

КВАНТОВА ИНФОРМАТИКА, ЛЕКЦИЯ 6 / 10.11.2021

1. Основни определения и примери
2. Положителността и нейните разновидности в курса
3. Подалгебри, морфизми и изоморфизми на различните типове алгебри
4. Основна структурна теорема
5. Комутативния случай
6. Аксиоми на алгебричния подход - припомняне. Класически системи
7. Подсистеми, надсистеми, експерименти, съвместна /едновременно измеримост
8. Защо наблюдаемите са реални, а алгебрите на наблюдаемите - комплексни
9. Събитията в алгебричния подход
10. Лошка и аритметика
11. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема
12. Функции от наблюдаема през спектралната теорема
13. Положителност и наредба на наблюдаеми и събития
14. Статистика на наблюдаемите величини и съответствието ѝ с обикновената теория на вероятностите за случайни величини

1. Основни определения и примери

Определение **Комплексна, асоциативна, $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$ с единица**

Това е линейно пространство $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$, което е снабдено с операцията произведение „ $\cdot$ “ (често ще пишем $AB \equiv A \cdot B$ за $A, B \in \mathcal{A}$) и елемент $\hat{1} \in \mathcal{A}$ наречен единица, така, че са изпълнени законите:

- $(\alpha A + \beta B)(\mu C + \nu D) = \alpha\mu AC + \alpha\nu AD + \beta\mu BC + \beta\nu BD$ ($\forall \alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{C}, \forall A, B, C, D \in \mathcal{A}$)
- $(AB)C = A(BC)$ ($\forall A, B, C \in \mathcal{A}$)
- $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$ ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall A, B \in \mathcal{A}$)
- $A^{**} = A$ ($\forall A \in \mathcal{A}$)
- $(AB)^* = B^* A^*$ ($\forall A, B \in \mathcal{A}$)
- $\hat{1} A = A = A \hat{1}$ ($\forall A \in \mathcal{A}$) $\quad$ В частност: $\hat{1}^* = \hat{1}$, понеже $\hat{1}^* = \hat{1}^* \hat{1} = (\hat{1}^* \hat{1})^* = \hat{1}^{**} = \hat{1}$.

Основен пример Матричната алгебра $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) :=$ множеството на всички квадратни $n \times n$ -матрици с комплексни коефициенти

Тя е n^2 -мерно, комплексно линейно пространство и матричното произведение:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jk} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}^A \quad \overbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j1} & \dots & b_{jk} & \dots & b_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}}^B = \overbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{j1} & \dots & c_{jk} & \dots & c_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nk} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}}^{C = AB}$$

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + \dots + a_{jn}b_{nk} = \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell}b_{\ell k}$$

превръща $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ в комплексна асоциативна алгебра с единица $\hat{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ е също и $\ast$ -алгебра спрямо $\ast$ -операцията на ермитово свързване Hermitian adjoint

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jk} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}^A = A \quad \longmapsto \quad A^* := \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{1k} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{j1} & \dots & \bar{a}_{jk} & \dots & \bar{a}_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \dots & \bar{a}_{nk} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} = (\overline{A^T}) = (\bar{A})^T$$

Проверка на: $(AB)^* \stackrel{?}{=} B^* A^*$

- имаме $(AB)^* = (\overline{AB})^T = (\bar{A} \bar{B})^T = \bar{B}^T \bar{A}^T = B^* A^*$

Свойството положителност на матричната $\ast$ -алгебра $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$:

$$\text{Защо: } A^*A + B^*B + \dots + C^*C = 0 \Rightarrow A = B = \dots = C = 0$$

за всеки краен брой $A, B, \dots, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$?

