КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА, ЛЕКЦИЯ 9 / 01.12.2021

ПАСАЖИТЕ С ДОПЪЛНИТЕЛЕН МАТЕРИАЛ СА ПОСТАВЕНИ В ЗЕЛЕН ЦВЯТ

С ЛИЛАВ ЦВЯТ СА ОТРАЗИ КОРЕКЦИИ СПРЯМО ПРЕДХОДНАТА ВЕРСИЯ

ТЕ СА НА СТР.: 8

Корекция към лекцията от 24.11.2021 стр. 7 от файла

http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/notes_df34g2tb3/QI_lecture_notes_24112021_v00.pdf

ПОПРАВЕНА ВЕРСИЯ: http://theo.inrne.bas.bg/~mitov/qi21/notes_df34g2tb3/QI_lecture_notes_24112021_v01.pdf

Кронекер / Kronecker

https://de.wikipedia.org/wiki/Kronecker-Produkt

Тензорни произведения по ~~Адамар (Hadamard)~~

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}}_{A \otimes B} , \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}}_{\Phi} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}}_{\Psi} = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \psi_1 \\ \phi_1 \psi_2 \\ \phi_2 \psi_1 \\ \phi_2 \psi_2 \end{pmatrix}}_{\Phi \otimes \Psi}$$

1. Теория на измерването

    Теория на измерването: примери и дискусия

2. Квантови трансформации

    Квантови трансформации: примери и дискусия

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xmapsto[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

състояние ρ

измерено е събитие Q с
вероятност $\mathrm{Prob}_{\rho}(Q)$

състояние ρ'

измерено е събитие P с
вероятност $\mathrm{Prob}_{\rho'}(P)$
$:= \mathrm{Prob}_{\rho}(P|Q)$

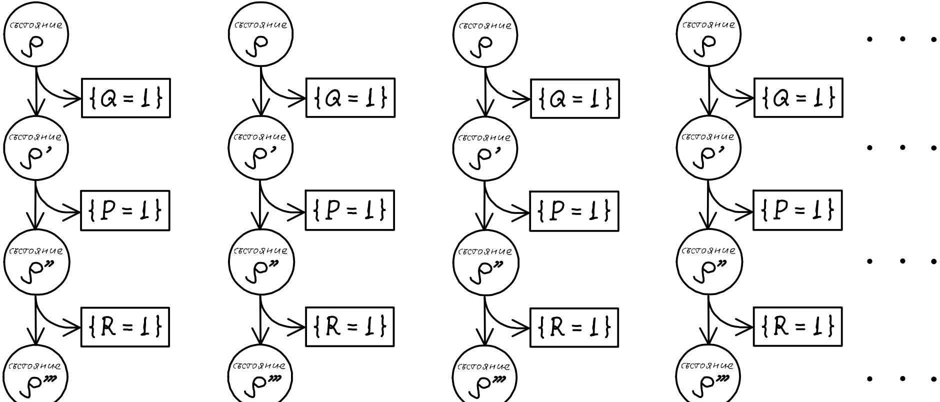
квантова условна вероятност

състояние ρ''

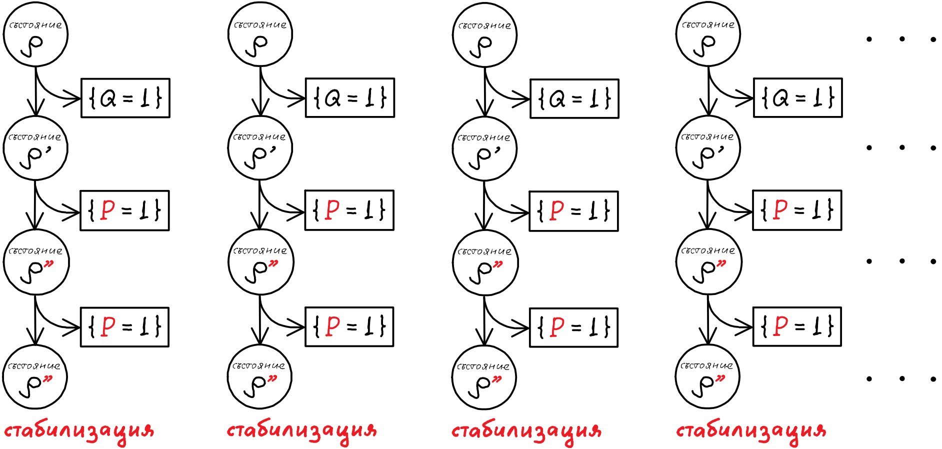
измерено е събитие R с
вероятност $\mathrm{Prob}_{\rho''}(R)$

