

КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА, ЛЕКЦИЯ 10 / 15.12.2021

ПАСАЖИТЕ С ДОПЪЛНИТЕЛЕН МАТЕРИАЛ СА ПОСТАВЕНИ В ЗЕЛЕН ЦВЯТ

С ЛИЛАВ ЦВЯТ СА ОТРАЗИ КОРЕКЦИИ СПРЯМО ПРЕДХОДНАТА ВЕРСИЯ

ТЕ СА НА СТР.: 36, 42

КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА, ЛЕКЦИЯ 10 / 15.12.2021

ПАСАЖИТЕ С ДОПЪЛНИТЕЛЕН МАТЕРИАЛ СА ПОСТАВЕНИ В ЗЕЛЕН ЦВЯТ

С ЛИЛАВ ЦВЯТ СА ОТРАЗИ КОРЕКЦИИ СПРЯМО ПРЕДХОДНАТА ВЕРСИЯ

ТЕ СА НА СТР.: 208-220, 244-251

ПЛАН

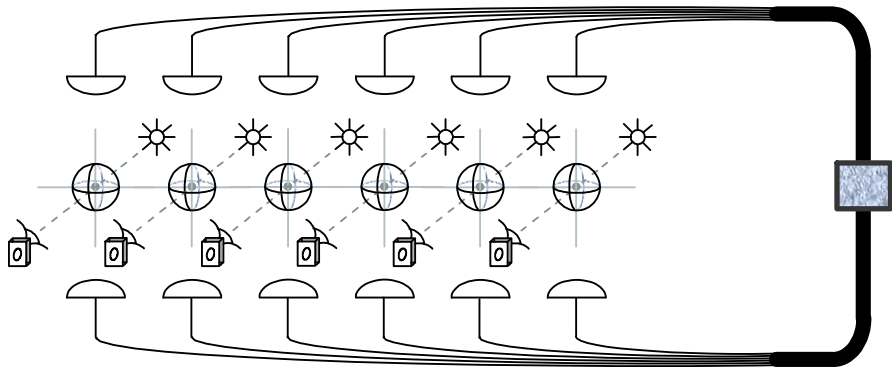
1. Квантови изчисления: начална илюстрация
2. Система от няколко кубити: изчислителен базис
3. Система от няколко кубити: квант. трансформации
4. Дискретната трансформация на Фурие: определение
5. Дискретната трансформация на Фурие: реализация с
квантова мрежа
6. Първо понятие за квантов алгоритъм

1. Квантови изчисления: начална илюстрация
2. Система от няколко кубити: изчислителен базис
3. Система от няколко кубити: квант. трансформации
4. Дискретната трансформация на Фурие: определение
5. Дискретната трансформация на Фурие: реализация с
квантова мрежа
6. Първо понятие за квантов алгоритъм