Проверка:

$$A^*A = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{k1} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{j1} & \dots & \bar{a}_{jj} & \dots & \bar{a}_{nj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \dots & \bar{a}_{kn} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} := X := \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{j1} & \dots & x_{jj} & \dots & x_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{jj} = \bar{a}_{1j}a_{1j} + \dots + \bar{a}_{nj}a_{nj} = |a_{1j}|^2 + \dots + |a_{nj}|^2 \geq 0$$

$$\text{и } x_{jj} = 0 \Leftrightarrow a_{1j} = \dots = a_{nj} = 0 \quad (j\text{-тата колона е } = 0).$$

Но елемента jj на $A^*A + B^*B + \dots + C^*C$ е $x_{jj} + y_{jj} + \dots + z_{jj}$, където аналогично

$$\text{въвеждаме } Y := (y_{jk})_{n \times n} := B^*B, \dots, Z := (z_{jk})_{n \times n} := C^*C$$

2. Положителността и нейните разновидности в курса

В курса ще срещаме следните три разновидности на понятието за положителност:

- **Положителни $\ast$ -алгебри**: това са такива $\ast$ -алгебри $\mathcal{A}$, за които

$$A_1^*A_1 + A_2^*A_2 + \dots + A_n^*A_n = 0 \Rightarrow A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$$

за всеки краен брой $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$

- **Положителни елементи в $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$** :

това са елементи $C \in \mathcal{A}$, които могат да се представят във вида:

$$C = A_1^*A_1 + A_2^*A_2 + \dots + A_n^*A_n, \text{ за някои } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$$

В частност, положителните елементи са винаги самоспрегнати, $C^* = C$

(понеже $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$) и те винаги съществуват.

Проблемът е, че може да се окаже, че всички елементи в една $\ast$ -алгебра са положителни!

От тази патологична ситуация ни предпазва условието за положителност на цялата алгебра.

В матричната $\ast$ -алгебра $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$: положителните елементи се наричат още положително дефинитни матрици.

- **Положителни линейни функционали над $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$** :

$$\wp: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} \text{ е положителен } \Leftrightarrow \wp(A^*A) \geq 0 \text{ за } \forall A \in \mathcal{A}$$

Забележка по терминологията: по-коректно би било в горните определения да се говори за неотрицателност, а не за положителност, понеже понятията се отнасят до нестроги неравенства " $\geq$ ", а не " $>$ ". По исторически причини ние обаче ще използваме "положителност", като в случаите, когато имаме строги неравенства " $>$ " ще говорим за "строга положителност".

3. Подалгебри, морфизми и изоморфизми на различните типове алгебри

Определение Нека $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ е линейно пространство над $\mathbb{K}$ и нека $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ е линейно подпространство.

- Ако $\mathcal{A}$ е алгебра, то $\mathcal{B}$ се нарича **подалгебра** на $\mathcal{A}$,
ако $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow AB \in \mathcal{B}$ за $\forall A, B \in \mathcal{B}$
- Ако $\mathcal{A}$ е алгебра с единица, то $\mathcal{B}$ се нарича **подалгебра с единица** на $\mathcal{A}$,
ако в допълнение на горното $1 \in \mathcal{B}$
- Ако $\mathcal{A}$ е $*$ -алгебра, то $\mathcal{B}$ се нарича **$*$ -подалгебра** на $\mathcal{A}$,
ако в допълнение на първото условие по-горе, от $A \in \mathcal{B}$ то и $A^* \in \mathcal{B}$ за $\forall A \in \mathcal{B}$
- За други типове алгебри, като "асоциативни", "комутативни", "положителни" не са нужни повече условия: тези свойства преминават към подалгебрите, което се доказва непосредствено.

Определение Нека $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са линейни пространства над $\mathbb{K}$ и нека $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ е линейно изображение.

- Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са алгебри, то f се нарича **морфизъм на алгебри**,
ако за $\forall A, B \in \mathcal{B}$ имаме $f(AB) = f(A)f(B)$.
- Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са алгебри с единица, то f се нарича **морфизъм на алгебри с единица**,
ако в допълнение на горното $f(1_{\mathcal{B}}) = 1_{\mathcal{A}}$
- Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са $*$ -алгебри, то f се нарича **морфизъм на $*$ -алгебри**,
ако в допълнение на първото условие по-горе $f(A^*) = f(A)^*$ за $\forall A \in \mathcal{B}$.
- Отново, за други типове алгебри, като "асоциативни", "комутативни", "положителни" не се налагат повече условия
- В горните случаи, ако f е биекция, то казваме, че f е **изоморфизъм от съответния тип**.
- В случая когато $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, а $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ е изображението на влизане, то ползваме съответните понятия за подалгебри от първото определение.

