояния. Чисти състояния
- Ниво на събитие: $\hat{0}$ е от ниво $0$, елементарните събития са от ниво $1$, ниво на $\hat{1} =:$ ранг на системата = максималния брой алтернативи в експериментите.
- Експеримент е булева подалгебра.
- Съвместни (комутиращи) събития = такива, които $\subseteq$ в общ експеримент
- Няколко събития са съвместни $\Longleftrightarrow$ те са две по две съвместни
- Дизюнктивни събития. Дизюнктивни разбивания $P = Q_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} Q_n$.
- Експеримент (= булева подалгебра) $\Longleftrightarrow$ разбиване на $\hat{1} = Q_1 \dot{\vee} \cdots \dot{\vee} Q_n$
  където $Q_1, \ldots, Q_n$ се явяват елементарните събития на експеримента
- Максимален експеримент $\Longleftrightarrow$ такъв за който елементарните му събития са елементарни за цялата система