Дискретна ("квантова") трансформация на Фурие: илюстративна схема

https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Fourier_transform

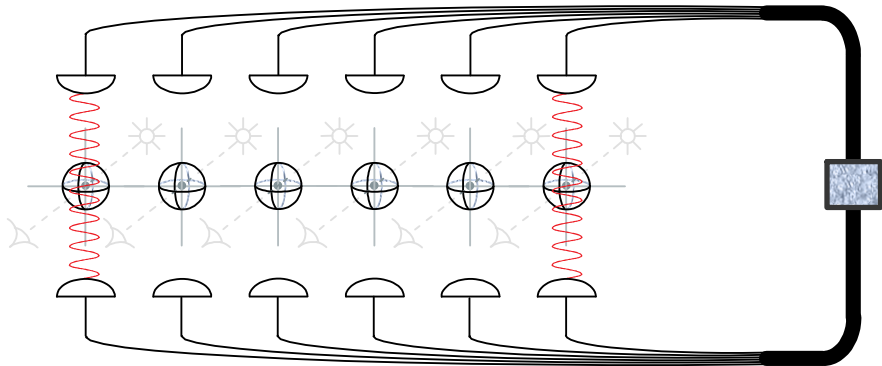
1) Инициализация



Дискретна ("квантова") трансформация на Фурие: илюстративна схема

https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Fourier_transform

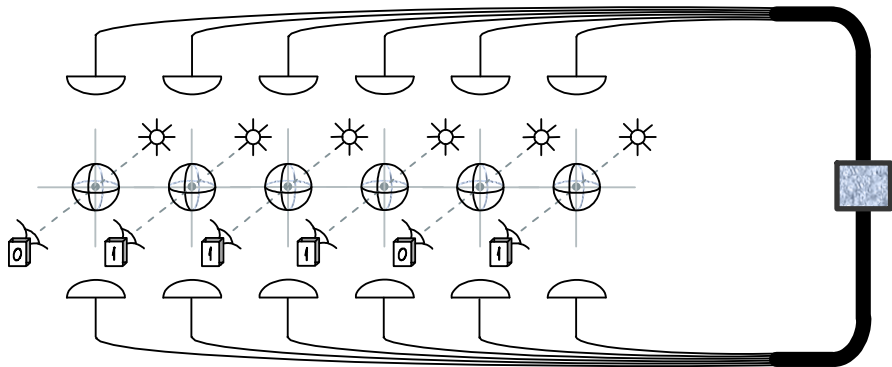
2) Квантово изчисление



Дискретна ("квантова") трансформация на Фурие: илюстративна схема

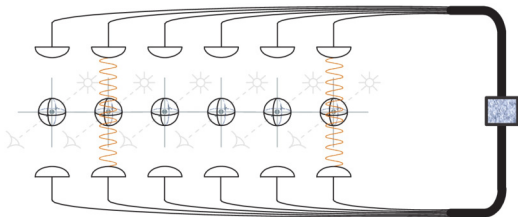
https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Fourier_transform

3) Измерване на резултата



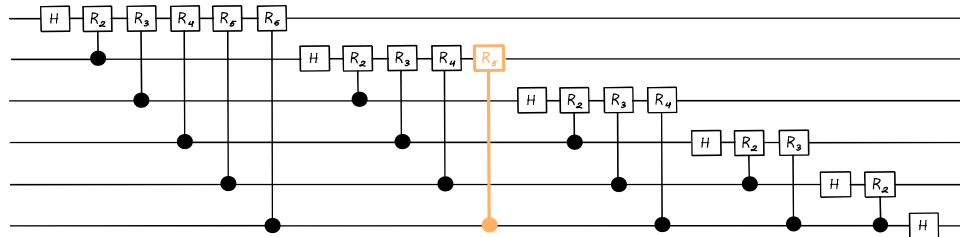
Дискретна ("квантова") трансформация на Фурие: схема на квантовата верига

https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Fourier_transform



Градивните квантови трансформации, които задават елементарните стъпки, се наричат "квантови операции" (quantum gates).

Тяхната последователност образува "квантова верига" (quantum circuit).



1. Квантови изчисления: начална илюстрация
- 2. Система от няколко кубити: изчислителен базис**
3. Система от няколко кубити: квант. трансформации
4. Дискретната трансформация на Фурие: определение
5. Дискретната трансформация на Фурие: реализация с
квантова мрежа
6. Първо понятие за квантов алгоритъм

Припомняне : две употреби на бра-кет означенията :

- За $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ - вектор-столб : $|\Psi\rangle = \Psi$ - едноместна операция върху $\mathbb{C}^N$, която е идентитета

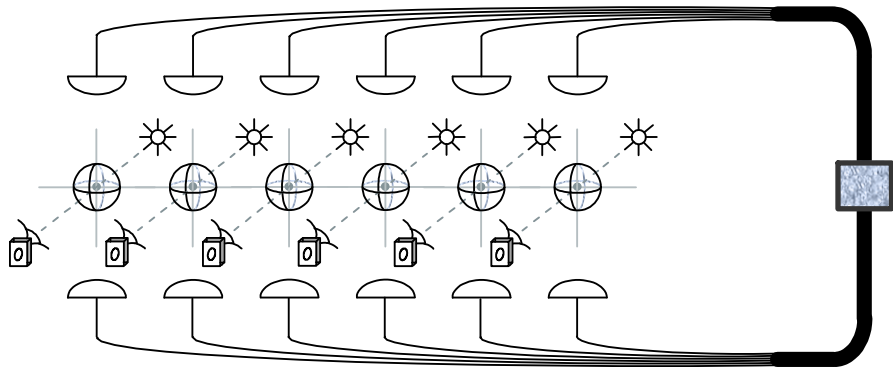
Тази операция е линейна : $|\alpha\Psi + \alpha'\Psi'\rangle = \alpha|\Psi\rangle + \alpha'|\Psi'\rangle$