Основен пример е следната $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$: нека $n = k_1 + \dots + k_m$ е разбиване на цели положителни числа.

$$\text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C}) :=$$

нарисува се блокно-диагонални матрици

$$:= \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} k_1 & & & \\ \hline A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline k_2 & & & \\ \hline 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline k_m & & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_m \end{array} \right\} =: \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m) \quad \left| \begin{array}{l} \text{за } A_j \in \text{Mat}_{k_j}(\mathbb{C}) \\ \text{при } j = 1, \dots, m \end{array} \right.$$

Това е $\ast$ -подалгебра с $\hat{1} = \text{diag}(\hat{1}, \dots, \hat{1})$, понеже:

$$\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_m \end{array} \cdot \begin{array}{c|c|c|c} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & B_m \end{array} = \begin{array}{c|c|c|c} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & C_m \end{array}$$

$$\Rightarrow C_j = A_j B_j \quad \text{за } j = 1, \dots, m, \text{ т.е.,}$$

$$\text{diag}(A_1, \dots, A_m) \cdot \text{diag}(B_1, \dots, B_m) = \text{diag}(A_1 B_1, \dots, A_m B_m)$$

$$\text{и още, } (\text{diag}(A_1, \dots, A_m))^* = \text{diag}(A_1^*, \dots, A_m^*)$$

Забележка: Изображенията: $\text{pr}_j: \text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_{k_j}(\mathbb{C})$ за $j = 1, \dots, m$ са морфизми на $\ast$ -алгебри с единица. По такъв начин $\text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C})$ се оказва модел на т.нар. пряко произведение на асоциативни $\ast$ -алгебри с единица, т.е. имаме:

$$\text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C}) \cong \text{Mat}_{k_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times \text{Mat}_{k_m}(\mathbb{C}).$$

Допълнителни примери и контрапримери

- Подпространството $\{\text{diag}(A, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\}$ е $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_{2k}(\mathbb{C})$, която като самостоятелна $\ast$ -алгебра с единица е $\cong \text{Mat}_k(\mathbb{C})$.
- Подпространството $\{\text{diag}(0, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\}$, където $0 \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})$ е $\ast$ -подалгебра на $\text{Mat}_{2k}(\mathbb{C})$, но не подалгебра с единица. Същевременно, като самостоятелна $\ast$ -алгебра $\{\text{diag}(0, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\}$ има единица и това е $\text{diag}(0, 1)$. Вобщност, $\{\text{diag}(0, A) \mid A \in \text{Mat}_k(\mathbb{C})\} \cong \text{Mat}_k(\mathbb{C})$.

- Подпространството на горно триъгълните матрици

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\} \text{ е подалгебра с единица на } \text{Mat}_n(\mathbb{C}), \text{ но не е } \ast\text{-подалгебра}$$

- Подпространството на строго горно триъгълни матрици

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ е подалгебра с на } \text{Mat}_n(\mathbb{C}), \text{ но не е } \ast\text{-подалгебра и не}$$

подалгебра с единица, като вобщност няма единица.

4. Основна структурна теорема

Всяка крайно-мерна, положителна, комплексна, асоциативна, $\ast$ -алгебра с единица е изоморфна на $\text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C})$ за единствени $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m$.

Забележка: не всяка $\ast$ -подалгебра с единица на $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ може да се преобразува (чрез смяна на базиса) в подалгебра от вида $\text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C})$.

Виждаме, че единственият случай, когато може да получим комутативна алгебра е за $k_1 = \dots = k_m = 1$ (и $m = n$). Така получаваме:

5. Комутативния случай

Следствие Една крайно-мерна, положителна, комплексна, асоциативна $\star$ -алгебра $\mathcal{A}$ с единица е комутативна $\Leftrightarrow \mathcal{A} \cong \text{Mat}_{1,\dots,1}(\mathbb{C}) \equiv \{\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}\}$