състояние ρ'''

Основен проблем : какво се случва след измерване : $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$



Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$



Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = \,?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) \left(\equiv \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Коректност: ρ' е състояние – наистина,

понеже алгебрата на наблюдаемите $\mathcal{A}$ се поражда линейно от събитията P

(поради спектралната теорема), то: $\rho'(A) = \dfrac{\rho(QAQ)}{\rho(Q)}$ – като линеен функционал $\rho' : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ за $\forall A \in \mathcal{A}$.

Освен това, този линеен функционал е

нормиран: $\rho'(\hat{1}) = \dfrac{\rho(Q\hat{1}Q)}{\rho(Q)} = \dfrac{\rho(Q^2)}{\rho(Q)} = 1$

и положителен: $\rho'(A^*A) = \dfrac{\rho(QA^*AQ)}{\rho(Q)} = \dfrac{\rho((AQ)^*AQ)}{\rho(Q)} \geq 0$. $\square$

Основен проблем : какво се случва след измерване : $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман : $\rho'(P) \; \left(\equiv \mathrm{Prob}_{\rho}(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Следствие 1. : за $\forall A \in \mathcal{A}$, $\rho'(A) = \dfrac{\rho(QAQ)}{\rho(Q)}$

Следствие 2. : Ако ρ е състояние с матрица на плътността $\hat{\rho}$, то след настъпване на Q матрицата на плътността става : $\hat{\rho}' = \dfrac{1}{\mathrm{Tr}(\hat{\rho}Q)} Q\hat{\rho}Q$

Наистина : за $\forall A \in \mathcal{A}$ имаме $\rho'(A) \equiv \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}' A = \dfrac{\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}QAQ}{\rho(Q)} = \dfrac{\mathrm{Tr}\,Q\hat{\rho}QA}{\rho(Q)}$

$\Rightarrow \mathrm{Tr}\left(\left(\hat{\rho}' - \dfrac{1}{\mathrm{Tr}(\hat{\rho}Q)} Q\hat{\rho}Q\right)A\right) = 0$ за $\forall A \in \mathcal{A}$. Полагайки $A = |\Psi\rangle\langle\Phi|$,

то за $\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$ имаме $\langle\Phi| \underbrace{\left(\hat{\rho}' - \dfrac{1}{\mathrm{Tr}(\hat{\rho}Q)} Q\hat{\rho}Q\right)}_{\Rightarrow\, 0} |\Psi\rangle = 0.$ $\square$

Основен проблем : какво се случва след измерване : $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман : $\rho'(P) \left(\equiv \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Следствие 3. : кА ρ е чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n$ (единичен), то състоянието ρ' след настъпване на Q е отново чисто и има вектор $\Phi = \dfrac{1}{\|Q\Psi\|} \underbrace{Q\Psi}$

векторът на състояние се проектира ортогонално след измерване

Наистина : ако $\hat\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, то $\hat\rho' = const \cdot Q|\Psi\rangle\langle\Psi|Q = const . |Q\Psi\rangle\langle Q\Psi|$.

$\Rightarrow$ ρ' също е чисто и има вектор Φ, пропорционален на $Q\Psi$. $\square$

Забележете : $\|Q\Psi\|^2 = \mathrm{Prob}_\rho(Q)$ (от лекция 7) и $\Rightarrow$ ако Q настъпва в ρ, то $\|Q\Psi\| \neq 0$.