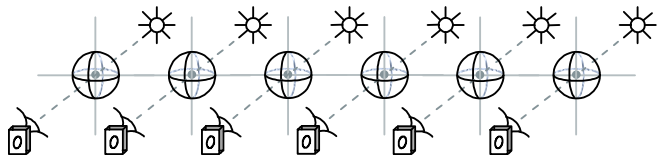
и в частност, $|0\rangle = 0 \in \mathbb{C}^N$

- За стандартния о.н.б. $e_0, \dots, e_{N-1} \in \mathbb{C}^N$

$e_k \equiv |e_k\rangle \equiv |k\rangle$ — информация (напр., индекса) на базисен вектор

Сега обаче $|0\rangle \equiv e_0 \neq 0$ - нулевия вектор в $\mathbb{C}^N$!!!





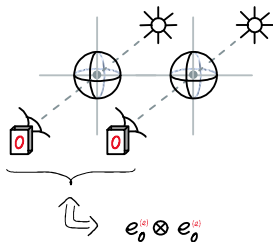
$$\underbrace{e_0^{(2)} \otimes e_0^{(2)}}_{\text{III}} \equiv |e_0^{(2)}\rangle \otimes |e_0^{(2)}\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv \boxed{|0\rangle|0\rangle \equiv |0,0\rangle} \equiv \underbrace{|[00]_2\rangle}_{\text{числото "0" в двоична система}} \equiv \underbrace{|0\rangle}_{\text{има различен смисъл !!!}}$$

нови означения

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_0^{(2)} \in \mathbb{C}^2} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_0^{(2)} \in \mathbb{C}^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_0^{(4)} \in \{e_0^{(4)}, e_1^{(4)}, e_2^{(4)}, e_3^{(4)}\} - \text{стандартия о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$

$e_0^{(2)} \in \mathbb{C}^2$

има
различен смисъл !!!

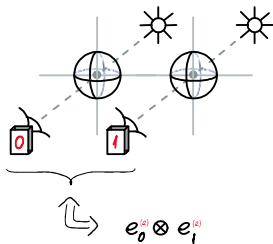


$$\underbrace{e_0^{(2)} \otimes e_1^{(2)}}_{\text{III}} \equiv |e_0^{(2)}\rangle \otimes |e_1^{(2)}\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \equiv |0\rangle|1\rangle \equiv |0,1\rangle \equiv \underbrace{|[01]_2\rangle}_{\text{числото "1" в двоична система}} \equiv \underbrace{|1\rangle}_{\left\{ \begin{array}{l} \text{има} \\ \text{различен смисъл !!!} \end{array} \right\}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_0^{(2)}} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_1^{(2)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_1^{(4)} \in \{e_0^{(4)}, e_1^{(4)}, e_2^{(4)}, e_3^{(4)}\} - \text{стандартия о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$

$e_0^{(2)}, e_1^{(2)} \in \mathbb{C}^2$

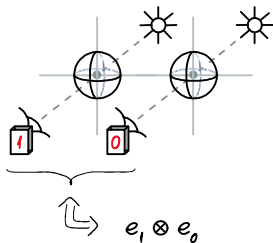
имат
различен смисъл !!!



$$e_1 \otimes e_0 \equiv |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |1\rangle \otimes |0\rangle \equiv |1\rangle|0\rangle \equiv |1,0\rangle \equiv |[10]_2\rangle \equiv |2\rangle$$

числото "2" в двоична система

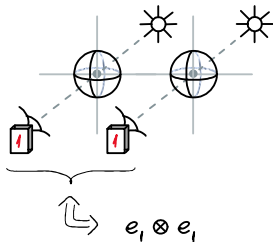
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv e_2 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3\} - \text{стандартия о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$



$$e_1 \otimes e_1 \equiv |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |1\rangle \otimes |1\rangle \equiv |1\rangle|1\rangle \equiv |1,1\rangle \equiv |[11]_2\rangle \equiv |3\rangle$$

числото "3" в двоична система

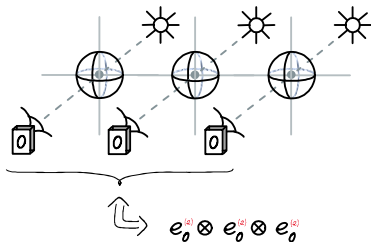
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{III}} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv e_3 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3\} - \text{стандартия о.н.б. в } \mathbb{C}^4$$



$$\begin{aligned}
 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \underbrace{\left(e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \right)} \otimes e_0^{(a)} &= \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = e_0^{(8)} \in \{ e_0^{(8)}, e_1^{(8)}, e_2^{(8)}, e_3^{(8)}, e_4^{(8)}, e_5^{(8)}, e_6^{(8)}, e_7^{(8)} \} \\
 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Тензорното произведение е асоциативно
(т.е., скобите могат да се нестият)