Товава тя е изоморфна на алгебрата $\text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega) := \{A \mid A: \Omega \rightarrow \mathbb{C}\}$ от функции върху n -елементно множество $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$,

$$\begin{array}{ccc} \Omega & = & \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \\ A \downarrow & & \downarrow \downarrow \downarrow \\ \mathbb{C} & \in & a_1, \dots, a_n \end{array}$$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$$

понеже имат еднакви закони за събиране, умножение и свързване

6. Аксиоми на алгебричния подход - припомняне. Класически системи

Припомняме аксиомите: една (квантова) система се определя от:

- Съществува комплексна, асоциативна, $\star$ -алгебра $\mathcal{A}$ с единица, която е положителна, така, че $A \in \text{Observables} \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$ и $A = A^*$.
 $\mathcal{A}$ е наричана алгебра на наблюдаемите (макар, че не всички нейни елементи са наблюдаеми).
- Крайност: $\mathcal{A}$ е крайно-мерно линейно пространство.
- $\rho \in \text{States} \Leftrightarrow \rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ е линейен функционал, който изпълнява свойствата:
(нормираност) $\rho(1) = 1$;
(положителност) $\rho(A^*A) \geq 0$ за $\forall A \in \mathcal{A}$.
- За наблюдаема A : $\rho(A) =: \langle A \rangle_{\rho}$ се интерпретира, като средна стойност на A в ρ .

Горните аксиоми са единствените, които въвеждат структурата на системите и ограниченията върху тази структура. Ще имаме и допълнителни аксиоми, но те единствено ще интерпретират допълнителни понятия от нашия опит, като събитие, експеримент, подсистема, надсистема, едновременна измеримост (съвместност) и др. Тези понятия няма да водят до допълнителни структурни ограничения.

Схематично: в основата на всичко е

алгебра на наблюдаемите
- това е асоциативна, комплексна $*$ -алгебра, с единица, която е положителна



Observables($\mathcal{A}$)
 $\equiv$ Наблюдаеми на $\mathcal{A}$
 $:= \{A \in \mathcal{A} \mid A = A^*\}$

ψ
 A -набл.

States($\mathcal{A}$)

$\equiv$ Състояния на $\mathcal{A}$

$:= \{ \rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{(положителен)}$
 лин.

ψ
 ρ - съст.

$\rho(A^*A) \geq 0$
за $\forall A \in \mathcal{A}$
(нормиран)
 $\rho(1) = 1 \}$

$$\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho$$

$:=$ средна стойност
на наблюдаемата A
в състоянието ρ .

Следствие. Съгласно т.4 имаме пълна класификация на квантовите системи в алгебричния подход с точност до изоморфизъм, посредством класификацията на алгебрите на наблюдаемите им. Така, можем да си представим, че алгебрата на наблюдаемите е:

$$\mathcal{A} = \text{Mat}_{k_1, \dots, k_m}(\mathbb{C})$$

за единствени цели положителни числа $k_1, \dots, k_m$ - тази редица напълно определя вида на системата.

В частност, отделят се следните два гранични случая:

а) $k_1 = \dots = k_m = 1$ - това ще бъдат класическите системи по-долу

б) $m = 1$ - това ще карат само квантови или още, неприводими квантови системи.

Определение **Класическа система** е такава, която се определя от комутативна алгебра на наблюдаемите. Съгласно т.5 това означава, че алгебрата на наблюдаемите е алгебра е алгебра от функциите върху крайно множество. Наблюдаемите са реалните функции

$$\begin{array}{ccc} \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} & & \\ A = A^* & \downarrow & \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbb{R} & \in & a_1, \dots, a_n \end{array}$$

и в този, и само в този случай, те също образуват алгебра, която е реална и комутативна.