Основен проблем : какво се случва след измерване : $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = \,?$

Проекционен постулат на фон Нойман : $\rho'(P) \left(\equiv \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Забележете : в класически системи имаме $PQ = QP = P$ и Q. Затова : $\|$

формулата на Бейс / Bayes $\leftarrow$ $\mathrm{Prob}_\rho(P|Q) = \dfrac{\mathrm{Prob}_\rho(P \text{ и } Q)}{\mathrm{Prob}_\rho(Q)} \equiv \dfrac{\rho(QP)}{\rho(Q)}$

Закон на Бейс : $\mathrm{Prob}_\rho(P \text{ и } Q) = \mathrm{Prob}_\rho(Q) . \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)$

$= \mathrm{Prob}_\rho(Q \text{ и } P) = \mathrm{Prob}_\rho(P) . \mathrm{Prob}_\rho(Q|P)$

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) \left(\equiv \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Теорема. Нека положим $\mathrm{Prob}_\rho(P \text{ след } Q) := \mathrm{Prob}_\rho(Q) . \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)$

Тогава: $\mathrm{Prob}_\rho(P \text{ след } Q) = \mathrm{Prob}_\rho(Q \text{ след } P)$ ($\forall \rho$ - съст.) $\iff PQ = QP$

В този случай: $= \mathrm{Prob}_\rho(P \text{ и } Q)$

т.е., независимостта от реда на измерване е $\iff$ комотируемост, т.е., на съвместна измеримост

Доказателство. L.H.S.: $\rho(PQP) = \rho(QPQ)$ ($\forall \rho$ - състояние).

$\Rightarrow PQP = QPQ$. $\Rightarrow (PQ-QP)^2 = \underbrace{PQPQ}_{QPQ} + \underbrace{QPQP}_{PQP} - P\underbrace{QQ}_{Q}P - Q\underbrace{PP}_{P}Q = 0$. $\square$

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) \left(\equiv \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Теорема. $PQ = QP$ ← събитията P и Q комутират, т.е. са съвместно измерими

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd} & \rho' \arrow[dr, mapsto, "\{P=1\}"] & \\ \rho \arrow[ur, mapsto, "\{Q=1\}"] \arrow[dr, mapsto, "\{P=1\}"'] & & \rho'' \\ & \rho'_1 \arrow[ur, mapsto, "\{Q=1\}"'] & \end{tikzcd}$$

– за всяко състояние ρ.

Доказателство.

R.H.S: $\hat\rho'' = \dfrac{P\hat\rho' P}{\mathrm{Tr}(\hat\rho' P)} = \dfrac{PQ\hat\rho QP}{\mathrm{Tr}(\hat\rho QPQ)} \overset{\text{от друга страна}}{=} \dfrac{QP\hat\rho PQ}{\mathrm{Tr}(\hat\rho PQP)}$

($\forall \hat\rho$ – матрица на плътността)

за $\boxed{\mathrm{Tr}\, Q \cdot}$

$\mathrm{Tr}(\hat\rho QPQPQ) = \mathrm{Tr}(\hat\rho QPQ)$ $(\forall \hat\rho)$.

$\Longrightarrow$ QPQ е събитие.

$(QP - QPQ)(\underbrace{PQ - QPQ}_{=0}) = 0$

$PQ = (PQ)^* = QP$

Основен проблем : какво се случва след измерване : $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман : $\rho'(P) \left(\equiv \mathrm{Prob}_{\rho}(P|Q) \right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Мотивация : проекционният постулат може да се изведе от следните по-прости принципи

- Принцип за стабилизация : ако след измерване на събитие Q в състояние ρ се е установило състояние ρ' и ако тогава измерим Q в ρ', то Q ще настъпи в ρ' с вероятност 1 и състоянието повече няма да се промени (т.е., ще остане ρ').
- Принцип за "потвърждение": ако Q настъпва в състояние ρ с вероятност 1, то след настъпване на Q състоянието остава същото.

  (в тази връзка е и т.нар. "квантов ефект на Зенон": https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Zeno_effect)
- Принцип на "смесване": ако $\rho = q_1 \rho_1 + q_2 \rho_2$ и имаме $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho'$, $\rho_j \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho_j'$,

  за $j = 1, 2$, то $\mathrm{Prob}_{\rho'}(P \text{ след } Q) = q_1 \mathrm{Prob}_{\rho_1'}(P \text{ след } Q) + q_2 \mathrm{Prob}_{\rho_2'}(P \text{ след } Q)$

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) \left(\equiv \mathrm{Prob}_\rho(P|Q) \right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