- стандартния о.н.б. в $\mathbb{C}^8$



$$\underbrace{e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)} \otimes e_0^{(a)}} \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\equiv |0\rangle|0\rangle|0\rangle \equiv |0,0,0\rangle \equiv |[000]_2\rangle \equiv |0\rangle$$

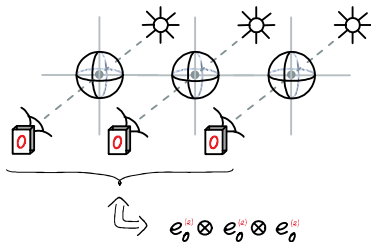
число "0" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e_0^{(8)} \in \{e_0^{(8)}, e_1^{(8)}, e_2^{(8)}, e_3^{(8)}, e_4^{(8)}, e_5^{(8)}, e_6^{(8)}, e_7^{(8)}\} - \text{стандартия о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



$$e_0 \otimes (e_0 \otimes e_1) \equiv |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$\equiv |0\rangle|0\rangle|1\rangle \equiv |0,0,1\rangle \equiv |[001]_2\rangle \equiv |1\rangle$$

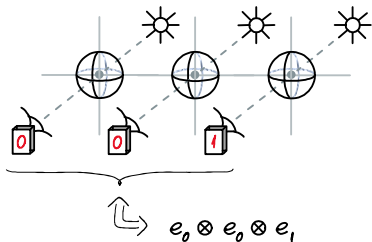
число "1" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e_1 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} - \text{стандартия о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



$$e_0 \otimes (e_1 \otimes e_0) \equiv |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\equiv |0\rangle|1\rangle|0\rangle \equiv |0,1,0\rangle \equiv |[010]_2\rangle \equiv |2\rangle$$

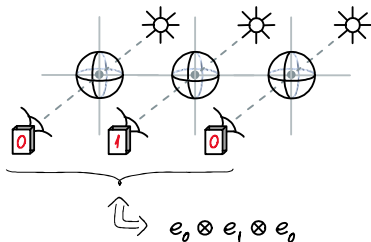
число "2" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e_2 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



$$e_0 \otimes (e_1 \otimes e_1) \equiv |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$$

$$\equiv |0\rangle|1\rangle|1\rangle \equiv |0,1,1\rangle \equiv |[011]_2\rangle \equiv |3\rangle$$

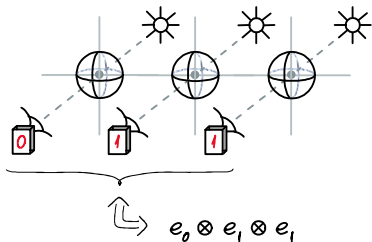
число "3" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e_3 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} - \text{стандартия о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



$$e_1 \otimes (e_0 \otimes e_0) \equiv |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\equiv |1\rangle|0\rangle|0\rangle \equiv |1,0,0\rangle \equiv |[100]_2\rangle \equiv |4\rangle$$

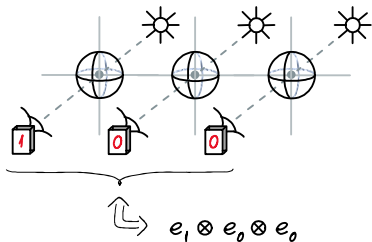
число "4" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e_4 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} - \text{стандартия о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



$$e_1 \otimes (e_0 \otimes e_1) \equiv |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$\equiv |1\rangle|0\rangle|1\rangle \equiv |1,0,1\rangle \equiv |[101]_2\rangle \equiv |5\rangle$$

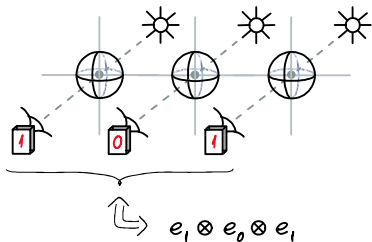
число "5" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e_5 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



$$e_1 \otimes (e_1 \otimes e_0) \equiv |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_0\rangle \equiv |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle$$

$$\equiv |1\rangle|1\rangle|0\rangle \equiv |1,1,0\rangle \equiv |[110]_2\rangle \equiv |6\rangle$$