4. Подсистеми, надсистеми, експерименти съвместна /едновременно измеримост

- Подсистема се определя от $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.
Смисъл: подсистемата отделя подмножество от наблюдаеми отнасящи се до измервания върху подсистемата. Това е аналогично и на квантово-логическия подход и както там, така и тук искаме основните операции, които в случая са алгебричните, да се наследяват и от подсистемата.
- При размяна на местата подсистема $\subseteq$ система $\subseteq$ надсистема.
Както и при квантово-логическия подход, надсистемите отразават процеса на утесняване (изфинаване) на измерванията. В контекста на квантовата информатика, прехода към надсистема се използва при надгравдане на изчисленията, например.
- Експеримент – това е подсистема, която сама по себе си е класическа. Следователно, това е комутативна $\ast$ -подалгебра с единица на алгебрата на наблюдаемите.
- Ако $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема (т.е., $A^* = A$), то подмножеството

$$\mathbb{C}[A] := \text{всички полиноми от } A \equiv \{a_0 \hat{1} + a_1 A + \dots + a_n A^n \mid \text{за } \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}\}$$

$$= \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \hat{1}, A, A^2, \dots \}$$
е най-малката, комутативна $\ast$ -подалгебра с единица на $\mathcal{A}$, която съдържа A .
Следователно, това е минималния експеримент, при който се измерва наблюдаемата A .
- Две наблюдаеми $A, B \in \mathcal{A}$ се наричат **съвместни** (още, едновременно / съвместно измерими), ако могат да се измерят в общ експеримент. Следователно, A и B са съвместни $\Leftrightarrow$
 A и B се съдържат в обща комутативна, $\ast$ -подалгебра с единица на $\mathcal{A}$.

Теорема Две наблюдаеми $A, B \in \mathcal{A}$ са съвместни $\Leftrightarrow A$ и B комутират, т.е., $AB = BA$

Схема на доказателството. $\Rightarrow$) това следва непосредствено от определенията.

$\Leftarrow$) Ако A и B комутират, то

$\mathcal{C}[A, B] :=$ всички полиноми от A и B

е най-малката комутативна $\ast$ -подалгебра с единица на $\mathcal{A}$, която съдържа A и B .

8. Защо наблюдаемите са реални, а алгебрите на наблюдаемите – комплексни

Полето на реалните числа $\mathbb{R}$ е максималното наредено поле, т.е., това е максималната наредена числова система, която ни прави универсални при моделирането на системите в природата.

От друга страна, в една комплексна $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, произволен елемент $C \in \mathcal{A}$ може да се представи, като $C = A + iB$ за самоспрежати $A, B \in \mathcal{A}$ – наистина:

$$A = \frac{1}{2}(C + C^*) = A^* \quad \text{и} \quad B = \frac{1}{2i}(C - C^*) = B^*$$

Ако полужите A и B комутират, т.е., те са едновременно измерими наблюдаеми, то елемента C се нарича нормален елемент на $\ast$ -алгебрата $\mathcal{A}$. Тоест, когато C е комплексна наблюдаема, която се свежда до двойка съвместни реални наблюдаеми.

Но въобще, защо е нужно да се отива към алгебри над комплексните числа?

Отговор: заради основната теорема на алгебрата, че всеки полином има корен в полето на комплексните числа. Това позволява да се докаже основната класификационна теорема в т.ч.



9. Събитията в алгебричния подход

Първоначално определихме събитие, като наблюдаема Q , която приема стойности 0 или 1. Това се изразява от алгебричното соотношение $Q^2 = Q$ понеже $\{0, 1\}$ са множеството от корени на уравнението $x^2 - x = 0$. Добавяйки и условието за наблюдаема $Q = Q^*$ достигаме до следните определения.

Определение а) **Саноспрегнат идемпотент** Q в $*$ -алгебра $\mathcal{A}$, това е елемент $Q \in \mathcal{A}$ такъв, че: $Q^* = Q = Q^2$

б) Събитие в квантова система е саноспрегнат идемпотент на алгебрата на наблюдаемите.

Пример: събитие в класическа система - ако то се определя от крайно множество

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, така че алгебрата на наблюдаемите е $\mathcal{A} := \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$, тогава за една функция $Q: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (т.е., $Q \in \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega) = \mathcal{A}$) имаме

$$Q^* = Q = Q^2 \Leftrightarrow \overline{Q(\omega)} = Q(\omega) = Q(\omega)^2 \text{ за } \forall \omega \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow Q(\omega) \in \{0, 1\}$$

$$\Leftrightarrow Q = \chi_S, \text{ т.е., } Q \text{ е характеристична функция на подмножество } S \subseteq \Omega$$

$$\text{където } S = \{\omega \in \Omega \mid Q(\omega) = 1\} \text{ и } \chi_S(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{ако } \omega \in S \\ 0 & \text{ако } \omega \notin S \end{cases}$$