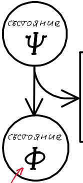
Следствие

Нека A е наблюдаема със спектрално разлагане $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_m Q_m$, ако при измерване на A в чисто състояние с вектор Ψ е измерена стойност α_k, то системата преминава отново в чисто състояние с вектор $\Phi = \dfrac{1}{\|Q_k \Psi\|} Q_k \Psi$, който е собствен вектор за A със собствена стойност α_k

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) \left(\equiv \mathrm{Prob}_\rho(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Преход между състояния и вероятност за преход: допълнителна интерпретация



измерено е елементарно събитие $Q = |\Phi\rangle\langle\Phi|$, съответстващо на вектор Φ с вероятност $p_{\Psi\mapsto\Phi}$

Векторът на състоянието след измерването:

$$\frac{1}{\|Q\Psi\|}Q\Psi = \frac{1}{|\langle\Psi|\Phi\rangle|^2}|\Phi\rangle\langle\Phi|\Psi\rangle = \overset{e^{i\varphi}}{\boxed{\frac{\overline{\langle\Psi|\Phi\rangle}}{\langle\Psi|\Phi\rangle}}}|\Phi\rangle$$

Нека: $\Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n$ - единични

$$\underbrace{p_{\Psi\mapsto\Phi}}_{\text{вероятност за преход}} = \Big|\underbrace{\langle\Psi|\Phi\rangle}_{a_{\Psi\mapsto\Phi}}\Big|^2$$

амплитуда на прехода

$$\mathrm{Prob}_\Psi(|\Phi\rangle\langle\Phi|) = \langle\Psi|\Phi\rangle\underbrace{\langle\Phi|\Psi\rangle}_{\overline{\langle\Psi|\Phi\rangle}}$$

Основен проблем: какво се случва след измерване: $\rho \xrightarrow[\{Q=1\}]{} \rho' = ?$

Проекционен постулат на фон Нойман: $\rho'(P) \left(\equiv \mathrm{Prob}_{\rho}(P|Q)\right) = \dfrac{\rho(QPQ)}{\rho(Q)}$

Наблюдение: след настъпване на елементарно събитие винаги се установява чисто състояние

Нека: $\Phi \in \mathbb{C}^n$ – единичен

състояние ρ

↓

состояние Φ

измерено е елементарно събитие $Q = |\Phi\rangle\langle\Phi|$, съответстващо на вектор Φ

състоянието след измерването:

$$\hat{\rho}' = \frac{Q\hat{\rho}Q}{\mathrm{Tr}(\hat{\rho}Q)} = \frac{|\Phi\rangle\cancel{\langle\Phi|\hat{\rho}|\Phi\rangle}\langle\Phi|}{\cancel{\mathrm{Tr}(\hat{\rho}|\Phi\rangle\langle\Phi|)}} = |\Phi\rangle\langle\Phi|$$

матрица на плътността на чисто състояние с вектор Φ

1. Теория на измерването

Теория на измерването: примери и дискусия

2. Квантови трансформации

Квантови трансформации: примери и дискусия

Колапсът на вълновата функция

https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_function_collapse

Откъде идва "вълновата функция": нека $\{e_x,\ x \in \text{"пространството"}\}$ е о.н.б., който отговаря на тестове в отделните точки на пространството (по Дираковски).

Тогава $\Psi = \text{``}\sum_x\text{''}\ \underbrace{\psi(x)}\ e_x$ ето я вълновата функция

В квантовата информатика аналога е $\Psi = \sum_{j=1}^{N} \psi_j e_j \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$

Нека измерваме събитието: $Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$

В крайна сметка къде е колапса:

в нашето съзнание или извън него?

След измерването:

$$\Psi \longmapsto const.\ Q\Psi = const. \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

зануляването е колапса

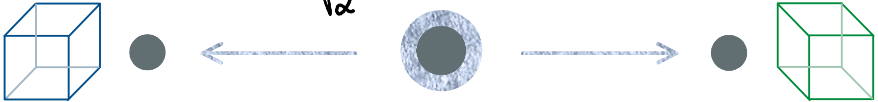
Измерване в сплетено състояние

Ψ в предходна презентация

"X"- тест

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1\right)$$

"Y"- тест



$$X_{(1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{X} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$Y_{(2)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}_{Y}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e_0 \otimes e_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} f_0 \otimes \underbrace{f_0}_{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Но:

$$e_0 \neq f_0$$

Измерване в сплетено състояние

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_0 \otimes e_0 \arrow[dr, mapsto, "\{Y_{(2)}=1\}"] & \\
\Theta \arrow[ur, mapsto, "\{X_{(1)}=1\}"] \arrow[dr, mapsto, "\{Y_{(2)}=1\}"'] & & \frac{1}{2}\, e_0 \otimes f_0 \\
 & \frac{1}{\sqrt{2}}\, f_0 \otimes f_0 \arrow[ur, mapsto, "\{X_{(1)}=1\}"'] &
\end{tikzcd}$$