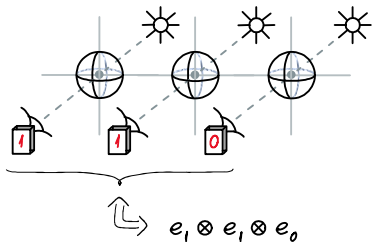
число "6" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e_6 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} - \text{стандартия о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



$$e_1 \otimes (e_1 \otimes e_1) \equiv |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_1\rangle \equiv |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$$

$$\equiv |1\rangle|1\rangle|1\rangle \equiv |1,1,1\rangle \equiv |[111]_2\rangle \equiv |7\rangle$$

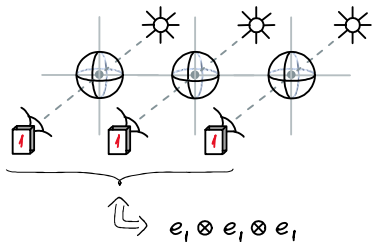
число "7" в двоична система

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

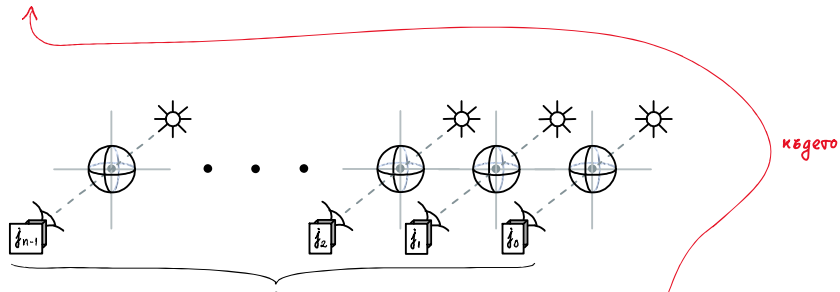
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= e_7 \in \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ - стандартния о.н.б. в } \mathbb{C}^8$$



двоично разлагане

$$l = [j_{n-1} \dots j_1 j_0]_2 := j_{n-1} 2^{n-1} + \dots + j_1 2^1 + j_0 2^0 \in \{0, \dots, N-1\}$$



$$\uparrow e_{j_{n-1}} \otimes \dots \otimes e_{j_2} \otimes e_{j_1} \otimes e_{j_0} = |l\rangle \in \mathbb{C}^N$$

$$\text{за } j_0, \dots, j_{n-1} = 0, 1 \text{ и } N = 2^n$$

Изводи: хилбертовото пространство на състоянията на система от n квантови бита (кубити) е

$$\underbrace{\mathbb{C}^N}_{N\text{-мерно}} \text{ за } N = 2^n$$

$$\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_{n\text{- пъти}} = \mathbb{C}^{2 \cdots 2} = \mathbb{C}^{2^n}$$

Стандартния базис $e_0 \equiv |0\rangle$ и $e_1 \equiv |1\rangle$ в $\mathbb{C}^2$ пораждат стандартния базис в $\mathbb{C}^N$: $|[j_{n-1} \dots j_0]_2\rangle = e_{j_{n-1}} \otimes \dots \otimes e_{j_0}$ - наричат се изчислителни базиси.

1. Квантови изчисления: начална илюстрация
2. Система от няколко кубити: изчислителен базис
- 3. Система от няколко кубити: квант. трансформации**
4. Дискретната трансформация на Фурие: определение
5. Дискретната трансформация на Фурие: реализация с
квантова мрежа
6. Първо понятие за квантов алгоритъм

1. Комбиниране на квантови трансформации

Нека: $U: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$, $V: \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M$ - унитарни оператори на квантови трансформации

$$\Psi \otimes \Phi \left\{ \begin{array}{c} \Psi \text{ — } \boxed{U} \text{ — } U\Psi \\ \Phi \text{ — } \boxed{V} \text{ — } V\Phi \end{array} \right\} U\Psi \otimes V\Phi = (U \otimes V)(\Psi \otimes \Phi)$$

- така се трябва да се трансформират несpletените състояния - независимо.