10. Логика и аритметика

В класическите системи логическите операции имат алгебричен израз.

$$\begin{aligned} \text{За } S_1, S_2 \subseteq \Omega \text{ имаме: } \chi_{S_1 \cap S_2} &= \chi_{S_1} \cdot \chi_{S_2} \\ \chi_{S_1 \cup S_2} &= \chi_{S_1} + \chi_{S_2} - \chi_{S_1} \chi_{S_2} \end{aligned}$$

В частност: $\Omega = S_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} S_m$ - дизюнктивно разбиране

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \equiv \chi_{\Omega} = \chi_{S_1} + \dots + \chi_{S_m} \\ 0 \equiv \chi_{\emptyset} = \chi_{S_j} \chi_{S_k} \text{ за } \forall j \neq k \end{cases}$$

Твърдение. В обща $\ast$ -алгебра $\mathcal{A}$, ако $P, Q \in \mathcal{A}$ са самоспрегнати идемпотенти, следните условия са еквивалентни:

- (1) PQ е самоспрегнат идемпотент;
- (2) $P + Q - PQ$ е самоспрегнат идемпотент;
- (3) $PQ = QP$ (т.е., P и Q комутират).

Доказателство. (1) $\Rightarrow$ (3)) $PQ = (PQ)^* = Q^* P^* = QP$

(3) $\Rightarrow$ (2)) $(P + Q - PQ)^* = P^* + Q^* - Q^* P^* = P + Q - PQ$

$$\begin{aligned} (P + Q - PQ)^2 &= (P + Q - PQ)(P + Q - PQ) \\ &= P^2 + PQ - P^2 Q + QP + Q^2 - QPQ - PQP - PQ^2 + PQPQ \\ &= P + PQ - PQ + PQ + Q - PQ - PQ - PQ + PQ \\ &= P + Q - PQ \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1)) $PQ = P + Q - (P + Q - PQ)$ - самоспрегнат е.

$$\Rightarrow PQ = (PQ)^* = Q^* P^* = QP - \text{комутират}$$

$$\Rightarrow (PQ)^2 = PQPQ = P^2 Q^2 = PQ - \text{идемпотент. } \square$$

II. Спектрална теорема. Спектър и спектрално разлагане на наблюдаема

Спектрална теорема Нека $\mathcal{A}$ е ^{крайно мерна} комплексна, положителна $\ast$ -алгебра с единица и нека $A \in \mathcal{A}$ е самоспрегнат ($A = A^*$). Тогава съществуват двойки

$$(\alpha_1, Q_1), \dots, (\alpha_r, Q_r),$$

които са единствени с точност до пренареждане и са такива, че:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ са две по две различни реални числа.
- $Q_1, \dots, Q_r$ са ненулеви самоспрегнати идемпотенти.
- $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$. } това наричаме **спектрално разлагане на елемента A**
- $I = Q_1 + \dots + Q_r$. } в този случай казваме, че $Q_1, \dots, Q_r$
- $Q_j Q_k = 0$ ако $j \neq k$, $j, k = 1, \dots, r$. } **задават разбиране на единицата**

Множеството $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ се нарича **спектър** на A , а $Q_1, \dots, Q_r$ - **спектрални идемпотенти** на A .

Пример : спектрално разлагане в комутативни алгебри

Ако $\mathcal{A} := \text{Func}_{\mathbb{C}}(\Omega)$, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ и $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (т.е., $A = A^*$)

тогава $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} = A(\Omega)$ - множеството от стойности на A

$S_j = A^{-1}(\alpha_j)$ за $j = 1, \dots, r$, $Q_j = \chi_{S_j}$. Така :

$$A(\omega) = \alpha_1 \chi_{S_1}(\omega) + \dots + \alpha_r \chi_{S_r}(\omega) \text{ за } \forall \omega \in \Omega$$

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \chi_{S_1}(\omega) + \dots + \chi_{S_r}(\omega) \\ 0 &= \chi_{S_j}(\omega) \chi_{S_k}(\omega) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \Omega = S_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} S_r$$

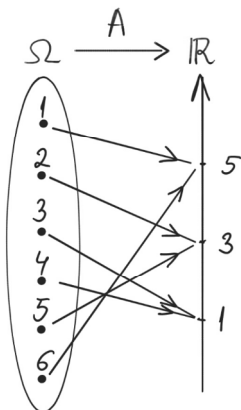
Пример :

$$A =$$

$$= 1 \cdot \chi_{\{3,4\}}$$

$$+ 3 \cdot \chi_{\{2,5\}}$$

$$+ 5 \cdot \chi_{\{1,6\}}$$



$$\{3, 4\} = A^{-1}(1),$$

$$\{2, 5\} = A^{-1}(3),$$

$$\{1, 6\} = A^{-1}(5).$$

Сравнение на означенията: $A = \underbrace{1 \cdot \chi_{\{3,4\}}}_{\alpha_1 Q_1} + \underbrace{3 \cdot \chi_{\{2,5\}}}_{\alpha_2 Q_2} + \underbrace{5 \cdot \chi_{\{1,6\}}}_{\alpha_3 Q_3}$

Знание (интерпретация) : спектърът на една наблюдаема е множеството на възможните стойности, които наблюдаемата може да приема при измерване.

Ако (α_j, Q_j) е двойка от спектралното разложение на наблюдаема A , то спектралният идемпотент α нарича още спектрално събитие и се интерпретира, като събитието " $A = \alpha_j$ ", т.е., "при измерване на A е получена стойност α_j ".

Забележка За самоспрегнати матрици, по-нататък ще имаме, че спектърът е множеството от собствените им стойности, а спектралните идемпотенти са ортогоналните проектори върху съответните подпространства от собствени вектори.

12. Функции от наблюдаема през спектралната теорема

Наблюдение Нека $\hat{I} = Q_1 + \dots + Q_r$ е разбиване на $\hat{I}$ в $\ast$ -алгебра, тогава за $\forall$ набори от числа $\alpha_1', \dots, \alpha_r', \alpha_1'', \dots, \alpha_r'' \in \mathbb{C}$ имаме:

$$(\alpha_1' Q_1 + \dots + \alpha_r' Q_r)(\alpha_1'' Q_1 + \dots + \alpha_r'' Q_r) = \alpha_1' \alpha_1'' Q_1 + \dots + \alpha_r' \alpha_r'' Q_r$$

В частност, ако $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ е спектралното разлагане на A , то

$$A^l = \alpha_1^l Q_1 + \dots + \alpha_r^l Q_r \text{ е спектралното разлагане на } A^l \text{ (за } l = 1, 2, \dots)$$

в т.ч. и $I = A^0 = \alpha_1^0 Q_1 + \dots + \alpha_r^0 Q_r$.

Определение Ако $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема (или по-общо, самоспрегнат елемент в $\ast$ -алгебра), която има спектрално разлагане $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ и $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е то полагаме: $f(A) := f(\alpha_1) Q_1 + \dots + f(\alpha_r) Q_r \in \mathcal{A}$, което е отново наблюдаема (т.е., $f(A) = f(A)^*$ - самоспрегнат).

$\Rightarrow f(x) := x^n$ имаме съгласуваност, както и по-общо, за $f(x)$ = полином на x .

На това се основава т.нар. "функционално смятане" в $\ast$ -алгебри.

13. Положителност и наредба на наблюдаеми и събития

Теорема Нека $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема, тогава следните условия са еквивалентни:

- (1) A е положителен елемент (т.е., $A = C_1^* C_1 + \dots + C_k^* C_k$ в $\mathcal{A}$).
- (2) $A = B^2$, за наблюдаема B .
- (3) Спектърът на A се състои от неотрицателни числа.

В кой да е от горните случаи ще пишем $A \geq 0$.

Доказателство Импликациите $(1) \Leftarrow (2) \Leftrightarrow (3)$ се ползват непосредствено от досега шните резултати. Импликацията $(1) \Rightarrow (3)$ се доказва с използване на техниката на оператори в хилбертови пространства, с която ще се запознаем по-натък. $\square$

Определение За две наблюдаеми $A, B \in \mathcal{A}$ ще пишем $A \leq B$ ако $B - A \geq 0$, което в ясност се пренася и върху събитията (като наблюдаеми).

По-нататък, с помощта на техниката на оператори в хилбертови пространства ще установим:

Теорема За две събития $P, Q \in \mathcal{A}$ (т.е., $P^* = P = P^2$ и $Q^* = Q = Q^2$) имаме:

$$P \leq Q \iff PQ = P \iff QP = P$$

Това именно съответства на релацията мажориране в квантово логическия подход.

14. Статистика на наблюдаемите величини и съответствието ѝ с обикайната теория на вероятностите за случайни величини

Нека $A \in \mathcal{A}$ е наблюдаема, $A = \alpha_1 Q_1 + \dots + \alpha_r Q_r$ е нейното спектрално разлагане и нека ρ е състояние (т.е., $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ е линеен, нормиран, положителен функционал)

Съгласно аксиоматичната ни интерпретация

$\rho(Q_i) = \text{Prob}_\rho \{A = \alpha_i\} :=$ вероятността A след измерване в състояние ρ да приеме стойност α_i .

и тогава $\rho(A) \equiv \langle A \rangle_\rho (=$ средната стойност на A в ρ)

$$= \alpha_1 \cdot \text{Prob}_\rho \{A = \alpha_1\} + \dots + \alpha_r \cdot \text{Prob}_\rho \{A = \alpha_r\}$$

- това е стандартна формула от теорията на вероятностите за средната стойност на случайна величина - това е сумата от произведенията стойности $\times$ вероятности за тях.

Горната формула се свеласува и с емпиричната формула за средна стойност:

$$\langle A \rangle_\rho = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_N}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha_1 \cdot (\#\{k \mid a_k = \alpha_1\}) + \dots + \alpha_r \cdot (\#\{k \mid a_k = \alpha_r\})}{N}$$

$$= \alpha_1 \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \mid a_k = \alpha_1\}}{N} + \dots + \alpha_r \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \mid a_k = \alpha_r\}}{N}$$

$$\text{Prob}_\rho \{A = \alpha_1\}$$

$$\text{Prob}_\rho \{A = \alpha_r\}$$

Определение Съответствието: спектрална стойност $\alpha_j \mapsto$ вероятност за $A = \alpha_j$ в ρ се нарича вероятностно разпределение на наблюдаемата A в състояние ρ

- Това е цялата статистическа информация за A в ρ . Може ли тя да се извлече само от средните стойности?

Отговор - да, но от няколко средни стойности.

нека $p_1 := \text{Prob}_\rho\{A = \alpha_1\} = ?$, $\dots$, $p_r := \text{Prob}_\rho\{A = \alpha_r\} = ?$ - търсените вероятности

Тогава:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\rho &= \alpha_1 \cdot p_1 + \dots + \alpha_r \cdot p_r \\ \langle A^2 \rangle_\rho &= \alpha_1^2 \cdot p_1 + \dots + \alpha_r^2 \cdot p_r \\ &\vdots \\ \langle A^r \rangle_\rho &= \alpha_1^r \cdot p_1 + \dots + \alpha_r^r \cdot p_r \end{aligned}$$

- линейната система на Вандермонд $\Rightarrow$ определя $p_1, \dots, p_r$

моменти

Това е "крайния" частен случай на т.нар. проблем на моментите на Хамбургер.

Следователно, задаването на състоянията само като средни стойности, но за всички наблюдаеми (включително и моментите) дава пълна статистическа информация

Следващ проблем: но ако разполагаме с моментите $\langle A \rangle_\rho, \langle A^2 \rangle_\rho, \dots$, кога те ще дават по горната линейна система на Вандермонд числа $p_1, \dots, p_r \in [0, 1]$ - т.е. имащи смисъл на вероятности.

Отговор дава т.нар. теорема на Бохнер: НОУ за това е моментите $\langle A^n \rangle_\rho$ да идват от положителен нормиран линейен функционал $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$.

Това мотивира аксиомата за състоянията.