Понеже:

$$X_{(1)} Y_{(2)} = Y_{(2)} X_{(1)}$$
$$(= X \otimes Y)$$

(въпреки, че $XY \neq YX$)

→ възстановява се „противоречието"

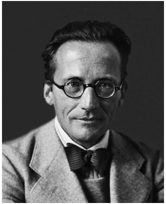
припомняне

Теорема.

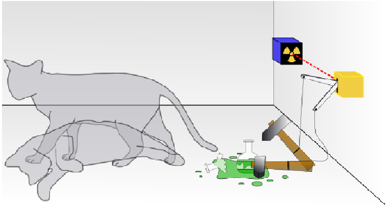
$$PQ = QP \iff
\begin{tikzcd}
 & \rho' \arrow[dr, mapsto, "\{P=1\}"] & \\
\rho \arrow[ur, mapsto, "\{Q=1\}"] \arrow[dr, mapsto, "\{P=1\}"'] & & \rho'' \\
 & \rho_1' \arrow[ur, mapsto, "\{Q=1\}"'] &
\end{tikzcd}
\ (\forall \rho)
\iff$$

$$\mathrm{Prob}_\rho(Q) . \mathrm{Prob}_\rho(P|Q) = \mathrm{Prob}_\rho(P) . \mathrm{Prob}_\rho(Q|P) \quad (\forall \rho)$$

Котката на Шрьодингер https://en.wikipedia.org/wiki/Schrödinger's_cat



Erwin Schrödinger
1887 – 1961



$|dead\rangle + |alive\rangle$

– сплитане между микро и макро-системи ?

1. Теория на измерването

Теория на измерването: примери и дискусия

2. Квантови трансформации

Квантови трансформации: примери и дискусия

наблюдаеми — състояния

Картина на Хайзенберг

Observables $\qquad$ States

Картина на Шрьодингер

$$\text{Observables} \ni A \qquad \text{States} \ni \rho$$

средна стойност

$$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$$

еволюират (изменят се) наблюдаемите: $A \mapsto A'$

еволюират (изменят се) състоянията: $\rho \mapsto \rho'$

$$\langle A' \rangle_\rho = \langle A \rangle_{\rho'}$$

условие за съгласуваност

Квантови трансформации в картината Шрьодингер / Schrödinger

Аксиоматични условия: • чисто състояние $\mapsto$ чисто състояние;

- смес на състояния $\mapsto$ смес на състояния със същите тегла;
- вероятностите за преход да се запазват: ако

чисто състояние с вектор $\Psi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Psi' \in \mathbb{C}^{n'}$

и чисто състояние с вектор $\Phi \in \mathbb{C}^n \mapsto$ чисто състояние с вектор $\Phi' \in \mathbb{C}^{n'}$,

тогава $p_{\Psi \mapsto \Phi} = p_{\Psi' \mapsto \Phi'}$.

Теорема на Вигнер / Wigner. За всяка квантова трансформация $\exists$ трансформация $U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n'}$, такава че Ψ' е пропорционален на $U\Psi$ при $\forall$ транзформиране $\Psi \mapsto \Psi'$, като се случва една от следните две възможности:

- U е линейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \langle \Psi | \Phi \rangle$ $(\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n)$
- U е антилинейна и $\langle U\Psi | U\Phi \rangle = \overline{\langle \Psi | \Phi \rangle}$ $(\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n)$

U е единствена с точност до пропорционалност. В сила е и обратната посока.