Но векторите на несpletените състояния израждат линейно всеки вектори на състояния от $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^M = \mathbb{C}^{NM}$. $\Rightarrow$ Съставната квантова трансформация се представи от

$U \otimes V$ - унитарна $NM \times NM$ - матрица

$$((U \otimes V)^*(U \otimes V) = U^*U \otimes V^*V = \hat{I}.)$$

2. Примери: а)

$$|0\dots 0\rangle_2 \left\{ \begin{array}{l} |0\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ |0\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ \vdots \\ |0\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \end{array} \right\}$$

$$2^{-\frac{n}{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \otimes \dots \otimes (|0\rangle + |1\rangle) =$$

тензорното произведение е дистрибутивно (полилинейно)

$$= 2^{-\frac{n}{2}} \left(\underbrace{|0\rangle|0\rangle\dots|0\rangle}_{|[00\dots 0]_2\rangle} + \underbrace{|0\rangle|0\rangle\dots|1\rangle}_{|[00\dots 1]_2\rangle} + \dots + \underbrace{|1\rangle|1\rangle\dots|1\rangle}_{|[11\dots 1]_2\rangle} \right) = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{\ell=0}^{N-1} |\ell\rangle$$

3. Операциите на пренареждане

За $\forall$ пермутация $\sigma \in S_n$ $\exists!$ $\Gamma_\sigma : \underbrace{\mathbb{C}^M \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^M}_{n\text{-нсти}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{C}^M \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^M}_{n\text{-нсти}}$

$$\Gamma_\sigma(\Psi_1 \otimes \dots \otimes \Psi_n) = \Psi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \Psi_{\sigma(n)}$$

В частност, върху базис $\Gamma_\sigma(e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_n}) = e_{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{j_{\sigma(n)}}$, което определя Γ_σ напълно и показва, че е унитарна (понеже изобразява о.н.б. в о.н.б.)

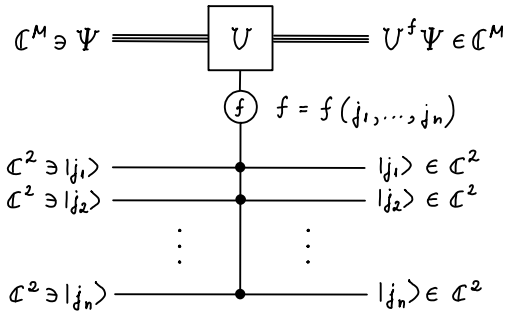
Забележка: $\Gamma_\eta \circ \Gamma_\sigma = \Gamma_{\sigma\eta}$

- за да се кориги понекога избират σ^{-1} вместо σ .

4. Условни операции ("IF $f=1$ THEN U ELSE $\hat{I}$ ") / controlled gate

Нека $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}: (j_1, \dots, j_n) \mapsto f(j_1, \dots, j_n) = 0$ или 1 ,

$U: \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M$ - унитарна. Тогава:

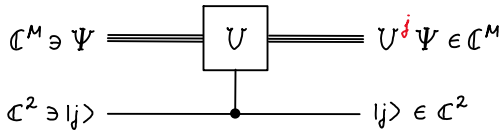


определя унитарна $\tilde{U}: \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^N$, $N = 2^n$

4. Условни операции ("IF $f=1$ THEN U ELSE $\hat{1}$ ") / controlled gate

В частност, за

$U: \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M$ - унитарна



определя унитарна $\tilde{U}: \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^2$

1. Квантови изчисления: начална илюстрация
2. Система от няколко кубити: изчислителен базис
3. Система от няколко кубити: квант. трансформации
- 4. Дискретната трансформация на Фурие: определение**
5. Дискретната трансформация на Фурие: реализация с
квантова мрежа
6. Първо понятие за квантов алгоритъм

Нека $N = 2, 3, \dots$, $\xi := \xi_N := e^{\frac{2\pi i}{N}}$ - примитивен, N -ти корен на 1: $\xi^N = 1$

$$F := (f_{jk})_{j,k=0}^{N-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \dots & \xi^{N-1} \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \dots & \xi^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi^{N-1} & \xi^{(N-1)2} & \dots & \xi^{(N-1)^2} \end{pmatrix}, \quad f_{jk} = N^{-\frac{1}{2}} \xi^{jk} = N^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi i}{N} jk} = N^{-\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{2\pi jk}{N} + i \sin \frac{2\pi jk}{N} \right)$$

→ матрица на дискретното преобразование на Фурие

$$\underbrace{F^* F}_{(c_{jk})_{j,k}} \stackrel{?}{=} I - \text{унитарност} \quad \left(F^* = (\bar{f}_{kj})_{j,k}, \bar{f}_{kj} = \overline{\xi^{kj}} = \xi^{-jk} \right)$$

$$c_{jk} = \sum_{l=0}^{N-1} \bar{f}_{lj} f_{lk} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{N} \xi^{(k-j)l} = \begin{cases} \frac{1}{N} N = 1, & j = k \\ \frac{\xi^{(k-j)N-1}}{\xi^{k-j}-1} = 0, & j \neq k \end{cases}$$

Нека $N = 2, 3, \dots$, $\xi := \xi_N := e^{\frac{2\pi i}{N}}$ - примитивен, N -ти корен на 1: $\xi^N = 1$

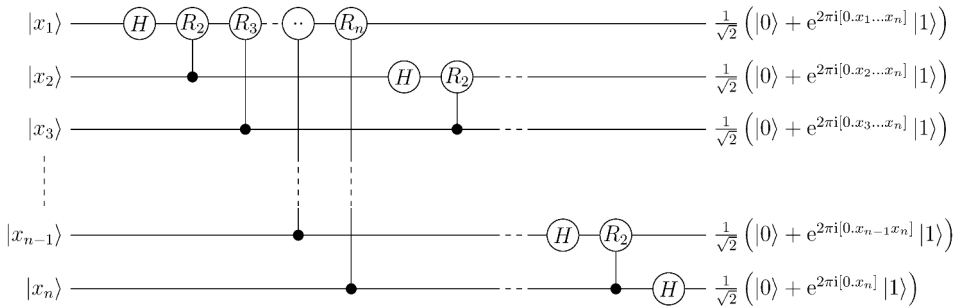
Действие:

$$F|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{N} j \cdot 1} |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{N} j \cdot 2} |2\rangle + e^{\frac{2\pi i}{N} j \cdot 3} |3\rangle + \dots \right),$$

В частност, $F|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + \dots + |N-1\rangle).$

1. Квантови изчисления: начална илюстрация
2. Система от няколко кубити: изчислителен базис
3. Система от няколко кубити: квант. трансформации
4. Дискретната трансформация на Фурие: определение
5. Дискретната трансформация на Фурие: реализация с
квантова мрежа
6. Първо понятие за квантов алгоритъм

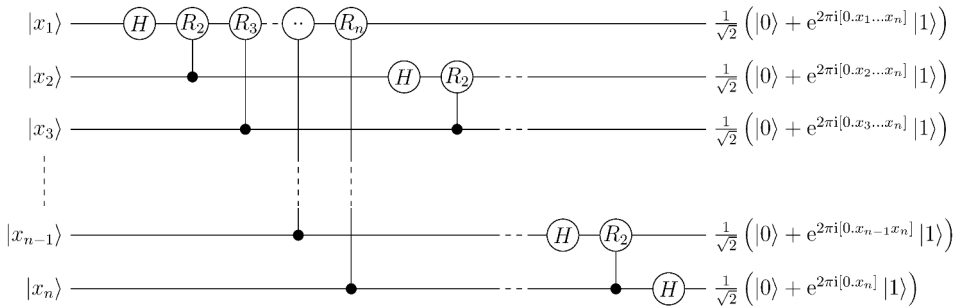
https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Fourier_transform



$\text{---} \textcircled{H} \text{---} \equiv \text{---} \boxed{H} \text{---}$ - вѣт на Адамар $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

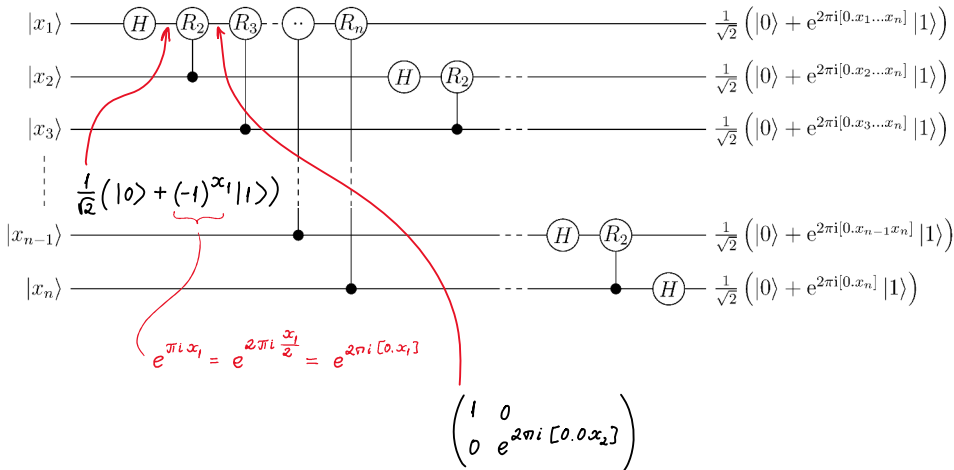
$\text{---} \textcircled{R_k} \text{---} \equiv \text{---} \boxed{R_k} \text{---}$ $R_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i / 2^k} \end{pmatrix}$