Унитарни трансформации и матрици (математическа теория):

- Нека $U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n'}$ е линейна трансформация. Тогава:

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\langle U\Psi | U\Phi\rangle}_{\langle \Psi | U^* U \Phi\rangle} = \underbrace{\langle \Psi | \Phi \rangle}_{\langle \Psi | \hat{1} \Phi\rangle} \quad (\forall \Psi, \Phi \in \mathbb{C}^n) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \quad U^* U = \hat{1}$$

казваме, че U е унитарна

- Ако U е квадратна матрица и $U^* U = \hat{1}$, то U е обратима, понеже $1 = \det \hat{1} = \det U^* \det U = |\det U|^2$

Тогава: $U^* = U^{-1}$ – такива матрици се наричат **унитарни матрици.**

Извод: унитарните матрици задават обратими квантови трансформации

наблюдаеми — състояния

Картина на Хайзенберг

Observables $\ni A$

States $\ni \rho$ – чисто с вектор Ψ

Картина на Шрьодингер

средна стойност

$$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_{\Psi}$$

еволюират (изменят се) наблюдаемите : $A \mapsto A'$

еволюират (изменят се) състоянията : $\Psi \mapsto \underbrace{\Psi'}_{U\Psi}$

съгласуваност

$$\langle A' \rangle_{\Psi} = \langle A \rangle_{\Psi'} = \langle U\Psi | A U\Psi \rangle$$

$$\langle A' \rangle_{\Psi} = \langle \Psi | A' \Psi \rangle \underset{\forall \Psi}{=} \langle \Psi | U^* A U \Psi \rangle = \langle U\Psi | A U\Psi \rangle$$

$$\boxed{A' = \underbrace{U^*}_{U^{-1}} A\, U} \Leftarrow$$

Квантови трансформации в картината Хайзенберг / Hesenberg

- Трансформацията $\mathcal{A} \to \mathcal{A} : A \mapsto U^* A U$ за $U^* = U^{-1}$ има свойствата:

$$\left.\begin{array}{l} - \; U^{-1}(AB)U = (U^{-1}AU)(U^{-1}BU) \\ - \; U^{-1}\hat{1}U = \hat{1} \\ - \; (U^{-1}AU)^* = U^* A^* U^{-1*} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{това е изоморфизъм на } * \text{-алгебри с единица}$$

- Горният вид изоморфизми се наричат "вътрешни" / "inner".
- Математематически резултат: всички $*$-изоморфизми на $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ в себе си са вътрешни.
- Това показва, че за крайни, чисто квантови системи, двете картини на описание на квантовите трансформации са еквивалентни.

1. Теория на измерването

Теория на измерването: примери и дискусия

2. Квантови трансформации

Квантови трансформации: примери и дискусия

Унитарни матрици и ортонормирани базиси

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} \bar u_{11} & \bar u_{21} & \bar u_{31} & \cdots & \bar u_{n1} \\ \bar u_{12} & \bar u_{22} & \bar u_{32} & \cdots & \bar u_{n2} \\ \bar u_{13} & \bar u_{23} & \bar u_{33} & \cdots & \bar u_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar u_{1n} & \bar u_{2n} & \bar u_{3n} & \cdots & \bar u_{nn} \end{pmatrix}}_{U^*}
\underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}}_{U}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{1}}
$$

$$u_{\cdot 1} \quad u_{\cdot 2} \quad u_{\cdot 3} \quad \cdots \quad u_{\cdot n}$$

$$e_j \xmapsto{U} u_j$$

U е унитарна $\iff$ колоните (или редовете) са ортонормиран базис

$$U^* U = \hat{1} \qquad\qquad U U^* = \hat{1}$$

$$\iff \langle u_j | u_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases} \qquad\qquad \iff |u_1\rangle\langle u_1| + \cdots + |u_n\rangle\langle u_n| = \hat{1}$$

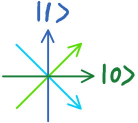
Унитарни матрици и ортонормирани базиси

– пример 1.: гейт на Адамар / Hadamard gate

$$H := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} e_0 \equiv |0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{H}{\longmapsto} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \\ e_1 \equiv |1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{H}{\longmapsto} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{matrix}\right\} \text{———} \boxed{H} \text{———} \left\{\begin{matrix} 2^{-1/2}|0\rangle + 2^{-1/2}|1\rangle \\ 2^{-1/2}|0\rangle - 2^{-1/2}|1\rangle \end{matrix}\right.$$



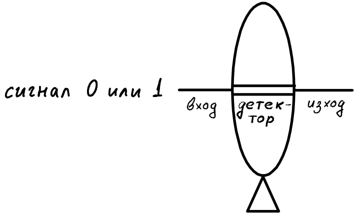
– пример 2: Ротация на ъгъл α :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

"Бомбен" тест на Елицур-Вайдман

https://en.wikipedia.org/wiki/Elitzur–Vaidman_bomb_tester

а) Предположения: разполагаме с бомби, задействани с детектори. Една част са със здрави детектори, а другата – с повредени.



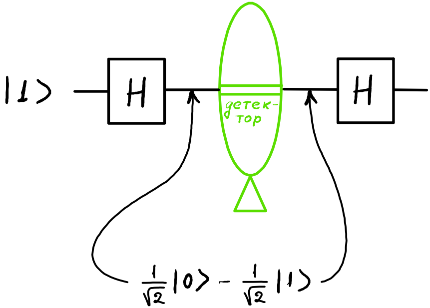
а) при здрава бомба (детектор) се извършва измерване: при резултат 1 – задейства се

б) при повредена бомба (детектор) считаме, че сигнала не се повлиява, т.е., все едно че няма детектор (вход ≡ изход).

б) Задачата е да тестваме бомбите (детекторите) без да ги задействаме.

„Бомбен" тест на Елицур-Вайдман – квантово решение 1

повредена бомба



изход ≡ вход ≡ $|1\rangle$

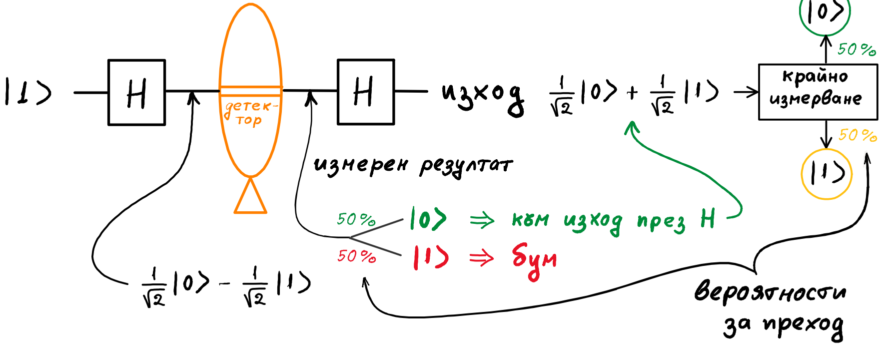
понеже $H^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)^2 = \hat{1}$

"Бомбен" тест на Елицур-Вайдман – квантово решение I

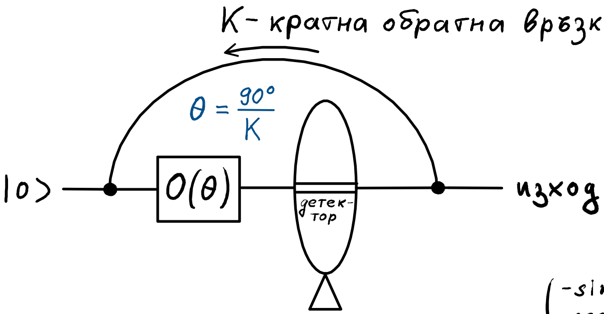
здрава бомба

успешен тест: бомбата е здрава и незадействана

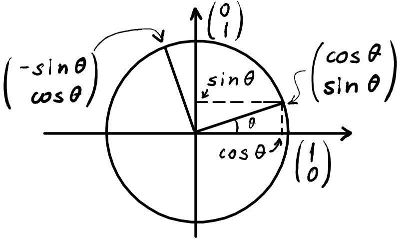
успех: 50% × 50% = 25%



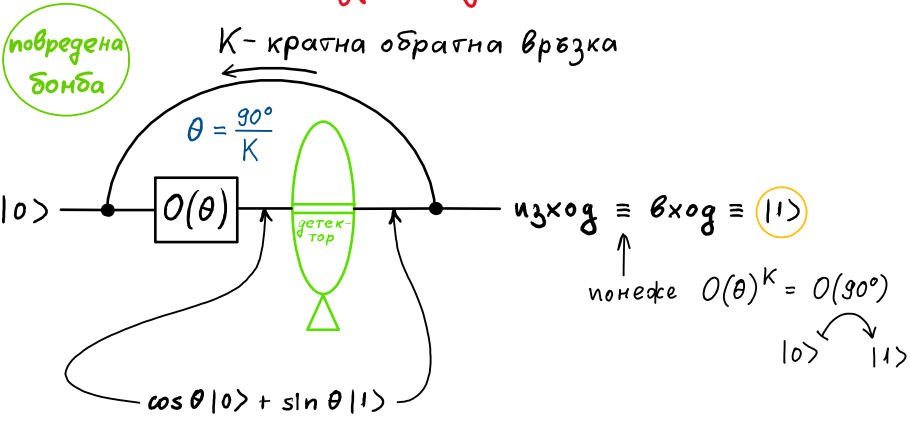
„Бомбен" тест на Елицур-Вайдман – квантово решение 2



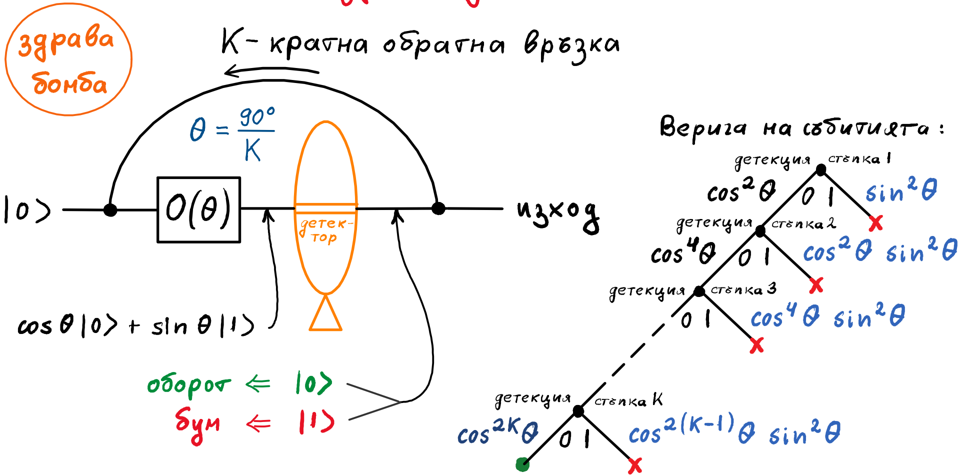
$$O(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



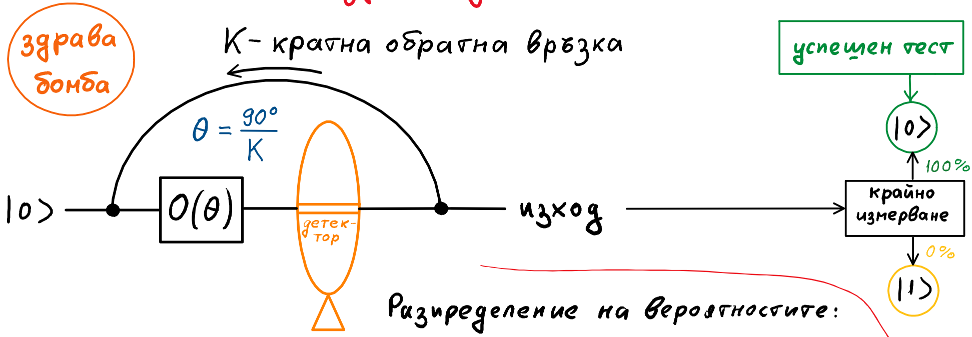
"Бомбен" тест на Елицур-Вайдман – квантово решение 2



„Бомбен" тест на Елицур-Вайдман – квантово решение 2



"Бомбен" тест на Елицур-Вайдман – квантово решение 2



Разпределение на вероятностите:

$$\underbrace{\cos^{2K}\theta}_{\text{не се задейства и изхода е 0}} + \underbrace{\cos^{2(K-1)}\theta\,\sin^2\theta + \dots + \cos^4\theta\,\sin^2\theta + \sin^2\theta}_{\text{задейства се}} = 1$$

с вероятност $1-\cos^{2K}\theta$

$= 1-\cos^{2K}\frac{\pi}{2K} \approx \frac{\pi^2}{4K} \to 0$ при $K \to \infty$