https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Fourier_transform

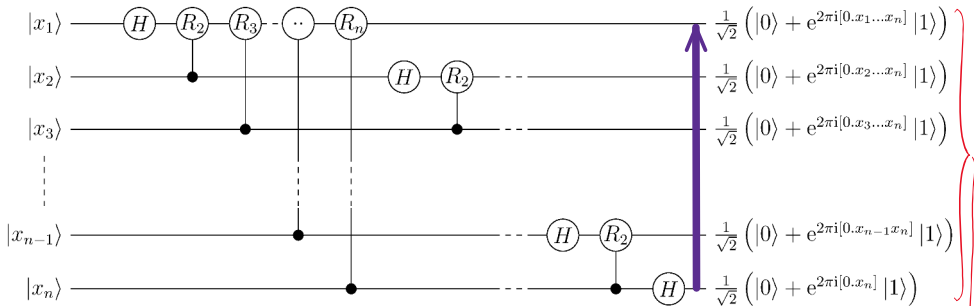


$\hookrightarrow | [x_1 \dots x_n]_2 \rangle \equiv |j\rangle$
 за $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$, $j \in \{0, \dots, N-1\}$

https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Fourier_transform



https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Fourier_transform

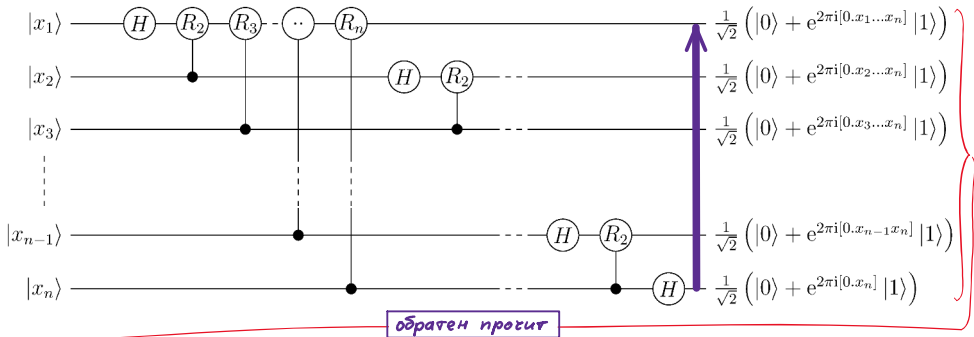


обратен прожит

$$2^{-n/2} \left(|0\rangle \dots |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{2^n} [0 \dots x_1 \dots x_n]} |0\rangle \dots |0\rangle |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{2^n} [0 \dots x_2 \dots x_n]} |0\rangle \dots |1\rangle |0\rangle + \dots \right)$$

$N^{-\frac{1}{2}}$ $|[0 \dots 0]_2\rangle = |0\rangle$ $e^{\frac{2\pi i}{2^n} [x_1 \dots x_n] \cdot 1}$ $|[0 \dots 01]_2\rangle = |1\rangle$ $e^{\frac{2\pi i}{2^n} [x_1 \dots x_n] \cdot 2}$ $|[0 \dots 10]_2\rangle = |2\rangle$

https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_Fourier_transform



$$\frac{1}{\sqrt{N}} (|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{N} j \cdot 1} \cdot |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{N} j \cdot 2} \cdot |2\rangle + \dots)$$

1. Квантови изчисления: начална илюстрация
2. Система от няколко кубити: изчислителен базис
3. Система от няколко кубити: квант. трансформации
4. Дискретната трансформация на Фурие: определение
5. Дискретната трансформация на Фурие: реализация с
квантова мрежа
- 6. Първо понятие за квантов алгоритъм**

Квантов алгоритъм е редица от квантови мрежи, която има алгоритмично описание в класически смисъл.



Квантов алгоритъм е редица от квантови мрежи, която има алгоритмично описание в класически смисъл. Например:

